Leaf-Brocard
Gwénolé

DS n° 5

n° 330

Excellent ++

travail !

Félicitations

9° 24 a → AR

XP TD 9 & p ++

**I.1)**

On pose $A := \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 2/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

$A \in ST^*(3)$ Mais $A^T \notin ST^*(3)$

---

**I.2)**

On a $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

et $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $AX[i,1] = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i$

$x_j$ ou $x_i$ ?

---

**I.3) a)** On suppose que $A, B \in ST(n)$

Montrons que $AB \in ST(n)$.

Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$. On a $AB[i,j] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} b_{\ell,j}$

TB

- On a donc bien $AB[i,j] \geq 0$ comme somme de coefficients positifs.

- Calculons $\sum_{p=1}^{n} AB[i,p]$

On a $\sum_{p=1}^{n} AB[i,p] = \sum_{p=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} b_{\ell,p}$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} \sum_{p=1}^{n} b_{\ell,p}$$

Or $B \in ST(n)$ donc $\sum_{p=1}^{n} b_{\ell,p} = 1$ pour $\ell \in [\![1,n]\!]$

Donc $\sum_{p=1}^{n} AB[i,p] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} \cdot 1 = 1$ car $A \in ST(n)$

On a donc bien les propriétés vérifiées.

$\boxed{AB \text{ est donc stochastique}}$

**I.3) b)**

On suppose $A \in ST(n)$

Montrons que $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $A^{\ell} \in ST(n)$ par récurrence.

• déjà, pour $n=0$, on a $A^0 = I_n \in ST(n)$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n \in ST(n)$.

Montrons que $A^{n+1} \in ST(n)$.

On a $A^{n+1} = A^n \cdot A$.

Or $A^n \in ST(n)$ et $A \in ST(n)$ donc d'après a)

$A^{n+1} \in ST(n)$

D'où l'hérédité.

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n \in ST(n)}$

**I.4)**

Soient $A,B \in ST^*(n)$.

Montrons que $AB \in ST^*(n)$.

• Déjà, $A, B \in ST(n)$ donc $AB \in ST(n)$.

Montrons donc que $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $AB[i,j] > 0$

Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$.

On a $AB[i,j] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}\, b_{\ell,j}$

or tous les coefficients de la somme sont strictement positifs.

Donc $AB[i,j] > 0$.

Ainsi, on a bien $\boxed{AB \in ST^*(n)}$

---

**II.5)a)** On raisonne par analyse synthèse et on cherche $B \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $E_\lambda(A) = \ker(B)$.

Analyse :

Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$.

On suppose que $E_\lambda(A) = \ker(B)$.

Ainsi, on a $\forall U \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $AU = \lambda U \iff BU = 0_{n,1}$

Soit $U \in E_\lambda(A)$.

On a donc $AU = \lambda U$ et $BU = 0_{n,1}$

Donc $AU - \lambda U = 0_{n,1}$

Donc $(A - \lambda I_n + B)U = 0_{n,1}$

Synthèse :

On pose $B := \lambda I_n - A$.

Montrons que $E_\lambda(A) = \ker(B)$.

- Soit $U \in E_\lambda(A)$. On a $AU = \lambda U$. donc $(\lambda I_n - A)U = 0$

ie $BU = 0$

donc $U \in \ker(B)$

Donc $E_\lambda(A) \subset \ker(B)$

- Soit $U \in \ker(B)$. On a $BU = 0$

ie $(\lambda I_n - A)U = 0$

Donc $\lambda U - AU = 0$ et $\lambda U = AU$.

Donc $U \in E_\lambda(A)$.

Donc on a bien $E_\lambda(A) = \ker(B)$

+B

Donc B convient.

Ainsi, on a montré que $\boxed{E_\lambda(A) = \ker(\lambda I_n - A)}$

---

I.5) b) - Montrons que $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\} \Longrightarrow E_\lambda(A^T) \neq \{0_{n,1}\}$

- On suppose que $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$.

Ainsi, on a $\ker(\lambda I_n - A) \neq \{0_{n,1}\}$. donc $(\lambda I_n - A) \notin GL_n(\mathbb{C})$

DALC

Donc $(\lambda I_n - A)^T = (\lambda I_n - A^T) \notin GL_n(\mathbb{C})$

Donc $\ker(\lambda I_n - A^T) \neq \{0_{n,1}\}$

2/6

Ie $\underline{E_\lambda(A^T) \neq \{0_{n,1}\}}$

D'où le sens direct.

Joli

+1

- Pour le sens réciproque, on suppose que $E_\lambda(A^T) \neq \{0_{n,1}\}$.

On a donc $E_\lambda((A^T)^T) = \underline{E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}}$ d'après le sens direct.

Ainsi on a bien montré que $\boxed{E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\} \iff E_\lambda(A^T) \neq \{0_{n,1}\}}$

---

II.6 a) On a $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}[i,1] = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.

Ainsi, on a $\boxed{A\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}}$

b) On a donc $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

Donc $\underline{\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \in E_1(A)}$ donc $\boxed{E_1(A) \neq \{0_{n,1}\}}$

c) On déduit que $E_1(A^T) \neq \{0_{n,1}\}$. Or $0_{n,1} \in E_1(A^T)$

Donc $\exists V \in M_{n,1}(\mathbb{C}) : V \notin \{0_{n,1}\}$ et $V \in E_1(A^T)$

Ie $\boxed{\exists V \in M_{n,1}(\mathbb{C}) : V \neq 0_{n,1} \text{ et } A^T V = V}$

---

**III.7)** • On suppose que $0 \in Sp(A)$.

Ainsi, $\exists U \in M_{n,1}(\mathbb{C}) : AU = 0$ et $U \neq 0_{n,1}$

Donc $\ker(A) \neq \{0_{n,1}\}$

Donc $A$ non inversible.

D'où le sens direct.

• On suppose que $A$ non inversible.

Donc $\ker(A) \neq \{0_{n,1}\}$.

Donc $\exists U \in M_{n,1}(\mathbb{C}) : AU = 0$ et $U \neq 0_{n,1}$

Donc $0 \in Sp(A)$

D'où le sens réciproque.

D'où l'équivalence.

---

**III.8)a) i)** On raisonne par l'absurde et on suppose que $X \neq 0_{n,1}$.

Fixons ~~donc~~ $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

On a donc $|x_{i_0}| \neq 0$.

Comme $X \in \ker(A)$, on a $AX[i_0] = 0$

ie $$\sum_{l=1}^{n} a_{i_0 l}\, x_l = 0$$

Donc $$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_0}}^{n} a_{i_0,l}\, x_l = -a_{i_0,i_0}\, x_{i_0}$$

Donc $\left|\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i_0}}^{n} a_{i_0,\ell}\, x_\ell\right| = |a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}|$

Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|x_i| \leqslant |x_{i_0}|$

Donc $\left|\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i_0}}^{n} a_{i_0,\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,\ell}|\,|x_\ell| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,\ell}| = |x_{i_0}|\, r_{i_0}(A)$

Donc on obtient $|x_{i_0}|\, r_{i_0}(A) \geqslant |x_{i_0}|\,|a_{i_0,i_0}|$

Comme $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $r_{i_0}(A) \geqslant |a_{i_0,i_0}|$

C'est absurde d'après l'hypothèse.

Donc $\boxed{X = 0_{n,1}}$

ii) On a donc $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$ donc A est inversible

---

III.8) e) On suppose que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda - a_{i,i}| > r_i(A)$.

TB

- On remarque que $r_i(A) = r_i(A - \lambda I_n)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$

En effet, $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow \lambda I_n[i,j] = 0$.

- Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a $|(A - \lambda I_n)_{i,i}| = |a_{i,i} - \lambda| > r_i(A) = r_i(A - \lambda I_n)$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|(A - \lambda I_n)_{i,i}| > r_i(A - \lambda I_n)$

d'après a), on déduit que $\boxed{A - \lambda I_n \text{ est inversible.}}$

---

III.9) Soit $\lambda \in Sp(A)$.

On a donc $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$

Ainsi, $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$

Donc, $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Par contraposition de 8.b),

$\exists i \in [\![1,n]\!] : |\lambda - a_{i,i}| \leq r_i(A)$

Ie $\exists i \in [\![1,n]\!] : \lambda \in D_i(A)$

Ainsi, on a bien $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$

Donc $\boxed{Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)}$

TB

---

IV.10) On a montré précédement que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$

Donc $\boxed{1 \in Sp(A)}$

---

IV.11) Con $\lambda \in Sp(A)$, $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$.

Donc $\exists i \in [\![1,n]\!] : \lambda \in D_i(A)$.

Fixons un tel $i \in [\![1,n]\!]$.

On a donc $|\lambda - a_{i,i}| \leq r_i(A)$

Or $r_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| - |a_{i,i}|$

3/6

Or $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} \geq 0$.

Donc $r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} - a_{i,i}$

$= 1 - a_{i,i}$

Donc $\boxed{|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}}$

On a donc bien montré qu'il existe $p \in [\![1,n]\!]$ tel que

$|\lambda - a_{p,p}| \leq 1 - a_{p,p}$

**c)** Par inégalité triangulaire, on a $|\lambda| - |a_{p,p}| \leq |\lambda - a_{p,p}|$

donc $|\lambda| - a_{p,p} \leq 1 - a_{pp}$

donc $\boxed{|\lambda| \leq 1}$

---

**IV.12)a)** On suppose $m > \frac{1}{2}$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a $a_{i,i} > \frac{1}{2}$

De plus, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ donc $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} = 1 - a_{i,i}$

donc $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 1 - a_{i,i}$.

donc $r_i(A) = 1 - a_{i,i} < \frac{1}{2}$

Donc $r_i(A) < a_{i,i}$

)

Ainsi, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\underline{r_i(A) \leqslant |a_{i,i}|}$

Donc d'après 8) $\boxed{A \text{ est inversible}}$

**e)** "$m > \frac{1}{2}$" est une condition $\underline{\text{suffisante}}$

---

**IV.13)a)** Comme $\lambda \in Sp(A)$, fixons $p \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|\lambda - a_{p,p}| \leqslant 1 - a_{p,p}$$

On a $|\lambda - a_{p,p}| = |\cos\theta - a_{p,p} + i\sin\theta|$

$$= \sqrt{(\cos\theta - a_{p,p})^2 + \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta + a_{p,p}^2 - 2\cos\theta\, a_{p,p} + \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos\theta\, a_{p,p} + a_{p,p}^2}$$

donc $\sqrt{1 - 2\cos\theta\, a_{p,p} + a_{p,p}^2} \leqslant 1 - a_{p,p}$

donc $1 - 2\cos\theta\, a_{p,p} + a_{p,p}^2 \leqslant 1 - 2a_{p,p} + a_{p,p}^2$ car $(\cdot)^2$ est croissante.

sur $\mathbb{R}_+$

donc $-2\cos\theta\, a_{p,p} \leqslant -2a_{p,p}$

or $a_{p,p} \geqslant m > 0$ donc $-2a_{p,p} < 0$

donc $\cos\theta \geqslant 1$

donc $\boxed{\cos\theta = 1}$

~~**e)** On a $|\lambda| = \mathrm{Re}(\lambda)$ donc $\lambda \in \mathbb{R}_+$~~

~~On en déduit que $\boxed{\lambda = 1}$~~

?

---

**V.14**

On raisonne par l'absurde et on fixe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\alpha_{i_0} < \beta_{i_0}$

On a $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i + \alpha_{i_0}$$

Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \leqslant \beta_i$ donc $$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i \leqslant \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \beta_i$$

Comme $\alpha_{i_0} < \beta_{i_0}$

on a $$\alpha_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i < \beta_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i \leqslant \beta_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \beta_i$$

Donc on a $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

Absurde

Donc $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \ \alpha_i = \beta_i}$

---

## V.15)a)

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $A^T V = V$,

On a $$V_i = \sum_{j=1}^{n} A^T_{i,j} \, V_j$$

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \, V_j$$

Donc $$|V_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} V_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{j,i}| |V_j|$$

Donc on a bien $$\boxed{|V_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |V_j|}$$

---

## V.15)b)

On a $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |V_j| = \sum_{j=1}^{n} |V_j| \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |V_j| \quad \text{car } \sum_{i} a_{j,i} = 1 \quad \forall j \in [\![1,n]\!]$$

On pose, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\beta_i := \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |V_j|$

On a $$\underline{\sum_{i=1}^{n} |V_i| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i}$$

Et $\underline{\forall i \in [\![1,n]\!],\ |V_i| \leqslant \beta_i}$

4/6

Donc d'après 14), $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|V_i| = \beta_i$

ie $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |V_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |V_j|}$

## V.16

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ on a $|V_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |V_j|$

Comme $V \neq 0_{n,1}$, fixons $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $|V_{j_0}| > 0$.

On a $|V_i| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} a_{j,i} |V_j| + a_{j_0 i} |V_{j_0}|$

Or $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $a_{j,i} > 0$

donc $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} a_{j,i} |V_j| \geq 0$ et $a_{j_0,i} |V_{j_0}| > 0$

On déduit donc $|V_i| \geq a_{j_0,i} |V_{j_0}| > 0$

Donc $|V_i| > 0$

Ainsi, $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \ |V_i| > 0}$

## V.17

Montrons que $\bar{A} |V| = |V|$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a $|V|_i = |V_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} |V_j|$

$$= \sum_{j=1}^{n} A^T[i,j] \, |V_j|$$

$$= (A^T |V|)_i$$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \ |V|_i = (A^T |V|)_i$

Donc $|V| = A^T |V|$

Donc $\boxed{|V| \in E_1(A^T)}$

---

V.1)a)

• Existence :

Déjà, on a $A^T |V| = |V|$.

De plus comme $\forall i \in [\![1,n]\!], |V_i| \geq 0$, on a $\sum_{i=1}^{n} |V_i| \geq 0$

On considère donc $\Omega := \dfrac{|V|}{\sum_{i=1}^{n} |V_i|}$

On a $A^T \Omega = \Omega$

Et $\sum_{i=1}^{n} \Omega_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{|V_i|}{\sum_{k=1}^{n} |V_k|} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |V_i|}{\sum_{i=1}^{n} |V_i|} = 1$

Ainsi, $\underline{\Omega \text{ convient}}$

D'où l'existence

• Unicité :

Soit $W \in E_1(A^T)$ tq $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Déjà, comme $(\Omega, W)$ est liée et $\Omega \neq 0$,

écrivons $W = \lambda \Omega$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

On a $\sum_{i=1}^{n} w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \omega_i$

Donc $1 = \lambda . 1$

Donc $\underline{W = \Omega}$.

D'où l'unicité

D'où le résultat

---

**VI.19)** . On pourrait ~~montrer par récurrence que $\forall \ell \in [\![1, n]\!]\ 0 \leq U_\ell \leq \lambda^\ell U_0$~~

Or $\lambda < 1$ donc $\lambda^\ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0$

Et $U_\ell \geq 0$

Donc par encadrement, $\boxed{U_\ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0}$

~~faites-le~~

**VI.20)** Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

On a $m(X) \leqslant x_i \leqslant M(X) = m(X)$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = m(X)$.

Donc $\boxed{X = m(X)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}}$

---

**VI.21)** Soit $\ell \in \mathbb{N}$. On a $A^\ell \in ST(n)$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\sum_{j=1}^{n} C_{(i,j)}[A_\ell] = 1$ car $A^\ell \in ST(n)$

---

**VI.22)a)** · Soit $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

· Montrons que $m(Y) \leqslant m(AY)$

Fixons $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $x_{i_0} = m(Y)$.

$a_{i_0,j}$

On a $AY[x_{i_0}] = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$

$j$

Bof

Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $a_{i,j} \geqslant 0$ donc $a_{i_0,j} x_j \geqslant a_{i_0,j} x_{i_0}$

donc $AY[x_{i_0}] \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_{i_0}$

Donc $AY[x_{i_0}] \geqslant x_{i_0} \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}$

Donc $AY[x_{i_0}] \geqslant x_{i_0}$

F

Comme $m(AY) \geqslant AY[x_{i_0}]$

5/6

On a bien $\underline{m(AY) \geq m(Y)}$

- Montrons que $M(AY) \leqslant M(Y)$

De même,

Fixons $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $x_{i_0} = M(Y)$

On a, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $AY[i] = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leqslant x_{i_0} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $AY[i] \leqslant x_{i_0}$.

Donc $\underline{M(AY) \leqslant M(Y)}$. Comme $m(AY) \leqslant M(AY)$, on obtient $\boxed{m(Y) \leqslant m(AY) \leqslant M(AY) \leqslant M(Y)}$

---

**VI.22.f)** Soit $\ell \in \mathbb{N}$. On a $m(A^{\ell+1}Y) = m(A(A^{\ell}Y)) \geqslant m(A^{\ell}Y)$

On a $M(A^{\ell+1}Y) = M(A(A^{\ell}Y)) \leqslant M(A^{\ell}Y)$

On déduit que $\underline{(m(A^{\ell}Y))_{\ell \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

$\underline{(M(A^{\ell}Y))_{\ell \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

---

**VI.23)** - Déjà, comme $A \in ST^*(n)$, $\underline{d > 0.}$

- Montrons donc que $d \leqslant \frac{1}{2}$.

Déjà, si $n = 1$, on a $A = (1)$ donc $\underline{d > \frac{1}{2}}$

- Sinon, on suppose $n \geqslant 2$. On raisonne par l'absurde et on suppose $d > \frac{1}{2}$

Alors, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \geq n \cdot \frac{1}{2}$

Comme $n \geq 2$, on a donc $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 1$.

C'est absurde car $A \in ST(n)$

donc $\underline{d \leq \frac{1}{2}}$

donc $\boxed{0 < d \leq \frac{1}{2}}$

---

VI.2)a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

On a $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \leq d \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j$

Donc $M(y) - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \geq M(y) - d \sum_{j=1}^{n} y_j$

Donc $M(y) - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \geq d \sum_{j=1}^{n} M(y) - y_j$

Echec

C'était la $d^{\circ}$ la $\oplus$ dure...

AR

**VI.24.c)** Comme $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j = AY[i]$ pour $i \in [1,n]$

et que $\exists i \in [1,n]$ tq $M(AY) = AY[i]$,

On a $M(Y) - M(AY) \geq d(M(Y) - m(y))$

donc $M(AY) \leq dm(Y) - dM(y) + M(y)$

$$\boxed{M(AY) \leq dm(Y) + (1-d)M(y)}$$

---

**VI.25.~~c~~d)** On a $M(AY) \leq dm(Y) + (1-d)M(Y)$

$m(AY) \geq dM(Y) + (1-d)m(y)$

donc $M(AY) - m(AY) \leq dm(Y) + (1-d)M(Y) - dM(Y) - (1-d)m(y)$

donc $M(AY) - m(AY) \leq (1-2d)M(Y) + (2d-1)m(y)$

donc $M(AY) - m(AY) \leq (1-2d)(M(Y) - m(y))$

---

**VI.26.a)** Comme $d \in ]0, \frac{1}{2}]$, on a $0 \leq 1-2d < 1$.

On pose $\lambda := 1-2d$ et on a, pour $\ell \in \mathbb{N}$,

$M(A^{\ell+1}Y) - m(A^{\ell+1}Y) \leq \lambda(M(A^{\ell}Y) - m(A^{\ell}Y))$ avec $\lambda \in [0,1[$

De plus, $M(A^\varepsilon Y) \geq m(A^\varepsilon Y)$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{N}$ donc $M(A^\varepsilon Y) - m(A^\varepsilon Y) \geq 0$ $\forall \varepsilon$

D'après 19), on a donc $M(A^\varepsilon Y) - m(A^\varepsilon Y) \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{} 0$

Comme $(M(A^\varepsilon Y))_\varepsilon$ est décroissante et $(m(A^\varepsilon Y))_\varepsilon$ croissante, on déduit que ces $\boxed{\text{suites sont adjacentes}}$

---

**VI.26) b)** On pose $\ell_Y := \lim\limits_{\varepsilon \to \infty} m(A^\varepsilon Y) = \lim\limits_{\varepsilon \to \infty} M(A^\varepsilon Y)$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

On a, $\forall \varepsilon \in \mathbb{N}$, $m(A^\varepsilon Y) \leq (A^\varepsilon Y)[i] \leq M(A^\varepsilon Y)$

or $m(A^\varepsilon Y) \to \ell_Y$ et $M(A^\varepsilon Y) \to \ell_Y$

donc par encadrement, $\boxed{(A^\varepsilon Y)[i] \longrightarrow \ell_Y}$

---

**VI.27) a)** Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on a $(A^\varepsilon \mathcal{E}_j)[i] = c_{(i,j)}[A^\varepsilon]$

pour $j \in [\![1, n]\!]$, on fixe donc $\ell_j \in \mathbb{R}$ tq $\ell_j = \lim (A^\varepsilon \mathcal{E}_j[i])$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

On pose $W = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$

Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a donc $\lim\limits_{n \to \infty} A^\varepsilon[i,j] = \lim\limits_{n \to \infty} (A^\varepsilon \mathcal{E}_j[i]) = \ell_i$

Donc $W$ convient

De plus, comme la limite est unique,

on obtient également son unicité.

6/6

Donc on a bien montré l'existence d'une unique matrice vérifiant ces propriétés.

---

**VI.27) c)** On a $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} \lim_{n\to\infty} (A^\ell \varepsilon_i [1])$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A^\ell \varepsilon_i [1]$$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \sum_{i=1}^{n} C_i (A^\ell) [1]$$

TB

$$= \lim_{\ell\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A^\ell [1,i]$$

Or $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $A^\ell \in ST(n)$

Donc $\sum_{i=1}^{n} A^\ell [1,i] = 1 \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$

Donc $\boxed{\sum_{i=1}^{n} w_i = 1}$

---

FIN