Devoir à la maison 10

Diagrammes

À rendre pour le jeudi 6 février 2020

En travaillant ce DM, vous vous entraînerez à chercher, ce qui est fondamental.

Je suis organisé(e) dans mon travail.
Je ne repousse pas au dernier moment ce que je dois faire.

Je me libère des plages de travail où je peux me consacrer au DM,
où je peux vraiment me concentrer — et chercher.

Dans ce problème, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Tous les espaces vectoriels considérés sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

« L' » espace nul

On note $0_{\mathbb{K}}$ le scalaire nul. On rappelle que $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$. Dans ce problème, on note

$$\mathbb{0} := \{0_{\mathbb{K}}\},$$

qu'on munit de sa structure d'espace vectoriel.

Diagrammes

- *Un* diagramme (de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) *est la donnée d'une famille d'espaces vectoriels et d'applications linéaires entre certains d'entre eux.*
- *On dit qu'un diagramme est* commutatif $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *dans ce diagramme, tous les « chemins d'applications linéaires » ayant même origine et même but sont égaux.*

Exemple

Par exemple,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & F \arrow[dl, "g"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

est un diagramme : cela veut juste dire que E, F, G sont des espaces vectoriels et que $f \in \mathrm{L}(E, G)$, $g \in \mathrm{L}(F, G)$ et $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$. Ce diagramme est commutatif si et seulement si que $g \circ \varphi = f$.

Suites exactes

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soient E_1, E_2, ..., E_N *des espaces vectoriels.*
Soit, pour $i \in [\![1, N-1]\!]$, *soit* $\varphi_i \in \mathrm{L}(E_i, E_{i+1})$.
Cela nous permet de considérer le diagramme

$$E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_2 \xrightarrow{\varphi_2} E_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \xrightarrow{\varphi_{N-2}} E_{N-1} \xrightarrow{\varphi_{N-1}} E_N$$

On dit que ce diagramme est une suite exacte $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\textit{il est commutatif} \quad \textit{et} \quad \forall i \in [\![1, N-2]\!],\ \mathrm{Im}\,\varphi_i = \mathrm{Ker}\,\varphi_{i+1}.$$

I. Petites propriétés

1. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_3 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \end{tikzcd} \tag{1}$$

(a) Quelles sont les conditions à vérifier pour qu'il soit commutatif ?

(b) On suppose que

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_3 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Montrer que le diagramme (1) est commutatif.

Ce qu'on a vu dans cet exemple est en fait vrai en toute généralité. Sans formaliser, un diagramme est commutatif si et seulement si « toutes ces cellules élémentaires » sont commutatives.

2. Soit E un espace vectoriel et soient $f, g \in \mathrm{L}(E)$.
Exprimer l'assertion « f et g commutent » en termes de commutativité d'un diagramme.

3. Soient E et F des espaces vectoriels.
On considère

$$E \xrightarrow{f} F \qquad \text{et} \qquad F \xrightarrow{g} E\ .$$

Exprimer l'assertion « f et g sont réciproques l'une de l'autre » en termes de commutativité d'un diagramme.

4. Soit E un espace vectoriel.

(a) Montrer que $\mathrm{L}(\mathbb{0}, E)$ est réduit à un seul élément. Quel est cet élément ?

(b) Montrer que $\mathrm{L}(E, \mathbb{0})$ est réduit à un seul élément. Quel est cet élément ?

Si E est un espace vectoriel, on pourra donc écrire

$$\mathbb{0} \longrightarrow \mathrm{E} \qquad \textit{ou} \qquad E \longrightarrow \mathbb{0}$$

sans donner de nom à cette flèche.

5. Soient E et F des espaces vectoriels et soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$.

(a) Montrer que

$$f \text{ injectif} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{0} \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \text{ exacte}$$

(b) Montrer que

$$f \text{ surjectif} \quad \Longleftrightarrow \quad E \xrightarrow{f} F \longrightarrow \mathbb{0} \text{ exacte}$$

(c) Montrer que

$$f \text{ isomorphisme} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{0} \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \longrightarrow \mathbb{0} \text{ exacte}$$

II. Un premier exercice

6. On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & C \\
 & B' \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

où l'on suppose :

- f, f' sont injectives et g, g' sont surjectives ;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Ker}(g')$.

(a) Exprimer les conditions précédentes en terme de suites exactes.

(b) Montrer que h est un isomorphisme.

III. Le lemme des cinq

7. Le lemme des cinq court

On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbb{0} \\
\mathbb{0} \arrow[r] & A' \arrow[r, "s"'] & B' \arrow[r, "t"'] & C' \arrow[r] & \mathbb{0}
\end{tikzcd}$$

Montrer que

$$\left.\begin{array}{r} g \text{ isomorphisme} \\ h \text{ isomorphisme} \end{array}\right\} \implies f \text{ isomorphisme.}$$

8. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\varphi_3"] & A_4 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi_4"] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\alpha"] & B_2 \arrow[r, "\beta"] & B_3 \arrow[r, "\gamma"] & B_4 \arrow[r, "\delta"] & B_5
\end{tikzcd}$$

(a) On suppose que φ_2 et φ_4 sont injectives.
Montrer que

$$\varphi_1 \text{ surjective} \implies \varphi_3 \text{ injective.}$$

(b) On suppose que φ_2 et φ_4 sont surjectives.
Montrer que

$$\varphi_5 \text{ injective} \implies \varphi_3 \text{ surjective.}$$

(c) **Le lemme des cinq**
On suppose que φ_2 et φ_4 sont des isomorphismes.
Montrer que

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1 \text{ surjective}\\ \varphi_5 \text{ injective}\end{array}\right\} \implies \varphi_3 \text{ isomorphisme.}$$

(d) Réexprimer le résultat précédent en utilisant le plus possible le langage des suites exactes.

IV. Le lemme des neuf

9. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{0} \arrow[d] & \mathbb{0} \arrow[d] & \mathbb{0} \arrow[d] & \\
\mathbb{0} \arrow[r] & E'_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\alpha'"'] & E_1 \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\alpha" description] & E''_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & \mathbb{0} \\
\mathbb{0} \arrow[r] & E'_2 \arrow[r, "\gamma_2" description] \arrow[d, "\beta'"'] & E_2 \arrow[r, "\rho_2" description] \arrow[d, "\beta" description] & E''_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta''"] & \mathbb{0} \\
\mathbb{0} \arrow[r] & E'_3 \arrow[r, "\gamma_3"'] \arrow[d] & E_3 \arrow[r, "\rho_3"'] \arrow[d] & E''_3 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{0} \\
 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} &
\end{tikzcd}$$

On suppose que toutes les colonnes sont exactes et que la ligne du milieu est exacte.
Montrer que la première ligne est exacte si et seulement la troisième l'est.