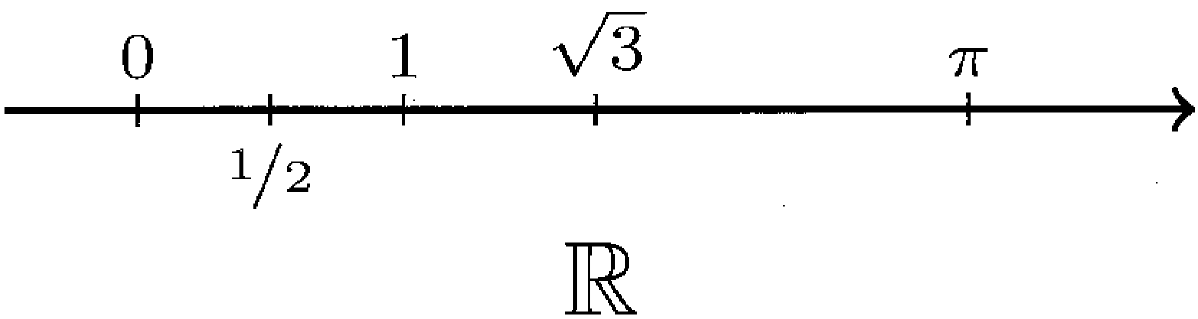
Chapitre 11

Nombres réels



Représentation de quelques nombres sur la droite des nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est un objet central des mathématiques.

C'est l'ensemble de toutes les positions possibles d'un point sur une droite. C'est avec $\mathbb{R}$ qu'on modélise le temps et l'espace. Toutes le grandeurs que l'on mesure en physique sont également des nombres réels.

On sait additionner, soustraire, multiplier et diviser (sauf par 0) des nombres réels entre eux. On sait ordonner deux nombres réels entre eux, dire quel est le plus grand les deux. On sait aussi dire quelle est la distance entre deux nombres réels x et y : il s'agit simplement de $|x-y|$. Ces différentes opérations font de $\mathbb{R}$ un objet mathématique très riche.

On verra dans ce chapitre quelques compléments concernant $\mathbb{R}$: densité, bornes supérieure et inférieure, partie entière et parties convexes.

Chapitre 11 : Nombres réels

I, Construction de $\mathbb{R}$

Fin du XIX^e siècle (De de Kind)

Idée :

1) on construit $\mathbb{N}$

(en de construction de $\mathbb{N}$:

on pose $0 := \emptyset$

$$1 := \{\emptyset\}$$

$$2 := \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$$

$n \in \mathbb{N}$, on pose $(n+1) := \{0, 1, \dots, n\}$)

⚠ on construit $\mathbb{N}$ puis on oublie cette construction c'est une construction ad. hoc, "bricolée pour les besoins du moment"

Bilan : $\mathbb{N}$ = ce qu'on connait depuis la maternelle

ie : la construction de $\mathbb{N}$ est tabou

2) A l'aide de $\mathbb{N}$, on construit $\mathbb{Z}$

3) A l'aide de $\mathbb{Z}$, on construit $\mathbb{Q}$

4) A l'aide de $\mathbb{Q}$, on construit $\mathbb{R}$

Rq : cela se fait avec des classes d'équivalence

Bilan : la construction de $\mathbb{R}$ est admise

II, δ- proximité

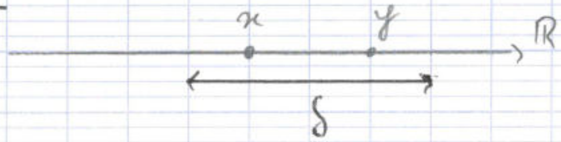
Définition :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et soit $\delta > 0$

On dit que x et y sont δ-proches ssi

$|x - y| \leq \delta$

Dessin :

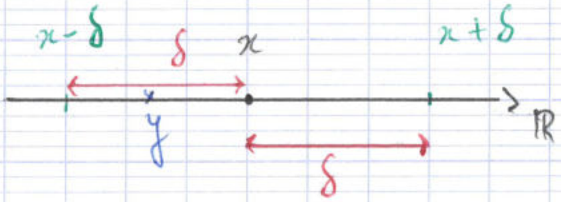


Prop : Soient $x, y \in \mathbb{R}$, et $\delta > 0$

les assertions suivantes sont équivalentes

1) $|x - y| \leq \delta$
2) $x \in [y - \delta \,;\, y + \delta]$
3) $y - \delta \leq x \leq y + \delta$
4) $y \in [x - \delta \,;\, x + \delta]$
5) $x - \delta \leq y \leq x + \delta$

Dessin :



Démo :

. déjà, on a $2) \iff 3)$

. Mq 1) $\Rightarrow$ 3) : osq $|x-y| \leq \delta$
On distingue deux cas : car ! on parle de la valeur absolue
. si $x-y \geq 0$
alors on a : $x-y = |x-y| \leq \delta$
donc $x \leq y+\delta$
de plus $x \geq y$ car $x-y \geq 0$
en particulier $x \geq y \geq y-\delta$
CCL: $y-\delta \leq x \leq y+\delta$

. $2^{\text{ème}}$ cas : si $x-y < 0$

? eno

CCL: on a mq 1) $\Rightarrow$ 3)

. Mq 3) $\Rightarrow$ 1)
Osq $y-\delta \leq x \leq y+\delta$

On a donc $-\delta \leq x-y \leq \delta$ (*)

On distingue deux cas
. si $x-y \geq 0$: On a $|x-y| = x-y \leq \delta$

. si $x-y \leq 0$: on multiplie (*) par -1
On a $\boxed{-\delta \leq y-x \leq \delta}$

On a $|x-y| = y-x \leq \delta$

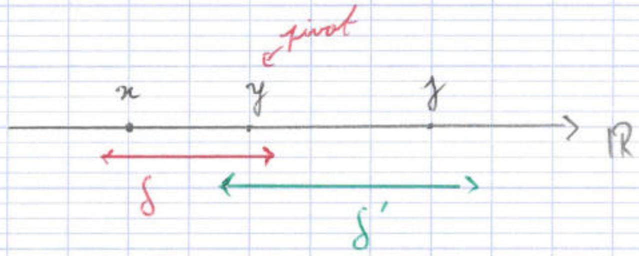
On a donc 1) $\Leftrightarrow$ 3) ($\Leftrightarrow$ 2))

. En échangeant les rôles de x et y : on a 1) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5)

Prop : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $\delta, \delta' > 0$

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ et } y \ \delta\text{-proches} \\ y \text{ et } z \ \delta'\text{-proches} \end{array}\right\} \Longrightarrow x \text{ et } z \text{ sont } (\delta+\delta')\text{-proches}$$

Dessin :



Démo :

Osq x et y δ-proches
y et z δ'-proches

Mq $|x - z| \leq \delta + \delta'$

💡 pour aller de x à z, je passe par y

Je on écrit :

$$\underbrace{z - x}_{\text{de } x \text{ à } z} = \underbrace{z - y}_{\text{de } y \text{ à } z} + \underbrace{y - x}_{\text{de } x \text{ à } y}$$

donc, $|x - z| = |(x-y) + (y-z)|$

💡R* inégalité triangulaire

$$\leq |x-y| + |y-z| \leq \delta + \delta'$$

II, Min, max, inf, sup

$A \subset \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$

1) Majorants, minorants

Déf :

1) Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit M est un majorant de A ssi
$\forall a \in A, \ a \leq M$

2) on note majo(A) l'ens des majorants de A

3) On dit que A est majorée ssi

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq M$$

ie ssi $\text{Majo}(A) \neq \emptyset$

Exemples :

1) $A = [0, 1]$, 2 majore A.
On a $\text{Majo}(A) = [1, +\infty[$

2) On a $\text{Majo}(\mathbb{R}) = \emptyset$

3) On a $\text{Majo}(\emptyset) = \mathbb{R}$

Déf : 1) Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m minore A ssi
$\forall a \in A, \ m \leq a$

2) $\text{Mino}(A) := \{ m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A \}$
3) A minoré ssi $\text{Mino}(A) \neq \emptyset$

2) Max, min

Prop - définition

1) On dit que A admet un minimum ssi

$$\exists a_0 \in A : \forall a \in A, a_0 \leq a$$

2) Dans ce cas (uniquement ds ce cas), a_0 est unique.
On l'appelle minimum de A et on le note min A, également appellé plus petit élément de A

Démo: ? ++

Exemple:

. $[0, 1]$ admet un + petit élément c'est 0

Rq : A admet un plus petit élément $\Rightarrow A \neq \emptyset$

Déf: De m̂, on définit "A admet un max" et max A

Exemple: . $\max [\![1, n]\!] = n$ si $n \in \mathbb{N}^*$
. $\max [\![-2, 19]\!] = 19$
. max $\mathbb{N}$ n'est pas défini
ie $\mathbb{N}$ n'admet pas de + grand élément
. max $\mathbb{R}$ de m̂
. $\max \mathbb{R}_- = 0$

3) Théorèmes d'existence de min / max

Th 1 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie finie et non vide alors A admet un minimum et un maximum

⚠ $[0,1[$ n'est pas fini !! mais $[0,1[$ est de longueur finie.
En effet, $[0,1[$ a une $\infty^{té}$ d'éléments

Démo : On procède par récurrence sur le cardinal de A
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :
$P(n)$: "Soit A un ensemble de cardinal n, alors A admet un minimum"

Initialisation : $(n = 1)$

Soit A tq $\text{Card } A = 1$
On écrit $A = \{a_1\}$
On a bien $a_1 = \min A$

Hérédité :
Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $P(n)$. Mq $P(n+1)$
Soit A un ens. de card $(n+1)$
On l'écrit $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$

On distingue deux cas :
1er cas : Osq $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $a_1 \leq a_i$
On a bien alors $a_1 = \min A$

$2^{ème}$ cas : Osq non$(\forall i, a_1 \leq a_i)$ ie

$\exists\, i_0 \in [\![1, n+1]\!] : a_1 > a_{i_0}$ (*)

Fixons un tel i_0

On a nécessairement $i_0 \neq 1$ donc $i_0 \geq 2$

On pose $A' = A \setminus \{a_{i_0}\} = \{a_2, \dots, a_{n+1}\}$

On a $\operatorname{card}(A') = n$

On applique $P(n)$ à A' : A' possède un plus petit élément

Soit donc $i_1 \in [\![2, n+1]\!]$ tq $a_{i_1} = \min A'$

On a $a_{i_1} \leq a_{i_0}$ car $\left|\begin{array}{l} a_{i_1} = \min A' \\ i_0 \geq 2 \end{array}\right.$

On a $a_{i_0} < a_1$ d'après (*)

donc $a_{i_1} \leq a_{i_0} \leq a_1$

CCL : $\forall i \in [\![1, n+1]\!], a_{i_1} \leq a_i$

donc $a_{i_1} = \min A$: A admet un + petit élément

$P(n+1)$ est vraie ■ $\exists$ min

Pour le max, on fait pareil

(?) Mq A fini, $\max A = -(\min(-A))$ où $-A := \{-a \mid a \in A\}$

Complément

- Mq $\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
  $P \longmapsto \widetilde{P}$
  n'est pas surjective

Ie il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui ne sont pas polynomiales

Démo : On considère sin

1) $\sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
2) mq sin n'est pas polynomiale
   ie $\nexists P \in \mathbb{R}[X] : \sin = \widetilde{P}$

On a $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$ est infini
Or un polynôme qui s'annule en une ∞té de points est nul
Or $\sin \neq \widetilde{0}$. D'où le résultat ∎

- **Prop :** Soit I un intervalle de longueur finie et >0
  Soient $x, y \in I$
  alors x et y sont $\ell(I)$-proches

Dessin :

Démo :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$
. on traite le cas $I = [a, b]$
quitte à échanger x et y, sq $x \leq y$
On a $y \leq b$ et $x \geqslant a$
$-x \leq -a$

donc, $|y-x| = y-x \leq b-a = \ell(I)$

. cas $I = [a, b[$

On a $[a,b[\subset [a,b]$

donc $x, y \in [a,b]$

donc, d'après ce qui précède : x et y sont $(b-a)$ proches

. $]a,b]$, $]a,b[$ idem

. __Prop :__ Soit $x \geq 0$ tq $\forall \varepsilon > 0$, $0 \leq x \leq \varepsilon$ $(*)$

alors $x = 0$

Démo : On raisonne par l'absurde et on suppose $x \neq 0$

Comme $x \geq 0$, on a $x > 0$

Dessin

On pose $\varepsilon := \frac{x}{2}$. On a bien $\varepsilon > 0$

D'après $(*)$, on a $x \leq \varepsilon = \frac{x}{2}$

donc, comme $x > 0$, on a en divisant par x

$1 \leq \frac{1}{2}$ donc $2 \leq 1$. C'est absurde

donc $x = 0$

. __Parties bornées__

__Déf :__ Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est bornée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

A est minorée et majorée

Prop : Soit $A \subset \mathbb{R}$, On a :

$$A \text{ bornée} \iff \exists M \geq 0 : \forall a \in A, \ |a| \leq M$$

Rq : il n'y a pas de $\leq$ sur $\mathbb{C}$!!
Si $A \subset \mathbb{C}$, "A majorée" n'a pas de sens
Grâce à la prop. on peut donner un sens à "A bornée"

Déf : Soit $A \subset \mathbb{C}$
On dit que A est bornée ssi
$$\exists M \geq 0 : \forall a \in A, \ \underbrace{|a|}_{\text{module de a}} \leq M$$

Théorème !! 2 :

Soit $A \subset \mathbb{N}$ non vide
alors A admet un plus petit élément

Rq : en pratique, on écrira
"On note $A = \{ i \in \mathbb{N} \mid \ldots \}$
On a $A \neq \emptyset$ et $A \subset \mathbb{N}$ donc A admet un minimum
On note $i_0 := \min A$"

Démo :
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$:
"$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $n \in A \Rightarrow A$ admet un minimum"

Initialisation : $n = 0$

Soit $A \subset \mathbb{N}$ tq $0 \in A$. Alors on a $\forall a \in A, a \geq 0$
Donc $0 \in \text{Mino}(A) \cap A$
donc A admet un minimum

Hérédité forte

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)\right) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)$ est vraie.
Mq $P(n+1)$
Soit $A \subset \mathbb{N}$ tel que $(n+1) \in A$. Mq A admet un minimum.

On distingue deux cas :

1er cas : Osq $\forall a \in A$, $n+1 \leq a$
Ĉ $(n+1) \in A$, on a bien A admet un minimum, qui est $n+1$

2e cas : on suppose
$\text{non}\left(\forall a \in A \ (n+1) \leq a\right)$
ie osq $\exists a_0 \in A : a_0 < n+1$
fixons un tel a_0
Ĉ $a_0 < n+1$, on a $a_0 \leq n$ ie $a_0 \in [\![a_0, n]\!]$
On applique $P(a_0)$ à A : A admet un minimum.

Théorème 3 :

Soit $A \subset \mathbb{Z}$ une partie non vide alors
1) A majorée $\Rightarrow$ A admet un maximum
2) A minorée $\Rightarrow$ A admet un minimum

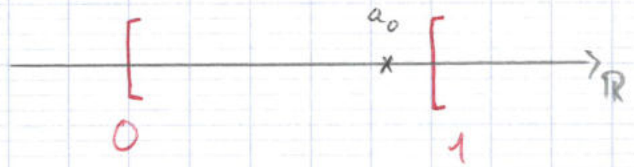
(?) Démo : se ramener au cas $\mathbb{N}$

4) Insuffisance de min et de max

Fait: $[0, 1[$ ne possède pas de maximum

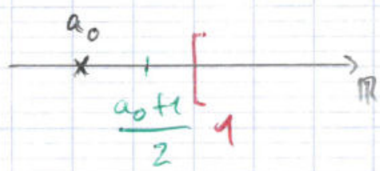
Démo :
On raisonne par l'absurde
Osq $[0, 1[$ admet un maximum
On note $a_0 := \max [0, 1[$

Dessin :



Rq : Sur le dessin, on voit bien que il y a un élément dans $[0, 1[$ strict^t + grand que a_0
Mais, il faut le démontrer

Dessin : "zoomé"



On a : $a_0 \leqslant a_0 < 1$
et $a_0 < 1 \leqslant 1$

On somme ces inégalités, on obtient :

$$2a_0 < a_0 + 1 < 2$$

donc $0 \leq a_0 < \frac{a_0+1}{2} < 1$

donc : 1) $\frac{a_0+1}{2} \in [0,1[$

2) on a $a_0 < \frac{a_0+1}{2}$

Ceci contredit le fait que $a_0 = \max [0,1[$.
Absurde.

Rq : En revanche, 1 est le "meilleur majorant de $[0,1[$ ou le majorant "optimal", le majorant le plus serré
Formellement, on a $\mathrm{Majo}([0,1[) = [1,+\infty[$
et donc $1 = \min(\mathrm{Majo}([0,1[))$
ie 1 est le + petit majorant de A

Fait : $\mathrm{Majo}([0,1[) = [1,+\infty[$

On raisonne par double inclusion :

. Mq $[1,+\infty[\subset \mathrm{Majo}([0,1[)$
Soit $M \geq 1$. Mq M est un majorant (ie $M \in \mathrm{Majo}([0,1[)$)
Je mq $\forall a \in [0,1[, a \leq M$
Soit $a \in [0,1[$, on a $\begin{cases} a < 1 \\ 1 \leq M \end{cases}$ donc $a \leq M$

. Réciproquement, mq $\mathrm{Majo}([0,1[) \subset [1,+\infty[$

Soit M un majorant de $[0,1[$

Mq $M \geqslant 1$

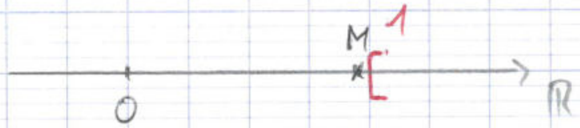
On raisonne par l'absurde

Osq $M < 1$

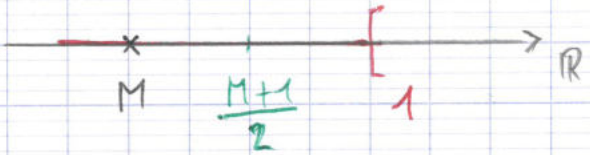
Ĉ M majore $[0,1[$, on a $M \geqslant 0$

donc $M \in [0,1[$

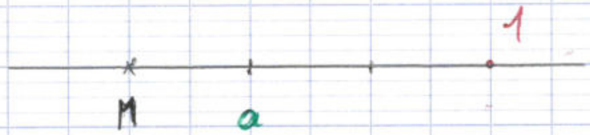
Dessin :



"en zoomant"



Rq géométrique :



Quelle est l'expression de a ?

On a : $a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{on part de } M}}{M} + \dfrac{1-M}{3}$ } on avance d'un tiers de la dist. totale

donc $a = \dfrac{3M + (1-M)}{3} = \dfrac{2M+1}{3} = \dfrac{2M + 1 \times 1}{2+1}$

On a $M < \frac{1+M}{2} < 1$

C'est absurde car M majore $[0,1[$ et $\frac{1+M}{2} \in [0,1[$

5) Borne supérieure / inférieure

a) Borne supérieure

Déf: Soit $A \subset \mathbb{R}$

1) On dit que A admet une borne supérieure $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ Majo(A) admet un + petit élément
ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ A possède un + petit majorant

2) Dans ce cas, on note $\sup A$: "le + petit majorant de A"
ie $\sup A := \min(\text{Majo}(A))$

Rq : on dit aussi "supremum"

Fait A admet une borne supérieure $\Rightarrow A \neq \emptyset$

démo: On montre la contraposée
ie mq $A = \emptyset \Rightarrow A$ n'admet pas de borne sup.
En effet, Majo$(\emptyset) = \mathbb{R}$ qui n'admet pas de + petit élément

Exemples :

- $[0,1[$ admet une borne supérieure
  En effet, $\text{Majo}([0,1[) = [1,+\infty[$ qui admet 1 comme + petit élément
  On a $\sup [0,1[= 1$

- De même si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, on a alors
  $[a,b[$ admet une borne sup. et $\sup [a,b[= b$

Fait !! "Un max est un sup"

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide
1) Si A admet un + grand élément alors A admet une borne supérieure

2) Dans ce cas, $\sup A = \max A$

Démo : Osq A admet un + grand élément
On note $a_0 := \max A$ ie $a_0 \in A \cap \text{Majo}(A)$
Mq a_0 minore $\text{Majo}(A)$. Soit M un majorant de A
On a $\forall a \in A, a \leq M$
Or $a_0 \in A$. Donc : $a_0 \leq M$ et ce pour tout $M \in \text{Majo}(A)$
CCL : $\forall M \in \text{Majo}(A), a_0 \leq M$

donc on a : . $a_0 \in \text{Mino}(\text{Majo}(A))$
. $a_0 \in \text{Majo}(A)$
donc $a_0 \in \text{Mino}(\text{Majo}(A)) \cap \text{Majo}(A)$ ie
$\text{Majo}(A)$ admet un + petit élément qui est a_0
Ie on a $a_0 = \min(\text{Majo}(A))$
donc A admet une borne sup et $\sup A = a_0 = \max A$

b) Borne inférieure

Déf : Soit $A \subset \mathbb{R}$

1) On dit que A admet une borne inférieure (ou infimum) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ Mino(A) admet un + grand élément

2) On note alors $\inf A := \max(\text{Mino}(A))$

Rq : les résultats de a) se transposent à l'inf.

6) Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

Théorème :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ telle que
1) $A \neq \emptyset$
2) A est majorée

alors, A admet une borne supérieure

démo : Cela découle de la construction de $\mathbb{R}$

Rq : ce théorème est faux dans $\mathbb{Q}$
(?) Qu'est ce que cela veut dire ?
Contre exemple ?

Rq : le TVI est faux dans $\mathbb{Q}$
ctre-exemple : $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2$

On a $f(0) = 0$
$f(2) = 4$

On a $2 \in [0, 4] \cap \mathbb{Q}$
" f est continue "
est-ce que $\exists\, a \in \mathbb{Q} \cap [0,2] : f(a) = 2$?
Non : $\nexists\, a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ ■ " $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ "

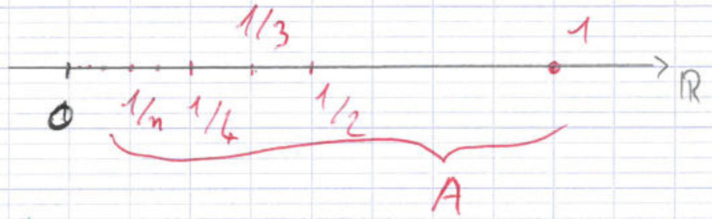
Rq : on peut voir ce théorème c̄ un axiome de $\mathbb{R}$
Rq 2) : thm analogue pour inf

Exemple :

- $A := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

  A est bornée $\neq \emptyset$

Dessin



⚠ $0 \notin A$

On a $\max A = 1 = \sup A$

$\inf A = 0$

ĉ $\inf A \notin A$: A n'admet pas de + petit élément

- $A =]0, 1[\cap \mathbb{R}$ (borné)

  On a $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$

  "ils ne sont pas atteints"

(?)* On note $A := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \right\}$

1) Mq A est majorée
2) Mq $A \neq \emptyset$
3) On note $a := \sup A$
   a) Mq $a \geqslant 0$
   b) Mq $a^2 = 2$

7) !! Caractérisation "à la ε" des bornes supérieures et inférieures

Proposition !!

Idée : Si $\sup A \notin A$, du moins, "il est collé à A"

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée :

On note $s := \sup A$

alors :

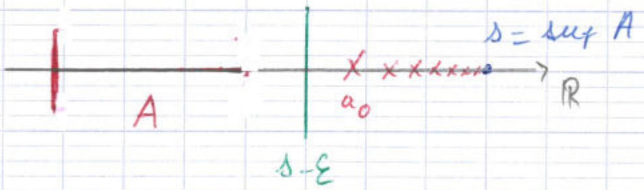
1) $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : s - \varepsilon < a_0 \leq s$

2) De plus, si A n'admet pas de + grand élément

On a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : s - \varepsilon < a_0 < s$

Dessin :



Reformulation du 1)

$\forall \varepsilon > 0, A \cap \,]s - \varepsilon, s] \neq \emptyset$

Démo : On raisonne par l'absurde et on suppose :

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall a_0 \in A, s - \varepsilon_0 \geq a_0$

On fixe un tel $\varepsilon_0 > 0$

1) on fait l'absurde de la moitié de $s - \varepsilon < a_0 \leq s$

2) on montrera après $a_0 < s$

On a $s - \varepsilon_0 \in \text{Majo}(A)$

Or, $s - \varepsilon_0 < s$

et $s = \min(\text{Majo}(A))$

absurde.

Ainsi, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : s - \varepsilon < a_0$$

. On a $s = \sup A \in \text{Majo}(A)$,

donc $\forall a \in A, \quad a \leq \sup A$

. Donc, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : s - \varepsilon < a_0 \leq s \qquad (*)$$

2) Si A n'admet pas de + gd élément, on a

$\sup A \notin A$ ie $s \notin A$

Donc, dans $(*)$, l'inégalité $a_0 \leq s$ ne peut pas être une égalité ■

Rq : E ens. On considère $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ qui est un ens. ordonné. Soient $A, B \subset E$

1) $\text{Majo}(\{A\}) = \left\{ X \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset X \right\}$

2) $\text{Majo}\left(\left\{A, B\right\}\right) = \left\{ X \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset X \text{ et } B \subset X \right\}$

3) Est-ce que $\text{Majo}(\{A,B\})$ admet un + petit élément ?

oui, c'est $A \cup B$.

4) CCL : $A \cup B = \sup \{A, B\}$

5) De même, $A \cap B = \inf \{A, B\}$

? Regarder ce qui se passe dans $(\mathbb{N}, |)$
← divisibilité

Remarque : En fait, dans la prop. précédente, il y a équivalence. (d'où "caractérisation")

Te : Soit $s \in \mathbb{R}$.
alors $s = \sup A \iff \begin{cases} 1) \ s \text{ majore } A \\ 2) \ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : s - \varepsilon < a_0 \leq s \end{cases}$

démo : ?

? Même énoncé pour inf A : l'énoncer

8) Min, max, inf, sup des fonctions

Soit $D \subset \mathbb{R}$ non vide
Soit $f : D \to \mathbb{R}$

Déf :
1) On dit f admet une borne sup ssi $f[D]$ admet une borne sup.

On note alors $\sup\limits_{D} f$ ou $\sup\limits_{x \in D} f(x)$ le nb $\sup(f[D])$

ex : $\sup\limits_{\mathbb{R}} \arctan = \frac{\pi}{2}$

2) On dit que f admet un maximum ou que f atteint sa borne sup. $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$f[D]$ admet un plus grand élément

ex : arctan n'atteint pas sa borne supérieure.
En effet, $\nexists\, a \in \mathbb{R} : \arctan(a) = \frac{\pi}{2}$

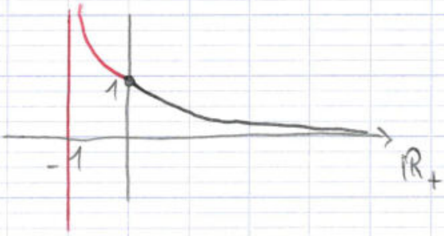
Dans ce cas, on note $\max_D f$ ou $\max_{x\in D} f(x)$

Ce réel $\max(f[D])$.

3) Il déf. pour min et inf

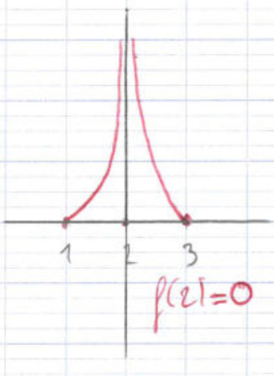
Ex : • sin diverge en $+\infty$ mais admet une borne sup qui est atteinte

• sur $\mathbb{R}_+$: $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est str. convexe



? Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $f'' > 0$. Mq $f \xrightarrow[-\infty]{} +\infty$

ou $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$



(?) Donner une formule pour f

$$f : [1,3] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} ? & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ ? & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Théorème :

f majorée $\Rightarrow$ f admet un sup
f minorée $\Rightarrow$ f admet un inf

(?) démo (plateau)

9) Sup, inf, max, min des familles

Soit I un ens non vide (I = " ens. des indices")

Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$
On dit que $(a_i)_{i \in I}$ admet un sup ssi $\{a_i \mid i \in I\}$ admet une borne sup
On note alors $\sup\limits_{i \in I} a_i := \sup \{a_i \mid i \in I\}$

De m̂ ; max, inf, min

IV, Partie entière

1) Définition

Prop, définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$
On note $A_x := \left\{ n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; n \leq x \right\}$

alors :
1) A_x est non vide et majorée (et $\subset \mathbb{Z}$)

2) Ainsi, A_x admet un plus grand élément qu'on appelle partie entière de x, noté $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$

ie $\lfloor x \rfloor := \max A_x$

Démo :

$$\left(\triangle\!\!! \quad \forall n \in A_x,\ \exists y \in \mathbb{R} : n \leq y \quad \text{Erreur} \right)$$
Inversion $\exists - \forall$

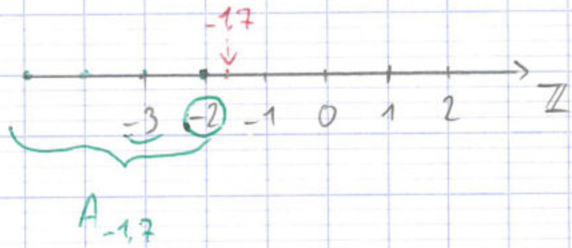
1) . A_x est majoré par x !
. $A_x \subset \mathbb{Z}$: ok
. $A_x \neq \emptyset$: Montrons-le par l'absurde

Osq $A_x = \emptyset$
ie $\forall n \in \mathbb{Z},\ n > x$
donc $\mathbb{Z}$ est minoré
donc d'après le cours, $\mathbb{Z}$ admet un min qu'on note a_0. Or, $a_0 - 1 < a_0$ et $a_0 - 1 \in \mathbb{Z}$.
absurde ■

Exemples :

. $\lfloor 1{,}4 \rfloor = 1$. $\lfloor 2{,}42 \rfloor = 2$

. $\lfloor 5 \rfloor = 5$ $\lfloor -1{,}7 \rfloor = -2$



Rq : De m̂, on peut définir la partie entière sup. notée $\lceil x \rceil$ par $\min \left\{ n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; n \geq x \right\}$

exemples : $\lceil 3{,}5 \rceil = 4$; $\lceil 5 \rceil = 5$; $\lceil -1{,}7 \rceil = -1$

⚠ " $\forall x \in \mathbb{R}, \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ " est fausse (pour ℕ)

Python :

```
import math as mt
    mt.floor (x)      ⌊x⌋
    mt.ceiling (x)    ⌈x⌉
```

Prop :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. Les asser° suivantes sont $\iff$

ie : $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier n vérifiant $n \leq x < n+1$

1) $n = \lfloor x \rfloor$

2) $n \leq x < n + 1$

3) $x - 1 < n \leq x$

Démo :

. Mq $2) \iff 3)$

On a $n \leq x < n+1 \iff \begin{cases} n \leq x \\ x < n+1 \end{cases} \iff \begin{cases} n \leq x \\ x-1 < n \end{cases}$

$\iff x-1 < n \leq x$

. Mq $1) \implies 2)$

Osq $n = \lfloor x \rfloor$

On a $n = \max A_x$ avec $A_x := \left\{ p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x \right\}$

En particulier : $n \in A_x$: on a $n \leq x$

Mq $x < n+1$. On raisonne par l'absurde.

Osq $x \geq n+1 > n$

ie $n+1 \in A_x$

Or, $n = \max A_x$

donc, en particulier, $n \in \text{Majo}(A_x)$

donc, $n \geq n+1$ ie $0 \geq 1$. absurde.

donc, $n \leq x < n+1$

. Mq $2) \implies 1)$

Osq $n \leq x < n+1$. Mq $n = \lfloor x \rfloor$ ie $n = \max \lfloor A_x \rfloor$

ie $\begin{cases} n \in A_x & a) \\ n \in \text{Majo}(A_x) & b) \end{cases}$

a) ok

b) Soit $p \in A_x$. Mq $p \leq n$

On a (ie de reformulation) $p \leq x$

- De plus, on a $x < n+1$
- Donc, on a $p < n+1$

Or !! $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \ a < b \iff a \leq b-1$ $R^{\times}$

donc, on a $p \leq n$ d'où b) ■

3) Propriétés de la partie entière

Fait : $\forall x \in \mathbb{R}, \ x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$

Démo : ?

Prop 1 : $\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{array} \text{ est croissante}}$

Démo :

Mq $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$

Mq $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

On a $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $x \leq y$ donc $\lfloor x \rfloor \leq y$

Ie $\lfloor x \rfloor \in A_y$

Or, $\lfloor y \rfloor = \max A_y$

donc $\lfloor y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor$

Prop 2 : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \ \lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k}$

Démo : On utilise la caractérisation

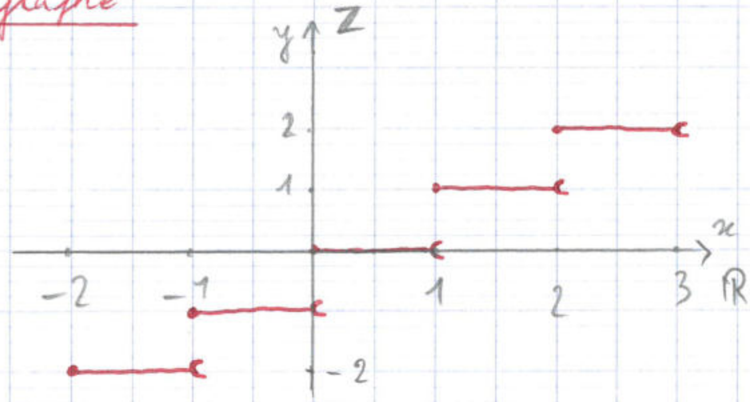
Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $\underbrace{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}_{\text{inégalité fondamentale}}$ (*)

th à (*)

donc $\overbrace{\underbrace{(\lfloor x \rfloor + k)}_{\in \mathbb{Z}}}^{N} \leq \underbrace{x+k}_{\in \mathbb{R}} < \underbrace{(\lfloor x \rfloor + k)}_{N} + 1$

Donc, $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$

4) Graphe



5) Partie fractionnaire

Soit $x \in \mathbb{R}$

On appelle partie fractionnaire de x et on note $\{x\}$ le nombre vérifiant

$$\boxed{x = \lfloor x \rfloor + \{x\}}$$

Prop.

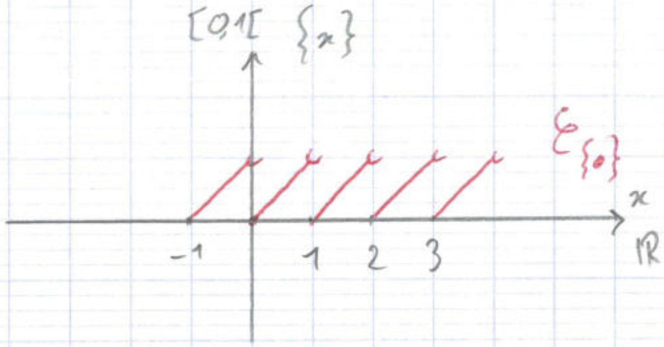
1) $\{x\} \in [0,1[$
2) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \{x+k\} = \{x\}$

ie $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,1[\\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$ est 1-périodique

3) $x \in [0,1[\implies \{x\} = x$
4) $\{x\} = 0 \iff x \in \mathbb{Z}$

démo: ? ■

2) et 3) donnent $\mathcal{E}$



ex : . $\{-0,1\}$?

On a $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ donc $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

ici $\{-0,1\} = -0,1 - (-1) = 1 - 0,1 = 0,9$

V. Densité

1) Définition !!

Déf : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\ell(I) > 0$

Soit $A \subset I$

On dit que A est dense dans I $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : |x - a| \leq \varepsilon$

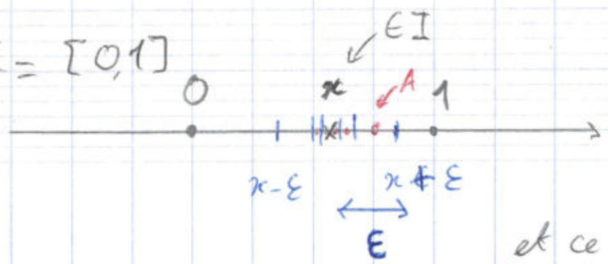
" $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut"

x et a sont ε-proches

ie " tout point x de I peut ê approché d'autant que je veux par un point $a \in A$"

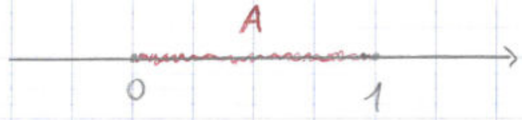
Exemple : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Dessin : $I = [0,1]$



et ce pour tout $x \in I$

A la fin, on obtiendra :



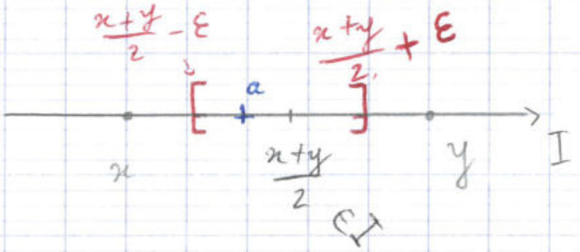
2) Caractérisation

Prop : I intervalle tq $\ell(I) > 0$
Soit $A \subset I$
les assertions suivantes sont $\Leftrightarrow$

1) A est dense dans I
2) $\forall x, y \in I$, $x < y \Rightarrow \exists a \in A : x < a < y$
3) $\forall x, y \in I$, $x < y \Rightarrow \exists a \in A : x \leq a \leq y$

Mq 1) $\Rightarrow$ 2)
Osq A dense dans I
Soient $x, y \in I$ tq $x < y$
On cherche $a \in A$ tq $x < a < y$

Dessin :



On prend $\varepsilon := \dfrac{y-x}{4}$

Faisons le + formellement
On fait confiance aux inégalités en s'aidant du dessin

On pose $z := \frac{x+y}{2}$ On a $z \in I$

On pose $\varepsilon := \frac{y-x}{4} > 0$

. D'après la déf de "A dense dans I",
Soit $a \in A$ tq $|z-a| \leq \varepsilon$
Mq $x < a < y$

. Mq $x < a$ 💡 On utilise le point z comme pivot
On a : $a - x = a - z + z - x$
💡 On veut mq $a - x > 0$, on est en mode ">0"
(⚠ la seule info qu'on a sur a fait intervenir le pt z)

$$\text{et } a - x \geq -|a-z| + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2} - x\right)}_{}$$

l'écart entre le milieu et le bord = la 1/2 largeur

$|a-z| \leq \varepsilon$
donc $-|a-z| \geq -\varepsilon$

$$\geq -\varepsilon + \frac{y-x}{2}$$

💡 $-|t| \leq t \leq |t|$

$$= \frac{y-x}{2} - \varepsilon$$

$$= \frac{y-x}{2} - \frac{y-x}{4}$$

💡 mini-astuce "$a - \frac{a}{2}$"

$$= \frac{y-x}{4} > 0$$

CCL : On a bien $x < a$

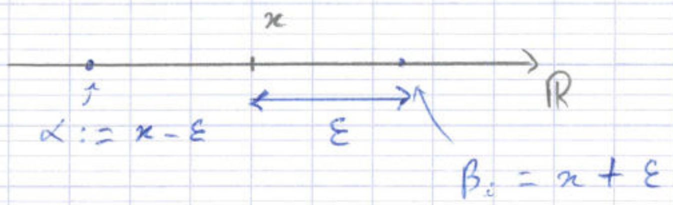
. De m̂, on montre $a < y$

. Mq 2) ⇒ 3)
ok car $\forall x, y, a \in \mathbb{R},\ x < a < y \Rightarrow x \leq a \leq y$

. Mq 3) ⇒ 1)
Osq $I = \mathbb{R}$ ⓘ le faire pour I intervalle qq (avec disj. de cas) → 10 cas à traiter

Osq $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists a \in A : x \leq a \leq y$ (*)
Mq A est dense dans $\mathbb{R}$
ie $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : |x - a| \leq \varepsilon$
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$

Dessin :



On a $\alpha < \beta$
donc, d'après (*), soit $a \in A$ tq $\alpha \leq a \leq \beta$
On a $x - \varepsilon \leq a \leq x + \varepsilon$
Ie $|a - x| \leq \varepsilon$

3) Nombres décimaux

On note $\mathbb{D} := \left\{ \frac{a}{10^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$

Si $x \in \mathbb{D}$, on dit que x est décimal

ex : . $5 = \frac{5}{10^0} \in \mathbb{D}$. $0{,}42 = \frac{42}{100} = \frac{42}{10^2} \in \mathbb{D}$

. $x \in \mathbb{D}$ ssi x a un nb fini de chiffres $\neq 0$ après la virgule dans son écriture décimale

Prop : $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Exemple :

. On a $\sqrt{2} = 1,41421356...$
. on cherche $a \in \mathbb{D}$ proche de $\sqrt{2}$
Idée : on prend $a := 1,414 \in \mathbb{D}$
question ? : Comment définir a "automatiquement" à partir de $\sqrt{2}$?

Réponse :
1) on calcule $1000\sqrt{2} = 1414,21356$
2) on fait $\lfloor 1000\sqrt{2} \rfloor = 1414$

3) on divise par 1000 : $\frac{\lfloor 1000\sqrt{2} \rfloor}{1000} = 1,414$

Déf : $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

1) L'approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près est le nb décimal :
$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{D}$$

2) L'approximation par excès est : $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$

Démo de $\mathbb{D}$ dense dans $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$
On a : $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x \leq \lfloor 10^n x \rfloor + 1$
on divise par 10^n,
on obtient : $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x \leq \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$

Donc $0 \leq x - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq \frac{1}{10^n}$

On note $x_n := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{D}$

On a $|x - x_n| \leq \frac{1}{10^n}$

Nouvelle question: Pourrais-je trouver un n tq $\frac{1}{10^n} \leq \varepsilon$?

But: (Rappel): on cherche $a \in \mathbb{D}$ tq $|x - a| \leq \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Or, } |x - x_n| \leq \frac{1}{10^n} \\ \text{si } \frac{1}{10^n} \leq \varepsilon \end{array}\right) \text{ on a bien } |x - \underset{\underset{\mathbb{D}}{\uparrow}}{x_n}| \leq \varepsilon$$

Réponse 1: on utilise $\ln(.)$

$$\text{On a } \frac{1}{10^n} \leq \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} \leq 10^n$$
$$\iff \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq n \ln 10$$
$$\iff n \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 10}$$

logique n est supérieur

donc $n := \left\lfloor \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 10} \right\rfloor + 1$ convient

Réponse 2 (sans $\ln$):

On veut $10^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Or, $\forall a \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$

donc on a (pour $a := 9$) $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^n \geq 1 + 9n$

Donc si on trouve n tq $1+9n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

On aura bien $10^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

donc $\frac{1}{10^n} \leq \varepsilon$

Or, $1+9n \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff n \geq \frac{1/\varepsilon - 1}{9}$

donc $n := \left\lfloor \frac{1/\varepsilon - 1}{9} \right\rfloor + 1$ convient

Bilan : On pose :

$$a := \frac{\left\lfloor 10^{\left\lfloor \frac{1/\varepsilon - 1}{9} \right\rfloor + 1} x \right\rfloor}{10^{\left\lfloor \frac{1/\varepsilon - 1}{9} \right\rfloor + 1}}$$

On a : 1) $a \in \mathbb{D}$ 2) $|x - a| \leq \varepsilon$

4) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Corollaire !! : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Démo : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

5) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$

Proposition !!! : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Démo : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$

on cherche $x \notin \mathbb{Q}$ tq $a \leq x \leq b$

Dessin :

1) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$ tq $a < \alpha < b$
2) Soit $\beta \in \mathbb{Q}$ tq $\alpha < \beta < b$

car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Idée :

On cherche $x \notin \mathbb{Q}$ entre α et β

Comme pourcentage, on prend (il nous faut un nb $\in [0,1]$)
On prend $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Bilan : on pose $\gamma := \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta - \alpha)$

? Vérifier : 1°) $\alpha \leq \gamma \leq \beta$
2°) Mq $\gamma \notin \mathbb{Q}$

Complément :

1) Mq $\forall t \geq 0$, $\dfrac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq t^n$

Idée : 1) On est "en mode $\leq$"
2) donc pour le dénominateur, on est en mode "$\geq$"

Soit $t \geq 0$, on a $\left.\begin{array}{l}(1+t) \geq 1 \\ (1+t+t^n) \geq 1\end{array}\right\}$ donc $(1+t)(1+t+t^n) \geq 1$

donc $\dfrac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)} \leq t^n$

2) Rappel de trigo

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$

$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \right)$

On note $T_n = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$

. si $e^{ix} = 1$ ie si $x \equiv 0 \ (2\pi)$

On a $T_n = (n+1)$ et $S_n = n+1$

. si $x \not\equiv 0 \ (2\pi)$

On a $T_n = \dfrac{e^{ix(n+1)} - 1}{e^{ix} - 1}$

$$= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)}$$

$$= e^{i\left(\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= e^{inx} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

donc $$S_n = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

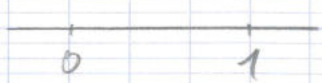
IV, Parties convexes de $\mathbb{R}$

1) Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$,
On dit que A est convexe ssi
$\forall a, b \in A,\ [a, b] \subset A$

Remarques :

1) $\{0, 1\}$ n'est pas convexe :



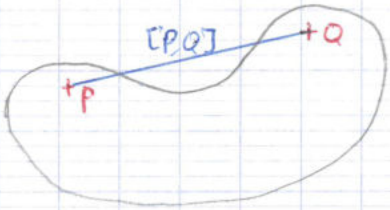
En effet $[0,1] \not\subset \{0,1\}$
car $\frac{1}{2} \in [0,1]$ mais $\frac{1}{2} \notin \{0,1\}$

2) Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ (ici $\mathbb{R}^2$ = plan)

On dit que A est convexe ssi

$\forall P, Q \in A,\ [P,Q] \subset A$

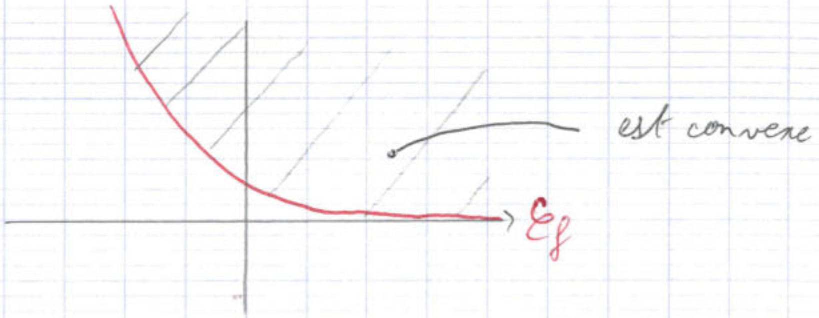
Ex :



cette partie n'est pas convexe

mais  est convexe, comme 

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe
alors l'ensemble des points au-dessus de $\mathcal{C}_f$ est convexe



Rq : On a $\mathcal{C}_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x) \right\}$

On a $\underbrace{\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq f(x) \right\}}_{\text{l'ensemble des points au dessus de } \mathcal{C}_f}$ est convexe

3) $[0, 1]$ est convexe

4) $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ est convexe

2) Classification des convexes de $\mathbb{R}$

Lemme : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ alors I est convexe

Démo : On a dix types d'intervalles
On a dix cas à traiter

Exemple :
Mq $]1, +\infty[$ est convexe

Soient $a, b \in]1, +\infty[$
On distingue 2 cas :

1er cas : si $a > b$, alors $[a, b] = \emptyset$ et on a
$[a, b] \subset]1, +\infty[$

2e cas : si $a \leq b$
Mq $[a, b] \subset]1, +\infty[$
Soit $t \in [a, b]$ ie soit $t \in \mathbb{R}$ tq $a \leq t \leq b$

On a $a \in]1, +\infty[$ ie $a > 1$
donc $t \geq a > 1$: on a $t > 1$ ie $t \in]1, +\infty[$

CCL : $[a, b] \subset]1, +\infty[$

Théorème :
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie convexe de $\mathbb{R}$
alors, A est un intervalle

Démonstration : Soit $A \subset \mathbb{R}$ convexe non vide

On distingue plusieurs cas :

		A majorée	$\exists$ sup A existe	A non majorée
		sup $A \in A$	sup $A \notin A$	
A minorée $\exists$ inf A $\exists$	inf $A \in A$	1	2	3
	inf $A \notin A$	4	5	6
A non minorée		7	8	9

On traite le cas 7 : A majorée donc sup A existe
sup $A \in A$, A non minorée

On veut mq $A =]-\infty ; \sup A]$

Mq $A \subset]-\infty ; \sup A]$

Soit $a \in A$. Mq $a \in]-\infty, \sup A]$ ie mq $a \leq \sup A$
On sait que $\sup A \in \text{Majo}(A)$: d'où $a \leq \sup A$

Mq $]-\infty, \sup A] \subset A$
Soit $t \in]-\infty, \sup A]$ ie soit $t \leq \sup A$
Mq $t \in A$

rappel : A minorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad m \leq a$
A non minorée $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R} : \exists a_0 \in A , \quad a_0 < m \quad (*)$

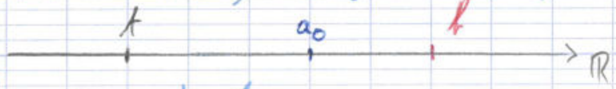
Ainsi, en prenant $m := t$ dans (*)
Soit $a_0 \in A$ tq $a_0 < t$

CCL : on a $\sup A \in A$
$a_0 \in A$
donc, č A est convexe : $[a_0, \sup A] \subset A$
or $t \in [a_0, \sup A]$ donc $t \in A$
CCL : On a $]-\infty, \sup A] \subset A$

On traite le cas 8
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et convexe tq
a) A est non minorée
b) A majorée
c) $\sup A \notin A$
On note $b := \sup A$

. Montrons que $A \subset]-\infty, b[$
Soit $t \in A$
Mq $t \in]-\infty, b[$ ie $t < b$
On a : b majore A et $b \notin A$ donc $t < b$
donc $A \subset]-\infty, b[$

. Montrons que $]-\infty, b[\subset A$
Soit $t \in]-\infty, b[$
Montrons que $t \in A$
On a $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : b - \varepsilon < a_0 \leq b$



Pour $\varepsilon := b - t$
on a : $\exists a_0 \in A : t < a_0 \leq b$
Fixons un tel a_0
On a : comme A est non minorée, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists a_1 \in A : a_1 \leq M$

Pour $M = t$, on a : $\exists a_1 \in A$: $a_1 \leq t$

Fixons un tel a_1

On a donc $a_1 \leq t \leq a_0$

ie $t \in [a_1 ; a_0]$

or A est convexe

donc $t \in A$

d'où $]-\infty, b[\subset A$

On a bien : $A =]-\infty, b[$

Tanguy

Nombres réels

1 Th d'existence de min et max

- A : partie finie et non vide de $\mathbb{R}$. A admet un minimum et un max
- Pb de cette notion : $[0,1[$ n'a pas de max
- Soit $A \subset \mathbb{N}$ tq $A \neq \emptyset$ alors A admet un min
  - Récurrence forte
- Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tq $A \neq \emptyset$:
  - A majorée $\Rightarrow$ A a un max
  - A minorée $\Rightarrow$ A a un min

2 Borne supérieure / inférieure

- A admet une <u>borne sup</u> $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ Majo(A) admet un min
  - c'est "sup A"
  - A a une borne sup $\Rightarrow A \neq \emptyset$
  - si A a un max alors il a un sup et sup A = max A
- A admet une <u>borne inf</u> $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ Mino(A) a un maximum
  - c'est "inf A"

3 Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ tq $A \neq \emptyset$ et A est majorée alors, A admet une borne sup.

4 Bornes sup. et inf. "à la ε"

- $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : \sup A - \varepsilon < a_0 \leq \sup A$
  - par l'absurde
- et si A n'a pas de max : $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : \sup A - \varepsilon < a_0 < \sup A$
- si $\sup A \notin A$ alors il est collé à A

Méthodologie du croquis

Cinq croquis peuvent donner lieu à une épreuve finale le jour du baccalauréat (2e partie de l'épreuve, notée sur 8 à titre indicatif) :

1-Pôles et flux de la mondialisation 2-Une inégale intégration des territoires dans la mondialisation 3-Les dynamiques territoriales des Etats-Unis 4-Les dynamiques territoriales du Brésil 5-Le continent africain : contrastes de développement et inégale intégration dans la mondialisation

NB : le fonds de croquis vous sera fourni lors de l'épreuve. N'oubliez pas de remplir l'en-tête.

I. Comment concevoir un croquis de géographie à partir d'un sujet ?

1-Analyser le sujet : Comme pour une composition : déterminer les limites du sujet, définir les termes géographiques importants (organisation spatiale, dynamiques spatiales, interfaces, métropoles, flux, développement...), poser des questions...

2-Trouver la problématique du sujet : dégager l'idée directrice du sujet. La problématique va déterminer l'organisation du plan de la légende.

⇨ La problématique clairement dégagée peut constituer le titre du croquis. Le **croquis doit être démonstratif** : il faut établir une différenciation spatiale qui révèle des inégalités et contrastes et représenter les facteurs et dynamiques spatiales. Il faut décrire et expliquer le phénomène concerné.

3-Mobiliser les connaissances et faire des choix : sélectionner les informations répondant à la problématique ; trier, classer, hiérarchiser les informations, sélectionner les types de figurés et choisir un mode de représentation adapté à la problématique.

REMARQUE : veiller à la **cohérence des figurés** avec ce qu'ils représentent : le type de figuré (linéaire, surfacique ou ponctuel), la couleur... *Ex : ce qui a trait à l'eau en bleu, les forêts en vert, les flux en figurés linéaires...*

4-Construire la légende en classant les informations en parties : construisez la légende avant de réaliser le croquis. Vous pourrez alors plus facilement choisir les figurés qui représenteront les phénomènes géographiques.

II. Réaliser graphiquement le croquis

1-Commencez par les aplats au crayon de couleur

2-Ajoutez les signes et symboles au feutre à pointe fine ou stylo bic

3-Soignez la nomenclature (ensemble des noms les plus importants concernant le sujet) : tous les noms sont écrits horizontalement sauf exceptions (comme les fleuves). Attention à l'orthographe.

4-Veillez à la lisibilité et l'exactitude des informations : évitez les surcharges d'informations, évitez également toute approximation sur la localisation des informations choisies.
Enfin, pensez que le soin compte aussi bien le soin de la production graphique que celui de l'écriture

A NE PAS OUBLIER :

- BANNIR : le blanco, le crayon à papier, le feutre épais
- La règle pour tracer les traits, les hachures, la légende
- Tailler ses crayons de couleurs et soigner le coloriage
- Ne pas colorier les mers et les océans (inutile)
- TOLE : Titre / Orientation / Légende / Echelle

⚠ 1re légende

Un croquis ne se contente pas de décrire. Il explique.

Tanguy

Nombres réels

- **δ- proximité**
  - déf : $|x-y| \leq \delta$
    - $\Leftrightarrow y-\delta \leq x \leq y+\delta$
  - $\left.\begin{array}{l} x \text{ et } y \ \delta\text{-proches} \\ y \text{ et } z \ \delta\text{-proches} \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ et } z \ (\delta+\delta')\text{ proches}$
- **max, min**
  - min : $\exists a_0 \in A : \forall a \in A,\ a_0 \leq a$
    - a_0 est unique !
  - max : $\exists a_1 \in A : \forall a \in A,\ a \leq a_1$
  - Si A est une partie finie et non vide alors A admet un min et un max
    - démo : récurrence sur le cardinal de A
- **majorants, minorants**
  - M majorant : $\forall a \in A,\ a \leq M$
  - m minorant : $\forall a \in A,\ m \leq a$
  - A bornée

Quelle place pour le citoyen à l'heure de « l'opinion publique »

	De Gaulle (1958-1969)	Pompidou (1969-1974)	VGE (1974-1981)	Mitterrand (1981-1995)	Chirac (1995-2007)	Sarkozy (2007-2012)	Hollande (2012-)
Information contrôlée	[illegible]	Idem	Radio France (TF1, A2, FR3) Publicité à la TV	[illegible]	[illegible] Déclin de la presse écrite	[illegible] Chaînes d'info en continu Déclin de la presse écrite	Idem
Pouvoir et Média	Contrôle total de l'information par l'Etat Censure	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	« Un Président normal » qui tente de séparer les intérêts de vie publique et vie privée
Evolution politique/sociale	Mai 1968 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Quelle place pour le citoyen à l'heure de « l'opinion publique » ?	- Crise de la représentation politique - Crise de la citoyenneté : abstention de plus en plus élevée - Comment rénover le modèle politique actuel : démocratie participative ? [illegible] - Comment répondre et résoudre les difficultés économiques et sociales ? - Que signifie « l'intérêt général » en démocratie ? « Tout seul on va plus vite, ensemble on va plus loin ».						