Chapitre 10

Systèmes linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_2 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

Système linéaire de n équations à p inconnues

Les systèmes linéaires sont omniprésents en mathématiques ; il se trouve (bonne nouvelle) qu'on sait les résoudre, à la fois théoriquement et algorithmiquement. L'objectif de ce chapitre est de présenter les propriétés de ces systèmes et de s'entraîner à les résoudre.

On verra également comment ces techniques de résolution de systèmes permettent de « réduire » les matrices en les mettant sous une forme normale, appelée « forme échelonnée réduite ».

Chapitre 10 : Systèmes linéaires

On sait résoudre le système $\begin{cases} 2x-5y=8 \\ x+y=10 \end{cases}$

ie on sait mq :

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 2x-5y=8 \\ x+y=10 \end{matrix}\right\} = \left\{\left(\frac{58}{7},\frac{12}{7}\right)\right\}$$

But : obtenir le m̂ genre de résultat pour des systèmes de n équations à p inconnues

Dans ce chapitre :

. $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

. $n, p \in \mathbb{N}^*$

I, Matrices

1) Matrices

Déf : . Une matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes

. L'ensemble de ces matrices est noté $M_{np}(\mathbb{K})$

Rq : Par convention, si $M \in M_{np}(\mathbb{K})$, on notera m_{ij} le coefficient de M en ligne i et en colonne j

On note $M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$

Astuce

On se dit "i ligne; j colonne"

Ex : Notons $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in M_{\text{ligne colonne}}(\mathbb{R})$

ie $M \in M_{24}(\mathbb{R})$

On a :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ m_{31} & \vdots & & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

Rq : on note $M_{np}(\mathbb{K})$ ou $M_{n,p}(\mathbb{K})$

. On a $M_{np}(\mathbb{R}) \subset M_{np}(\mathbb{C})$
ie : une matrice réelle est en particulier une matrice complexe

ex : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$

De m, on définit $M_{np}(\mathbb{Z})$, $M_{np}(\mathbb{Q})$

On peut aussi définir $M_{np}(\mathbb{K}[X])$

ex : $\begin{pmatrix} X & X^2 - 2X + 8 \\ -1 & 3X \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}[X])$

Si $n = 1$, on dit que M est une matrice ligne

ex : $(1\ 2\ 3\ 4) \in M_{1,4}(\mathbb{R})$

Si $p = 1$, on dit que M est une matrice colonne

ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$

$M_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n entrées

On a : $M_{n,1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall i,\ x_i \in \mathbb{R} \right\}$

Si $n = p$, on dit que M est carrée de taille n

On note $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$

2) Addition

$M_{np}(\mathbb{K})$ est munie d'une loi notée $+$ et définie par :

$$(M+N) := (m_{ij} + n_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{où } M, N \in M_{np}(\mathbb{K})$$

ex : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 3-2 \\ 4+4 & 5-2 & 6+7 \end{pmatrix}$

Fait : $(M_{np}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.

L'inverse de M est notée $-M$
On a $-M = (-m_{ij})_{i,j}$

On note $O_{n,p}$ la matrice nulle dont tous les coeffs. sont nuls

ex : $O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note $O_n := O_{n,n}$

Bilan : la somme de matrices se fait coeff par coeff.

⚠ On verra que ce n'est pas du tout le cas pour le produit

3) Extraction de lignes et de colonnes

Notation : Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ (ie i = indice de ligne)

On note $L_i(M)$ la i-ième ligne de M
On a $L_i(M) \in M_{1,p}(\mathbb{K})$

. Si $j \in [\![1, p]\!]$ (ie j est un indice de colonne)

On note $C_j(M)$ la j-ième colonne de M
On a $C_j(M) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

Bilan :

On dispose de $L_i : M_{np}(\mathbb{K}) \to M_{1,p}(\mathbb{K})$
et de $C_j : M_{np}(\mathbb{K}) \to M_{n1}(\mathbb{K})$

pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$

Fait :

1) $C_j(M+N) = C_j(M) + C_j(N)$
si $j \in [\![1,p]\!]$ et si $M, N \in M_{np}(\mathbb{K})$

2) $C_j(0_{np}) = 0_{n,1}$ si $j \in [\![1,p]\!]$

3) De même pour les lignes

4) Matrice X colonne

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$
Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

On a une certaine compatibilité entre les indices

$$M_{np}(\mathbb{K}) \times M_{p1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K})$$

On définit le produit MX par :

1°) $MX \in M_{n,1}(\mathbb{K})$
2°) Si $i \in [\![1,n]\!]$, on a
$$(MX)_i := \sum_{j=1}^{p} m_{i,j}\, x_j$$

Schéma :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ m_{n,1} & \cdots & & m_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

ligne i

$$(MX)_i = m_{i1} x_1 + m_{i2} x_2 + \dots + m_{ip} x_p$$

Notation :

Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on note

$$u_A : M_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$$
$$X \longmapsto AX$$

u_A est appelée : application linéaire canoniquement associée à A (ALCA à A)

Exemple :

On note

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

On a

$$u_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

et $$u_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Fait : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

1) $\forall X, Y \in M_{p,1}(\mathbb{K}),\ u_A((X+Y)) = u_A(X) + u_A(Y)$

2) $u_A(0_{p,1}) = 0_{n,1}$

II, Echelonnement de matrices

1) Opérations élémentaires

Soit $M \in M_{np}(\mathbb{K})$

But : transformer M à l'aide d'opérations élémentaires en une matrice qui aura beaucoup de zéros (on parle de matrice "creuse")

ex :

si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

après transformation, on aura la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ elle est échelonnée

Les opérations élémentaires

a) Echange

Si $i, j \in [\![1, n]\!]$, on peut échanger $L_i(M)$ et $L_j(M)$
On note $L_i \leftrightarrow L_j$

b) Dilatation

Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et si $i \in [\![1, n]\!]$, on peut remplacer $L_i(M)$ par $\alpha L_i(M)$

On note $L_i \leftarrow \alpha L_i$

c) Transvection

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et si $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on ajoute à la i-ème ligne $L_i(M)$ la ligne $\alpha L_j(M)$

On note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

2) Matrices équivalentes par ligne

<u>Déf :</u> Soient $M, M' \in M_{np}(\mathbb{K})$

On dit que M est équivalente par lignes à M' et on note $M \sim_L M'$

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ on peut obtenir M' à partir de M à l'aide d'opérations élémentaires

<u>Remarque :</u> "$\sim_L$" est une relation d'équivalence

a) "$\sim_L$" est réflexive : $\forall M,\ M \sim_L M$

b) "$\sim_L$" est transitive : Soient $M_1, M_2, M_3 \in M_{np}(\mathbb{K})$

tq $M_1 \sim_L M_2$ et $M_2 \sim_L M_3$

Mq $M_1 \sim_L M_3$

On a $M_1 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_k} M_2$

et $M_2 \xrightarrow{b_1} \cdots \xrightarrow{b_l} M_3$

Donc, en appliquant à M_1 les opérations $a_1, a_2 \dots a_k$ puis $b_1, \dots b_l$, on obtient M_3

c) $\sim_L$ est symétrique

Soient $M_1, M_2 \in M_{np}(\mathbb{K})$ tq $M_1 \sim_L M_2$

On a $M_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_k} M_2$

Les opérations élémentaires sont réversibles :

- $L_i \longleftrightarrow L_j$ "annule" $L_i \longleftrightarrow L_j$
- $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$ — $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$ — $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

3) Matrices échelonnées

Déf : Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

On dit que M est échelonnée (par lignes) ssi

1) si une ligne de M est nulle, toutes les lignes suivantes de M sont nulles

2) à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le 1er coeff. non nul (de cette ligne) est situé "strictement à droite" du 1er coeff non nul de la ligne précédente

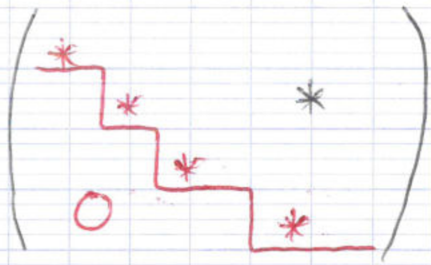
Ex : Voici $M \in M_{4,6}(\mathbb{R})$ échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

pivot

(?) 15.1

Dessin : M échelonnée est de la forme



(?) donner une formule quantifiée pour M échelonnée

Déf (suite) :

Dans ce cas, on appelle pivots de M, chaque premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle

Fait : Soit $M \in M_{np}(\mathbb{K})$ échelonnée
Notons r le nb de pivots de M
alors, on a :

1) $r \leqslant n$
2) $r \leqslant p$

⚠ $2r \leqslant n+p \not\Rightarrow \begin{cases} r \leqslant n \\ r \leqslant p \end{cases}$

Ie, on a : $r \leqslant \min(n,p)$

Démo : . Il y a au plus un pivot par lignes
. Comme M est échelonnée, deux pivots ne peuvent pas être sur la même colonne. Donc, il y a au plus un pivot par colonne

3) réflexe : $\begin{cases} x \leqslant a \\ x \leqslant b \end{cases} \Rightarrow x \leqslant \min(a,b)$

démo :

$\Leftarrow$ On a $\min(a,b) \leq a$ par déf

donc $x \leq \min(a,b) \Rightarrow x \leq a$

de m̂ pour b

$\Rightarrow$ Par disjonction de cas

Rq : $\min(a,b) := \begin{cases} a \text{ si } a \leq b \\ b \text{ si } b < a \end{cases}$

donc, c'est une nécessité métamathématique de montrer $\Rightarrow$ par disjonction de cas

Rq : On a $r = 0 \Leftrightarrow M = 0_{n,p}$

Exemple : (exo 15.2)

On note $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

Échelonnons A

(ie mq $\exists M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \begin{cases} M \text{ échelonnée} \\ M \sim_L A \end{cases}$

On a :

$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ "on tue le 5" $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$

"on simplifie la ligne 2"

$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow \dfrac{L_2}{-4}$

$$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -16 \end{pmatrix}$$ "on tue le 9"
$L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ "on tue le -8"
$L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2$

Théorème : (Algorithme de Gauss - Jordan)

Toute matrice est échelonnable

Ie $\forall M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \exists M' \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) : \begin{cases} M' \text{ échelonnée} \\ M' \sim_L M \end{cases}$

Démo : On procède par récurrence imbriquée

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

P_n : "$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, M échelonnable"

$n = 1$. Mq $P(1)$ est vraie

Réflexe : c'est une $\forall$-assertion

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, Soit $M \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$

Ie M est une matrice ligne

Elle est déjà échelonnée

Hérédité : Mq $\forall n,\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $P(n)$ soit vraie

(ie je sais échelonner toutes les matrices à n lignes)

Mq $P(n+1)$. Ie. mq $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall M \in \mathcal{M}_{(n+1)p}(\mathbb{K})$, M échelonnable

On raisonne par récurrence

Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$Q(p)$: " $\forall M \in M_{(n+1),p}(\mathbb{K})$, M échelonnable "

Mq $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $Q(p)$ par récurrence

Initialisation : $p = 1$

Q c'est une $\forall$- assertion

Soit $M \in M_{n+1,1}(\mathbb{K})$. Echelonnons M

On écrit : $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ où $\forall i$, $a_i \in \mathbb{K}$

On distingue deux cas

1er cas : $M = 0_{n+1,1}$: elle est échelonnée

2ème cas : $M \neq 0_{n+1,1}$

!! reformulation Ie $\exists i_0 \in [\![1, n+1]\!]$: $a_{i_0} \neq 0$

fixons un tel i_0 : ce sera notre pivot

On applique à M les opérations :

$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_i}{a_{i_0}} L_{i_0}$ (on tue le coeff a_i)

pour $i \neq i_0$

On obtient la matrice : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_{i_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i_0$ - ième ligne

Puis, on fait $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$

On obtient une matrice échelonnée.

Hérédité

Mq $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ Q(p) \Rightarrow Q(p+1)$
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tq $Q(p)$ est vraie
Mq $Q(p+1)$

Bilan :
- je sais échelonner toutes les matrices à n lignes ($P(n)$ est vrai)
- je sais aussi échelonner toutes les matrices à $(n+1)$ lignes et à p colonnes ($Q(p)$ est vraie)

C'est une $\forall$-assertion
Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1,p+1}(\mathbb{K})$
On veut échelonner M

? Preuve de Anass :

on écrit $M = \left(\begin{pmatrix} M' \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vdots \end{array} \right)$

j'échelonne M', j'obtiens :

$$\left(\begin{array}{c|c} M'' & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \end{array} \right)$$

, on regarde les lignes L_i tq $L_i(M'') = 0_{1,p}$

ie on écrit
$$\left(\begin{array}{c|c} M'' & \begin{matrix} * \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix}} \end{array} \right)$$

$C \in \mathcal{M}_{n',1}(\mathbb{K})$ où $n' := (n+1) - r$
où $r := \#$ pivots dans M''

Par récurrence forte, on échelonne C

On commence par s'occuper de la 1ère colonne

On distingue deux cas :

1er cas : Si $C_1(M) = 0_{n+1,1}$: on écrit $M = \begin{pmatrix} 0 & \\ | & M' \\ 0 & \end{pmatrix}$

avec $M' \in M_{n+1,p}(\mathbb{K})$

Grâce à $Q(p)$, on échelonne M' en A'

En appliquant les m̂ opérations à M toute entière,

on obtient $\begin{pmatrix} 0 & \\ | & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$ qui est échelonnée

2e cas : Si $C_1(M) \neq 0_{n+1,1}$

Soit $i_0 \in [\![1, n+1]\!]$ tq $m_{i_0,1} \neq 0$

On effectue :

1°) pour $i \neq i_0$, $L_i \leftarrow L_i - \frac{m_{i,1}}{m_{i_0,1}} L_{i_0}$

2°) puis $L_{i_0} \leftrightarrow L_1$

!! ⚠ On ne peut pas écrire :

$\boxed{\text{On note } \forall i \in \mathbb{N}, u_i := V_i}$

On a donc M équivalente à une matrice qu'on écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c} m_{i_0,1} & \\ 0 & M' \\ | & \\ 0 & \end{array}\right)$$

On écrit cette matrice :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} m_{i_0,1} & * \text{---} * \\ 0 & \boxed{M''} \\ | & \\ 0 & \end{array}\right)$$

On a $M'' \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On échelonne M'' en A'' d'après $P(n)$.

En appliquant les m̂ opérations à A, on obtient une matrice échelonnée :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} m_{i_0,1} & * & — & * \\ 0 & & & \\ | & & A'' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$ qui est échelonnée

Ainsi, $Q(p+1)$ est vraie

Donc, l'hérédité est vraie

Donc, $\underbrace{\forall p \in \mathbb{N}^*, Q(p)}_{\text{c'est } P(n+1)}$ est vraie

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

D'où le résultat

4) Matrices échelonnées réduites

Déf: Soit $M \in M_{np}(\mathbb{K})$ échelonnée.

On dit qu'elle est réduite $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

1) tous les pivots sont égaux à 1
2) les pivots sont les seuls coeffs $\neq 0$ sur leur colonne

Ex: On note $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

On a $M \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On tue le 2

$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite

Théo-définition :

Soit $M \in M_{np}(\mathbb{K})$
alors $\exists!\, A \in M_{np}(\mathbb{K})$: $\begin{cases} M \sim A \\ A \text{ est échelonnée réduite} \end{cases}$

Cette unique matrice A est appelée la matrice réduite échelonnée de M.

Démo :

Existence : cf exemple
Unicité : admis

III. Résolution des systèmes linéaires

1) Définition / Notation des systèmes

Non-ex :

- $x^2 = 2$ (en x)
- $\cos(x) = x$ (en x)
- $x^2 + y = 1$ (en x, y)

ne sont pas linéaires

exemples :

- $x + y = 1$ (en x, y)
- $2x + 3 = 4$ (en x)
- $x + 2y + 3z = -4$ (en x, y, z)

sont des équations linéaires

Soit $(b_1, \dots b_n) \in \mathbb{K}^n$

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathbb{K}^{[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$

On considère le système de n équations linéaires en les p inconnues : $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{K}$

$$(E) \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,p} x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,p} x_p = b_n \end{cases}$$

Déf : . Une solution de (E) est un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que (E) est vérifiée

. L'ens des solutions de (E) est noté $S_{(E)}$

. Le 2^{nd} membre de (E) est $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

. On dit (E) est homogène $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ "il est sans second membre"
ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall i \in [\![1,n]\!], b_i = 0$

. Le système homogène associé à (E), noté (E_h) est obtenu en remplaçant dans (E) les b_i par 0

. On dit que (E) est compatible $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ (E) admet au moins une solution ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $S_{(E)} \neq \emptyset$

Ex : $\begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$ 2 équations, 1 inconnues $\begin{pmatrix} n = 2 \\ p = 1 \end{pmatrix}$

est incompatible

Fait :

(E) homogène $\Rightarrow$ (E) compatible

démo : En effet si (E) homogène, on a $(0,\dots,0) \in S_{(E)}$

Rq : (E) compatible $\not\Rightarrow$ $n = p$

Exemple : . $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$ ici : $n > p$

. (E) : $\{ x + y = 1$ $\begin{pmatrix} n = 1 \\ p = 2 \end{pmatrix}$ on a $(0,1) \in S_{(E)}$

On garde ces notations pour la suite

2) Interprétation matricielle d'un système

Déf : 1) La matrice associée à (E) est $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $A = (a_{i,j})_{i,j}$

2) La matrice augmentée associée à (E) est la matrice

$$\tilde{A} := \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \end{array} \right) \in M_{n,(p+1)}(\mathbb{K})$$

Exemple :

si (E) $\begin{cases} x - 2y + 3z - t = 2 \\ 4x + y - z + 8t = 1 \\ x - 3z = 8 \end{cases}$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{et } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Soient $x_1, \dots x_p \in \mathbb{K}$.

On note $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

et $B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

Prop : !!! Correspondance systèmes $\leftrightarrow$ matrices

On a $AX = B \iff (x_1, \dots, x_p) \in S_{(E)}$

Rq : collège : $ax = b$

prépa : $AX = B$

mais $x \in \mathbb{R}$; $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

démo : ?

3) Utilisation d'une solution particulière pour résoudre un système

Prop : Soit $(X_1, \dots X_p) \in S_{(E)}$. On dit que c'est une solution particulière

1) Soit $(X_1', \dots, X_p') \in S_{(E)}$

alors $(X_1 - X_1', X_2 - X_2', \dots, X_p - X_p') \in S_{(E_h)}$

2) Les solutions de (E) sont de la forme $(x_1, \dots, x_p) + (X_1, \dots, X_p)$ où $(x_1, \dots, x_p) \in S_{(E_h)}$

Bilan : Si j'ai une solution de (E), pour trouver toutes les solutions de (E), il me suffit de résoudre (E_h)

Ie $S_{(E)} = \left\{ (x_1, \dots, x_p) + (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_p) \;\middle|\; (x_1, \dots, x_p) \in S_{(E_h)} \right\}$

On écrit : $S_{(E)} = (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_p) + S_{(E_h)}$

démo :

1) On note $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

et $\mathcal{X}' := \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

On a : $A\mathcal{X} = B$ et $A\mathcal{X}' = B$

donc $A(\mathcal{X} - \mathcal{X}') = A\mathcal{X} - A\mathcal{X}' = B - B = O_{n,1}$

ainsi $(x_1 - x_1', \dots, x_p - x_p') \in S_{(E_h)}$

2) On a :

$$\begin{aligned} AX = B &\iff AX = A\mathcal{X} \\ &\iff A(X - \mathcal{X}) = O_{n,1} \\ &\iff (x_1 - \mathcal{X}_1, \dots, x_p - \mathcal{X}_p) \in S_{(E_h)} \end{aligned}$$

4) Résolution des systèmes

Remarque fondamentale : si j'applique à (E) des opé. élémentaires, j'obtiens un système équivalent, qui a donc les m̂ solutions

Schéma

$$(E) \longrightarrow \underset{\in M_{n,p}(\mathbb{K})}{A} \xrightarrow[]{\text{échelonn}^t + \text{réduction}} \underset{\text{échelonnée réduite}}{B} \longrightarrow (E') : \text{système associé à } B$$

1) $S_{(E)} = S_{(E')}$

2) Comme B est échelonnée réduite, $S_{(E')}$ est réduite

Exemple : modèle de rédaction (A au "sort")

On considère :
$$(E) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 6y + 7z = 0 \\ 9x + 10y + 11z = 0 \end{cases}$$

On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

On a $A \sim_L \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

On a donc $(E) \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$

Conclusion :

On a $S_{(E)} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\}$

Ici, on a une ∞té de solu° paramétrées par un réel

On note aussi :

$$S_{(E)} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rq : $S_{(E)}$ est ∞, paramétré par 1 réel
On dira + tard (⚠ ds le cas homogène)
que $S_{(E)}$ est de dimension 1

Déf : $A \in M_{np}(\mathbb{K})$
On note A' la réduite échelonnée de A
. On appelle rang du système (E) le nombre de pivots de A'

. On appelle inconnues principales celles qui correspondent aux colonnes ayant un pivot (ie un 1)

. On appelle inconnue auxiliaire / secondaire les autres inconnues

Rq : la forme échelonnée réduite nous donne de façon "gratuite" l'expression des inconnues principales en fct des inconnues secondaires (auxiliaires)

Théorème

Soit (E) un système de n équations à p inconnues dont on note r le rang

1) Si $r = n = p$ alors :

a) la matrice échelonnée réduite de A est I_n

b) (E) possède une unique solution

c) on la trouve en lisant la dernière colonne de la matrice augmentée réduite échelonnée

2) Si $r = n < p$ alors:

$S_{(E)}$ est infini paramétré par $(p-n)$ réels

3) Si $r < n$ alors :

a) A' se termine par des lignes nulles

b) Si on note : B' la matrice obtenue en réduisant-échelonnant la matrice "A" à l'intérieur de "$\widetilde{A}$" (matrice augmentée) alors, on a :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{matrix}}_{A'} & \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \vdots \end{matrix}\right\} r \text{ lignes} \\ \left.\begin{matrix} \widetilde{b}_{r+1} \\ \widetilde{b}_n \end{matrix}\right\} n-r \text{ lignes nulles} \end{matrix} \end{array}\right)$$

c) (E) est compatible $\Leftrightarrow \forall i \geqslant r+1, \ \widetilde{b}_i = 0$

les $(n-r)$ dernières lignes de B sont appellées les équations de compatibilité de (E)

d) Si (E) est compatible

- si $r = p$: il y a une uniq solution
- si $r < p$: $S_{(E)}$ est infini paramétré par $(p-r)$ réels

Ex : Résoudre (E) $\begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

On note

$$\widetilde{A} := \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

On a $\hat{A} \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$\sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$\sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3$

$\sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$\sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$

modèle de rédaction

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$
$\in \mathbb{C}$

On a $(E) \iff \begin{cases} x + 2t = 3 \\ y = 0 \\ z - t = -1 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 0 \\ z = -1+t \\ t = t \end{cases}$$

donc, l'ensemble des solutions de (E), noté $S_{(E)}$, est :

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{pmatrix} 3-2t \\ 0 \\ -1+t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} t \in \mathbb{R} \\ \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}$$

Tanguy Segond

Matrices

matrices échelonnées

$\# \text{pivots} \leq \min(n,p)$

pivots

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M.é. réduites

- pivots : seuls coeffs $\neq 0$ sur leur colonne
- pivot $= 1$

unique !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

algorithme de Gauss-Jordan :

pour toute matrice, il existe une matrice échelonnée équiv. $\sim_L$ à la 1ère.

démo : récurrence imbriquée

1) sur n

hérédité $\rightarrow$ 2) sur p

$L_i \leftarrow L_i - \frac{m_{i,1}}{m_{i_0,1}} L_{i_0} \Rightarrow$ tuer les coeffs

Systèmes linéaires

$AX = B \iff \overbrace{(x_1, \dots x_p)}^{X} \in S_{(E)}$

$(x_i) \in S_{(E)}, (x'_i) \in S_{(E)} : (x_i - x'_i) \in S_{(EH)}$

$\underbrace{(E) \text{ homogène}}_{b_i = 0} \Rightarrow \underbrace{(E) \text{ compatible}}_{S_{(E)} \neq \emptyset}$

résolution :

$(E) \longrightarrow A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \xrightarrow{\text{échelonne + réduction}} B \xrightarrow{\text{système associé à } B \text{ m solutions que } (E)} (E')$

Deux peuples se disputent une terre.

1949 → Pas d'Etat palestinien car refus de la reconnaissance du plan de partage et de la création d'Israël => la **nakba** : 750 000 Palestiniens se réfugient en Jordanie, à Gaza, en Syrie, au Liban. Interdiction par Israël, pour ces réfugiés, de revenir.

1964 → Création de l'OLP, dirigée par Yasser Arafat Organisation de libération de la Palestine

1967 → **Guerre des Six Jours** : les Palestiniens décident de régler eux-mêmes leur situation => l'OLP lutte : par les armes et le terrorisme.

1972 → **Attentats** aux JO de Munich, condamnés par plusieurs Etats arabes.

1982 → Intervention israélienne au Liban => affaiblit l'OLP qui s'y était installée.

1987-1992 → Les Palestiniens des territoires occupés déclenchent **l'Intifada** => répression => naissance du mouvement palestinien islamiste du Hamas : transpose le conflit sur le terrain religieux et se bat pour la destruction totale d'Israël.

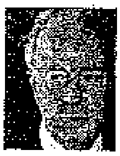
1988 → Yasser Arafat annonce **renoncer au terrorisme**

1990-1995 : les espoirs de paix

1991 → Les Etats-Unis provoquent à **Madrid** une conférence réunissant Israël, pays arabes et Palestiniens / à Oslo : négociations secrètes entre Israéliens et Palestiniens

1993 → **Accords de Washington** en présence de **Yasser Arafat**, **Yitzhak Rabin**, Premier Ministre israélien et **Bill Clinton**, président américain. Reconnaissance mutuelle officielle entre Israël et l'OLP + bases d'un processus de paix

1993-1995 → **Accords d'Oslo** : création d'une **Autorité palestinienne** avec un président (Yasser Arafat) + un gouvernement + un Parlement + transfert par étapes des territoires occupés qui sont divisés en 3 zones A (autonomie palestinienne complète), B ou C (contrôle israélien exclusif) selon le degré d'autonomie par rapport à Israël = processus sur 5 ans. **Rejeté par les extrémistes** des deux bords => **enlisement** du processus + **attentats** du Hamas contre la population civile israélienne.



Remarque : sont laissés à plus tard : le sort des réfugiés palestiniens / le statut de Jérusalem-Est / la question du futur Etat palestinien et de ses frontières / les colonies israéliennes présentes dans les territoires occupés.

Processus bloqué

4/11/1995 → **Assassinat d'Yitzhak Rabin**, un des signataires des accords d'Oslo, par un extrémiste juif.

1996 → Retour au pouvoir du **Likoud** (cofondé par Ariel Sharon) => relance le processus de colonisation dans les territoires occupés.

2000-2005 → **Echec** d'une tentative d'accords à Washington + **seconde intifada**

2001 → **Ariel Sharon** Premier Ministre

2002 → **Barrière de séparation** entre Israël et la Cisjordanie mais qui englobe une partie du territoire revendiqué par les Palestiniens.

2005 → Evacuation de la bande de Gaza par Israël mais poursuite de la **colonisation** en Cisjordanie dont l'autorité palestinienne ne contrôle que 40% (éparses) du territoire.

2006 → Bande de **Gaza** sous le contrôle du **Hamas / la Cisjordanie** dirigée par l'Autorité palestinienne présidée par **Mahmoud Abbas**

2008-2009 → **Attentats suicides** du Hamas + **interventions armées d'Israël** à Gaza => les tensions s'accroissent et bloquent les avancées diplomatiques

2011 → **Echec** de l'Autorité palestinienne de faire admettre la **Palestine** comme un Etat à part entière à **l'ONU** → la Palestine obtient le statut d'observateur à l'ONU

2013 → Tentatives de John Kerry pour lancer un processus de paix => enlisement dès 2014

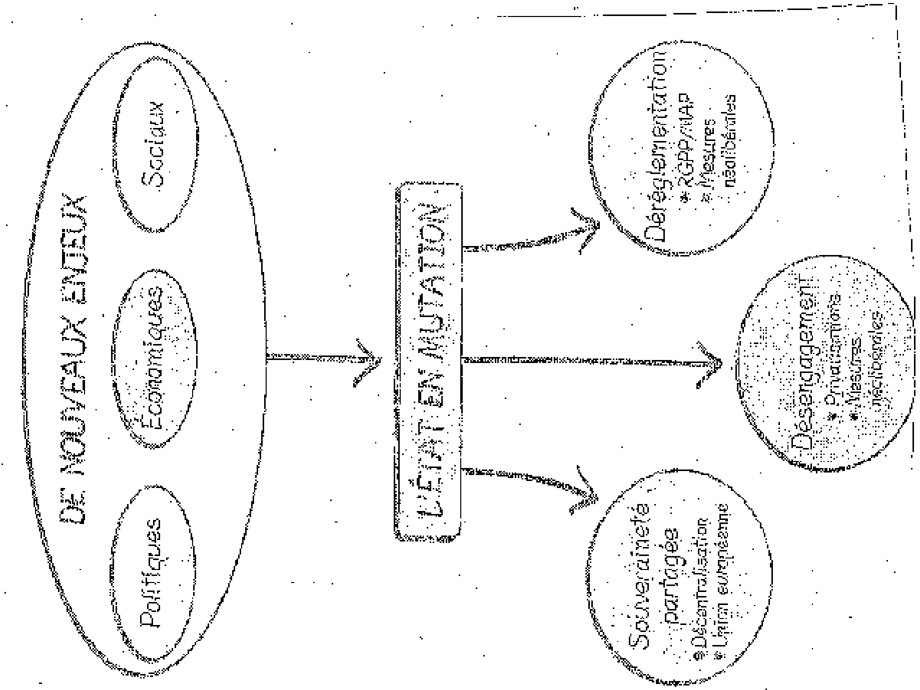
2014 → Réconciliation du Fatah et du Hamas => condamnée par les EU

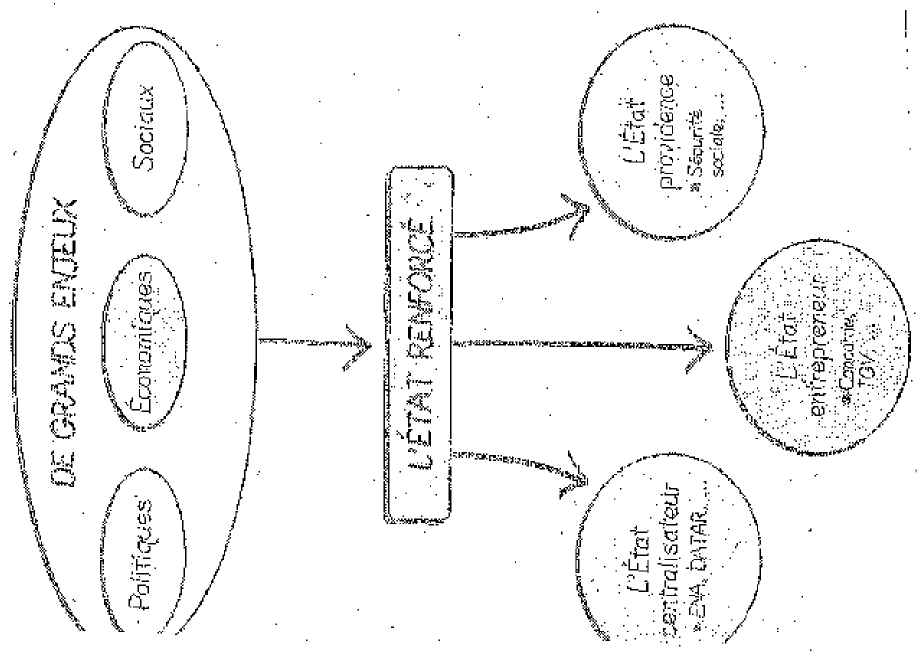
<u>rang r : nb de pivots</u>

Tanguy

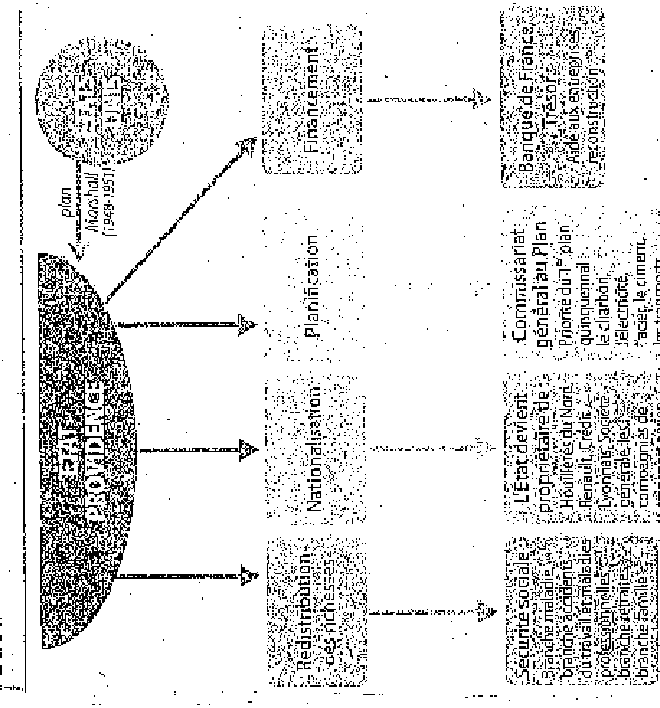
Résolution de systèmes linéaires

- $r = n = p$
  - (E) possède une unique solution
    - ↳ dernière colonne de la matrice augmentée éch. réd
- $r = n < p$
  - $S_{(E)}$ est infini paramétré par $p - n$ réels
- $r < n$
  - (E) compatible $\iff \forall i \geq r+1, \tilde{b}_i = 0$
    - ↳ les dernières lignes de la matrice augmentée éch. réduite sont nulles
  - (E) est compatible :
    - $r = p$: 1 solution
    - $r < p$: infinité de sol. paramétrées par $(p - r)$ réels





L'action de l'État dans la reconstruction



XIIIe-XIXe siècles
L'enracinement de l'État-nation

- Le lien entre l'État, construit à partir du XIIIe siècle, et la nation, définie tardivement, s'affirme en 1789 et s'identifie au régime républicain à la fin du XIXe siècle.
- L'État-nation repose sur les droits du peuple souverain (la Nation) qui doit diriger l'État par l'intermédiaire de ses élus.

1945-1958
Reconstruction et IVe République

- Après la Libération, la reconstruction du pays est assurée par l'endettement de l'État et le plan Marshall (1948-1951).
- La IVe République poursuit l'œuvre du GPRF en renforçant la démocratie.
- L'État renforcé pilote la reconstruction et l'essor économique, subit la décolonisation.
- L'État s'attribue de nouvelles compétences en matière sociale, c'est l'État providence.
- La IVe République est fragilisée par l'instabilité ministérielle et la décolonisation.
- La Ve République est instaurée avec un exécutif fort voulu par De Gaulle en pleine guerre d'Algérie et au cœur de la guerre froide.

1958-années 1970
L'État gaullien

- De 1958 aux années 1970, la France retrouve sa stabilité politique et sa puissance.
- L'État contribue à la modernisation de l'économie et aménage le territoire.
- Sur le plan social et culturel, l'État accompagne les transformations du pays. L'enseignement se démocratise.

Depuis les années 1970
Un État en mutation

- L'État est confronté aux transformations de l'économie mondiale et à de nouvelles formes de contestations sociales.
- L'idéologie néolibérale remet en cause l'État providence.
- L'État alterne austérité et redistribution pour renforcer la compétitivité de l'économie nationale.
- Gauche et droite peinent à lutter contre les effets de la crise : abstention ou vote extrémiste en témoignent.
- L'action de l'État est transformée par la construction européenne et la décentralisation.
- Alternance et réformes constitutionnelles permettent à la Ve République de s'inscrire dans la durée.