

## Déterminant en dimension 5

Voici l'unique  $f : M_5(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  multilinéaire antisymétrique telle que  $f(I_5) = 1$ .  
La somme contient 120 termes.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{aligned}
 & a_{1,5}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,1} - a_{1,4}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,1} - a_{1,5}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,1} + a_{1,3}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,1} \\
 & + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,1} - a_{1,3}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,1} - a_{1,5}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,1} + a_{1,4}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,1} \\
 & + a_{1,5}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,1} - a_{1,2}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,1} - a_{1,4}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,1} + a_{1,2}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,1} \\
 & + a_{1,5}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,1} - a_{1,3}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,1} - a_{1,5}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,1} + a_{1,2}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,1} \\
 & + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,1} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,1} - a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,1} + a_{1,3}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,1} \\
 & + a_{1,4}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,1} - a_{1,2}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,1} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,1} \\
 & - a_{1,5}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,2} + a_{1,4}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,2} + a_{1,5}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,2} - a_{1,3}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,2} \\
 & - a_{1,4}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,2} + a_{1,3}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,2} + a_{1,5}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,2} - a_{1,4}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,2} \\
 & - a_{1,5}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,2} + a_{1,1}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,2} + a_{1,4}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,2} - a_{1,1}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,2} \\
 & - a_{1,5}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,2} + a_{1,3}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,2} + a_{1,5}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,2} - a_{1,1}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,2} \\
 & - a_{1,3}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,2} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,2} + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,2} - a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,2} \\
 & - a_{1,4}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,2} + a_{1,1}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,2} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,2} \\
 & + a_{1,5}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,3} - a_{1,4}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,3} - a_{1,5}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,3} + a_{1,2}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,3} \\
 & + a_{1,4}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,3} - a_{1,2}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,3} - a_{1,5}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,3} + a_{1,4}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,3} \\
 & + a_{1,5}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,3} - a_{1,1}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,3} - a_{1,4}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,3} + a_{1,1}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,3} \\
 & + a_{1,5}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,3} - a_{1,2}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,3} - a_{1,5}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,3} + a_{1,1}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,3} \\
 & + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,3} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,3} - a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,3} + a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,3} \\
 & + a_{1,4}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,3} - a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,3} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,3} \\
 & - a_{1,5}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,4} + a_{1,3}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,4} + a_{1,5}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,4} - a_{1,2}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,4} \\
 & - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,4} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,4} + a_{1,5}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,4} - a_{1,3}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,4} \\
 & - a_{1,5}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,4} + a_{1,1}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,4} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,4} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,4} \\
 & - a_{1,5}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,4} + a_{1,2}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,4} + a_{1,5}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,4} - a_{1,1}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,4} \\
 & - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,4} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,4} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,4} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,4} \\
 & - a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,4} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,4} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,4} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,4} \\
 & + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,5} - a_{1,3}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,5} - a_{1,4}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,5} + a_{1,2}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,5} \\
 & + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,5} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,5} - a_{1,4}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,5} + a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,5} \\
 & + a_{1,4}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,5} - a_{1,1}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,5} - a_{1,3}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,5} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,5} \\
 & + a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,5} - a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,5} - a_{1,4}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,5} + a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,5} \\
 & + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,5} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,5} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,5} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,5} \\
 & + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,5} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,5} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5}
 \end{aligned}$$