## Chapitre 12

# Matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un exemple très important de matrice dans $\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$

*Les matrices sont des tableaux de nombres.*

*En mathématiques, elles jouent un* ***rôle fondamental*** *: elles permettent de raisonner sur les espaces vectoriels et les applications linéaires de façon très concrète, calculatoire si nécessaire, en faisant abstraction des spécificités du problème.*

*Les matrices sont utilisées :*

- *dans presque tous les domaines des mathématiques ;*
- *dans de très nombreux domaines extérieurs aux mathémtatiques : en physique, chimie, économie, informatique,* etc.

# Chapitre 12 : Matrices

## Quelques notations

- $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$
- Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on notera les coeffs de $A$ : $A_{ij}$ ou $a_{ij}$
  pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$
  de m̂ pour $B$, $C$, $M$ etc

## I, Addition

Rq : on note $O_{n,p}$ la matrice nulle dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$
et $O_n := O_{n,n}$

## II, Multiplication par un scalaire

### 1) Définition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ ( soit $\lambda$ un scalaire)
La matrice $\lambda A$ est l'élément de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coeffs sont $(\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$

Rq 1: On écrit $\lambda A$ et pas $\cancel{A\lambda}$

Rq 2 : C' est une loi de composition externe ie on dispose de

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times M_{n,p}(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_{n,p}\mathbb{K} \\ (\lambda, A) &\longrightarrow \lambda A \end{aligned}$$

Ex : $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

. On a $5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix}$

. Rq : $M_{np}(\mathbb{R}) \subset M_{np}(\mathbb{C})$
donc je peux scalariser par un nb complexe

On a $i \cdot A = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i \\ 4i & 5i & 6i \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{C})$

## 2) Propriétés

Fait : Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

1) $0 \cdot A = 0_{np}$
2) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
3) $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu) A$
4) $\mu(\lambda A) = (\lambda\mu) A$
5) $1 \cdot A = A$

# III. Multiplication entre matrices

## 1) Définition !!

Soient $A \in M_{n,\textcircled{p}}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{\textcircled{p}q}(\mathbb{K})$
Le produit matriciel, noté $AB$ est l'élément de $M_{n,q}(\mathbb{K})$ défini par

$$\boxed{(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj}}$$

où $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$

Rq : Dans la formule précédente, l'indice $k$ "du milieu" parcourt $[\![1, p]\!]$ (le $p$ qui a disparu)

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

alors on a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque 3 choses essentielles :

1) $AB \neq BA$

↳ le produit matriciel n'est pas commutatif

2) $AB = 0 \not\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

↳ le produit matriciel n'est pas intègre

3) !! En général, $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

Contre - exemple :

$C = O_2$ On a $AB = O_2 = A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

mais $B \neq O_2$

## 2) Propriétés

Prop : Soient $A, A' \in M_{np}(\mathbb{K})$
$B, B' \in M_{p,q}(\mathbb{K})$
$C \in M_{q,1}(\mathbb{K})$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

alors, on a :

### 1) Associativité

$$(AB)C = A\cdot(BC)$$

### 2) Distributivité

$$(A+A')B = AB + A'B$$
$$A(B+B') = AB + AB'$$

3) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda \cdot (AB)$

Démo :

1) On a $AB \in M_{nq}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{q,1}(\mathbb{K})$
donc $(AB)C \in M_{n1}(\mathbb{K})$

De m̂ : $\underset{\substack{\cap \\ M_{np}}}{A}\,(\underset{\substack{\cap \\ M_{p1}}}{BC}) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

Mq ces matrices ont les m̂ coeffs

Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$

On a $$((AB)C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} AB_{i,k} \cdot c_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \left( \sum_{m=1}^{p} a_{i,m} b_{m,k} \right) c_{k,j}$$

$R^x$ ; somme double rectangulaire : on les intervertit

$$= \sum_{m=1}^{p} a_{i,m} \boxed{\sum_{k=1}^{q} b_{m,k} \cdot c_{k,j}} \longrightarrow \text{c'est } (BC)_{m,j}$$

$$= \sum_{m=1}^{p} a_{i,m} (BC)_{m,j}$$

$$= (A(BC))_{i,j}$$

2) Vient de $\forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad (a+b)c = ac + bc$

3) Vient de $\forall a, b \in \mathbb{K}, \ ab = ba$

## 3) Techniques de calcul en colonne !!

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ ; soit $j \in [\![1, p]\!]$

### a) rappel

On note $C_j(A)$ la $j$-ième colonne de $A$
On dispose de $C_j : M_{np}(\mathbb{K}) \to M_{n1}(\mathbb{K})$

### b) Matrice X colonne = colonne

Fait $\overset{!!!}{:}$ . $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ , $X \in M_{p1}(\mathbb{K})$ ($X$ colonne)

$$A \times X \in M_{n1}(\mathbb{K})$$

ie $AX$ colonne

. Si $i \in [\![1, n]\!]$ , $$\boxed{(AX)_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j}$$

## c) Base canonique de $M_{p1}(\mathbb{K})$ ← colonne

On pose $\varepsilon_1 := \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ p lignes , $\varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$

et si $j \in [\![1, p]\!]$, on pose : $\varepsilon_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← j-ième coordonnée.

et $\varepsilon_p := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rq : Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\vec{i} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base canonique

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_p)$ est la base canonique de $M_{p1}(\mathbb{K})$

Rq : si $j \in [\![1, p]\!]$ et si $i \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$(\varepsilon_j)_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

↑ le i-ème coeff de $\varepsilon_j$

## d) Extraction de colonne

**Fait !!**

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ ; $j \in [\![ 1,p ]\!]$
alors :

$$A\,\varepsilon_j = C_j(A)$$

**Démo :** On travaille coordonnée par coordonnée
Soit $i \in [\![ 1, n ]\!]$ ; on calcule :

$$\begin{aligned}(A\,\varepsilon_j)_i &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \boxed{(\varepsilon_j)_k} = \delta_{j,k} \\ &= a_{i,j} \times 1 \\ &= a_{i,j} \\ &= C_j(A)_i\end{aligned}$$

→ le seul terme non nul de cette $\Sigma$ correspond à l'indice $k = j$

## e) Calcul de AX par combinaison linéaire

**Fait !!**

Soit $X \in M_{p1}(\mathbb{K})$ qu'on écrit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ où les $x_i \in \mathbb{K}$

alors : $$X = \sum_{i=1}^{p} x_i\, \varepsilon_i$$

## Démo :

On a $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= x_1 \varepsilon_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= x_2 \varepsilon_2} + \dots + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}}_{= x_p \varepsilon_p}$$

$$= x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \dots + x_p \varepsilon_p$$

## Fait !!

$A \in M_{np}(\mathbb{K})$ $\quad X \in M_{p1}(\mathbb{K})$

Alors : $AX$ est une matrice colonne qui est combinaison linéaire des colonnes de $A$.
Plus précisément, on a :

$$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j \, C_j(A)$$

## Démo

On a : $$AX = A\left(\sum_{j=1}^{p} x_j \varepsilon_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \underset{\shortparallel \; C_j(A)}{\boxed{A \varepsilon_j}}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j \, C_j(A)$$

## Exemple : on a

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} & = C_3(A) - C_1(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

## f) Multiplication colonne par colonne

Proposition :

Soient $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$

On écrit B sous forme de colonnes

$$B = \left( B_1 \mid B_2 \mid B_3 \mid \dots \mid B_q \right)$$

où les $B_j \in M_{p1}(\mathbb{K})$
alors, on peut calculer le produit AB colonne par colonne, ie on a

$$AB = \left( \underbrace{AB1} \mid \underbrace{AB_2}_{\text{colonnes } \in M_{n,1}(\mathbb{K})} \mid \dots \mid AB_q \right)$$

Autrement :

Proposition : $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ , $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$

alors $\forall j \in [\![1, q]\!]$ , $C_j(AB) = A\, C_j(B)$

Démo : Soit $j \in [\![1, q]\!]$.

On a
$$\begin{aligned} C_j(AB) &= (AB)\varepsilon_j && \text{où } \varepsilon_j \in M_{q,1}(\mathbb{K}) \\ &= A\,(\underbrace{\boxed{B\varepsilon_j}}_{\text{c'est } C_j(B)}) && \text{par associativité} \\ &= A\; C_j(B) \end{aligned}$$

Exemple : On a

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rq : les colonnes nulles de B donnent des colonnes nulles de AB

ex :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 0 \downarrow & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 6 \\ 24 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

## g) Cas colonne X **ligne** (CL → Cl)

Si C est une matrice colonne et si L est une matrice ligne qu'on écrit $L = (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_p)$

alors, on obtient $\underset{\in M_{n,1}(\mathbb{K})}{C} \; \underset{\in M_{1,p}(\mathbb{K})}{L} = \left( x_1 C \mid x_2 C \mid x_3 C \mid \dots \mid x_p C \right)$

cf $\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix} \\ (C) & (\quad \dots \quad) \end{array}$

Exemple :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 4 & 0 & 6\\ 3 & -3 & 6 & 0 & 9\end{pmatrix}\end{array}$$

## 4) Techniques de calcul en ligne

Il faut retenir : " Ligne × Matrice = Ligne "

Exemple :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 7 & 9\\ -2 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}\end{array}$$

(?) Énoncer les résultats des techniques en ligne

## 5) Matrice identité

C'est la matrice carrée dans $M_n(\mathbb{K})$ notée $I_n$ et définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

Prop : Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$. Alors, on a :

1) $A \, I_p = A$ 2) $I_n A = A$

## Démo :

2) On est dans $M_{np}(\mathbb{K})$
Soient $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,p]\!]$

On a :

$$(I_n A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (I_n)_{ik} \, A_{k,j} \quad (*)$$

"$M_n(\mathbb{K}) \times M_{n,p}(\mathbb{K})$"

Or, si $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$(I_n)_{ik} = \delta_{ik}$$

donc, tous les termes dans $(*)$ sont nuls sauf le terme pour $k = i$

Donc, $(I_n A)_{i,j} \underset{k=i}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} (I_n)_{ii} A_{i,j} = A_{i,j}$

donc $I_n A = A$

1) Mq $A I_p = A$
On est dans $M_{np}(\mathbb{K})$
💡 Pour mq $A I_p = A$, on montre qu'elles ont les m̂ colonnes
Je mq $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $C_j(A I_p) = C_j(A)$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. On a $C_j(A I_p) = A \, C_j(I_p)$
Or, $C_j(I_p) = \varepsilon_j$
donc, $C_j(A I_p) = A \varepsilon_j = C_j(A)$
donc $A I_p = A$

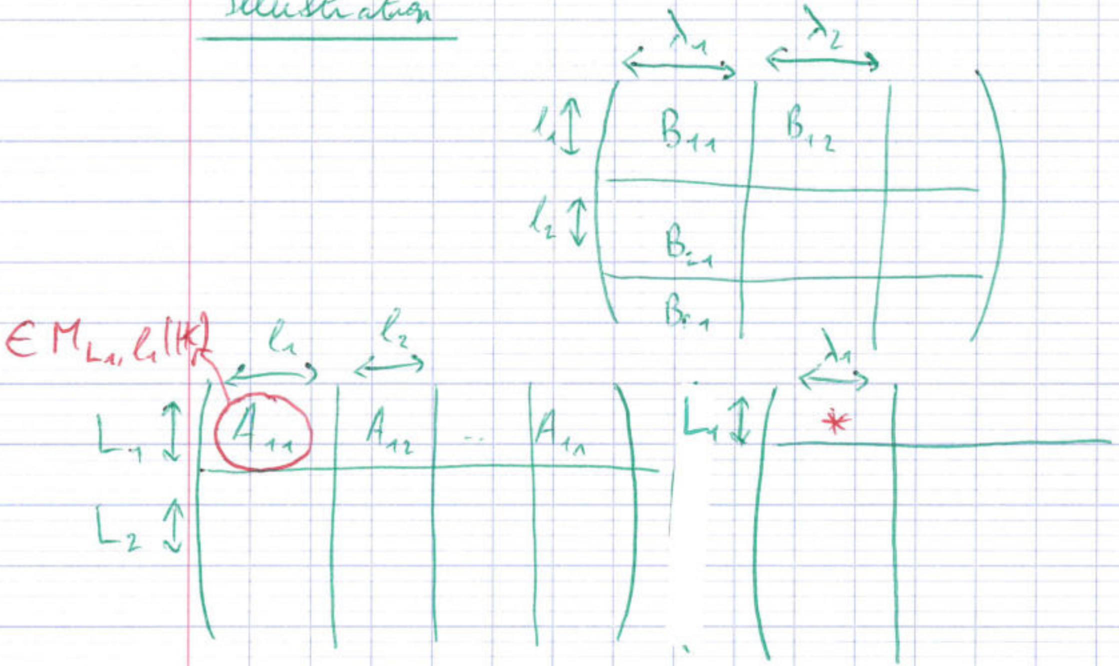
## 6) Produit par blocs

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on veut calculer $AB$

### Principe

Si $A$ et $B$ sont "découpés en blocs" dont les tailles sont compatibles pour le produit, alors on peut faire le produit par blocs.

### Illustration



$$* = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + \dots + A_{1r}B_{r1}$$

### Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \text{c'est une matrice diagonale par blocs}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & -1 & 10 \\ 6 & 2 & 4 & 10 \\ \hline 4 & 4 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

# IV. Transposition

## 1) Définition

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$

La transposée de A notée $A^T$ ou ${}^tA$ est la matrice dans $M_{pn}(\mathbb{K})$ définie par

$$(A^T)_{j,i} = a_{i,j} \quad \text{pour} \begin{cases} i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!] \end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

## 2) Propriétés

Proposition

1) $\forall A \in M_{np}(\mathbb{K})$, $(A^T)^T = A$ (c'est une involution)

2) $\forall A_1, A_2 \in M_{np}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$(A_1 + \lambda A_2)^T = A_1^T + \lambda A_2^T$$

On dit que la transposition est linéaire

3) $\forall A \in M_{np}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{pq}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$

## Démo :

1) 2) ok

3) Soient $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$

On a $AB \in M_{nq}(\mathbb{K})$ et $(AB)^T \in M_{q,n}(\mathbb{K})$

Soit $j \in [\![1, q]\!]$, soit $i \in [\![1, n]\!]$
On calcule :

$$[(AB)^T]_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \underset{\in \mathbb{K}}{(A^T)_{ki}} \; \underset{\in \mathbb{K}}{(B^T)_{jk}}$$

💡 On force à apparaître ↗
$A^T$ et $B^T$

$$= \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{jk} (A^T)_{\underline{k}i}$$

→ formule du produit

$$= (B^T A^T)_{ji}$$

## Corollaire : $A \in M_{np}(\mathbb{K})$

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \; L_j(A^T) = C_j(A)^T$$

## Démo :

Les techniques en ligne disent que

$$\underset{\substack{\| \\ (0 \dots 1 \dots 0) \\ \uparrow \\ \text{indice } i}}{\varepsilon_i^T} \; M = L_i(M)$$

Ici : $\overset{\text{soit } j \in [\![1,p]\!]}{\vee}$ $C_j(A)^T = (A\,\varepsilon_j)^T$

$$= \varepsilon_j^T A^T$$
$$= L_j(A^T)$$

Ex :

$$\begin{pmatrix} \underset{C_1}{\boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}}} & \begin{matrix}5 & 9\\6 & 10\\7 & 1\\8 & 2\end{matrix}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}}\\ \begin{matrix}5 & 6 & 7 & 8\\9 & 10 & 1 & 2\end{matrix}\end{pmatrix}$$

Rq : $I_n^T = I_n$

# V, Matrices carrées

## 1) Commutation

On dit que deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $AB = BA$

Fait : $A, B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{K})$ ; $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\left.\begin{matrix}A \text{ et } B_1 \text{ commutent}\\ A \text{ et } B_2 \text{ commutent}\end{matrix}\right\} \Rightarrow A \text{ et } (B_1 + \lambda B_2) \text{ commutent}$$

(?) : démo

## 2) Puissances

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ et si $p \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$A^p := \underbrace{A \times \ldots \times A \times A}_{p \text{ fois}}$$

convention : $A^0 = I_n$
en particulier : $0_n^0 = I_n$ $(0^0 = 1)$

**Fait :** $A \in M_n(\mathbb{K})$
$k, l \in \mathbb{N}$

1) $A^k A^l = A^{k+l}$
2) $(A^k)^l = A^{kl}$

**Fait :** $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tq $A$ et $B$ commutent. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ (AB)^p = A^p B^p$$

Rq : en général, on a $(AB)^2 = ABAB$

**Prop :** $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent
Soient $k, l \in \mathbb{N}$
alors, $A^k$ et $B^l$ commutent

## 3) Evaluation d'un polynôme en une matrice

**Déf :** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$
où $m \in \mathbb{N}$, $\forall k$, $a_k \in \mathbb{K}$, $a_m \neq 0$
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors l'évaluation de $P$ en $A$, noté $P(A)$

est la matrice définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k \in M_n(\mathbb{K})$$

. Si $P = 0$ , on pose $P(A) := 0_n$

Exemple:

On considère $A := \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

et $P := 5X^3 - \frac{8}{3}X^2 + 42X - 50$

⚠ c'est $-50X^0$

On a :

$$P(A) = \begin{pmatrix}5&15\\0&5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8/3&-16/3\\0&-5/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}42&42\\0&42\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}50&0\\0&50\end{pmatrix}$$

Fait : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

Démo :

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ : " $A^n = \begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ "

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ par récurrence

$n = 0$ : ok

Hérédité

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$

On a $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\overset{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1&1+n\\0&1\end{pmatrix}}$

**Prop :** Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent
alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $A$ et $P(B)$ commutent

$$A^2 B^3 = AA\,BBB \qquad : A^k \text{ et } B^l \text{ commutent}$$

$$= BAA\,BB$$
$$= BB\,AAB$$
$$\dots = B^3 A^2$$

**Corollaire :**

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \quad \forall P \in \mathbb{K}[X], \quad A \times P(A) = P(A) \times A$$

## 3) Formules de Newton et de Bernoulli

**Proposition:** Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tq A et B commutent

alors, si $p \in \mathbb{N}$

1) $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$

2) $A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$

Rq : A commute toujours avec $I_n$
donc, on a toujours
$$A^p - I_n = (A - I_n) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

et $(A+I_n)^p = \dots$

# VI. Matrices inversibles

Rq : $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ est une lci associative
$(A, B) \mapsto AB$

## 1) Définition

Déf : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on dit que A est inversible $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists B \in M_n(\mathbb{K}) : AB = BA = I_n$$

L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ : c'est le groupe linéaire d'ordre n

Rq : $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe dont le neutre est $I_n$.

Proposition - Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible
Alors :

1) Soient $B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{K})$ tq $\begin{cases} AB_1 = B_1A = I_n \\ AB_2 = B_2A = I_n \end{cases}$

alors $B_1 = B_2$

2) L'unique matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ tq $AB = BA = I_n$ est appellée matrice inverse de A et est notée $A^{-1}$

## 2) Premières propriétés

Prop : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ inversibles
Alors :

1) $A^{-1}$ est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$

2) !! $AB$ est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) Si $p \in \mathbb{N}$, $A^p$ est inversible et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

Notation : Si $A$ est inversible et si $p \in \mathbb{N}$, on note

$$A^{-p} := (A^{-1})^p$$

Corollaire : $p \in \mathbb{N}^*$ ; $A_1, A_2, \dots A_p \in M_n(\mathbb{K})$ inversible
alors $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p)$ est inversible

et $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p)^{-1} = A_p^{-1} \times A_{p-1}^{-1} \times \dots \times A_1^{-1}$

démo : par récurrence

## 3) Invariance dans $GL_n(\mathbb{K})$ !!

Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$

alors : 1) a) $AP \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$
b) $PA \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$

2) $PAP^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$

démo : ⑦

## 4) Transposition et inversibilité

Prop : $A \in M_n(\mathbb{K})$

1) A inversible $\Rightarrow$ $A^T$ inversible
2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ si $A \in GL_n(\mathbb{K})$

### Complément

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$

Osq $AP \in GL_n(\mathbb{K})$

Mq $A \in GL_n(\mathbb{K})$

Or !! $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par produit

$$\text{Or}\quad \left.\begin{array}{l} AP \in GL_n(\mathbb{K}) \\ P \in GL_n(\mathbb{K}) \\ P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}) \end{array}\right\} \text{ donc } (AP)P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ ie } A \in GL_n(\mathbb{K})$$

- Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$

alors : $AB \notin GL_n(\mathbb{K})$

idée de la démo :

si $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ on note $C := (AB)^{-1}$

On a $(AB)C = I_n$ et donc $A(BC) = I_n$

donc A inversible à droite

Mais !! (cf + tard) : pour les matrices carrées, on a :

inv $\Leftrightarrow$ inv à droite $\Leftrightarrow$ inv à gauche

autre démo :

on verra + tard :

$$\forall n \in M_n(\mathbb{K}),\ M \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det M \neq 0$$

et $\forall M, N \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(M_n) = \det(M)\det(N)$

donc, si $A, B$ ne sont pas inversibles alors

$\det(A) = \det(B) = 0$

donc $\det(AB) = 0$. donc $AB \notin GL_n(\mathbb{K})$

## Démo de $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Osq $A$ inversible

Soit $B$ l'inverse de $A$

On a $AB = BA = I_n$ $(*)$

On transpose $(*)$

$$B^T A^T = A^T B^T = I_n^T = I_n$$

ie $A^T$ est inversible et $(A^T)^{-1} = B^T$

or $B = A^{-1}$

donc $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

## 5) Théorème d'inversibilité unilatérale

Théorème : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

alors les assertions suivantes sont équivalentes

1) $AB = I_n$

2) $BA = I_n$

3) $A$ inversible et $A^{-1} = B$

$R^x$

Rq : ⓘ?

Soit $E$ un ens. Soient $f : E \to E$

alors : $\exists g : E \to E : f \circ g = Id_E$

$$\Updownarrow$$

$f$ surjective

démo : + tard

Rq : Soit E un ens. fini
Soit $f : E \to E$ alors
$f$ injective $\iff$ $f$ surjective $\iff$ $f$ bijective

## 6) Moyens de reconnaître une matrice non inversible

**Proposition :**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors

1) Si A possède une colonne nulle, alors A n'est pas inversible

2) De même, si A possède une ligne nulle, alors A est non inversible

démo :

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que
$\exists j_0 \in [\![1, n]\!] : C_{j_0}(A) = 0_{n,1}$
Fixons un tel $j_0$
On raisonne par l'absurde
On suppose que A est inversible
On a donc $A A^{-1} = I_n = A^{-1} A$
On a $C_{j_0}(A^{-1}A) = A^{-1} C_{j_0}(A) = 0_{n,1}$
Or, $C_{j_0}(I_n) = \varepsilon_{j_0} \neq 0_{n,1}$
absurde

2) On utilise la transposition
Mq A inv $\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], L_i(A) \neq 0_{1,n}$
Osq A inv, on a $A^T$ inv
Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a d'après 1) $C_i(A^T) \neq 0_{n,1}$
Or $C_i(A^T) = L_i(A)^T$. d'où le résultat

## Def !!

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in \mathbb{N}^*$

Soit $(X_1, \ldots, X_p) \in M_{n,1}(\mathbb{K})^p$

Une famille à p éléments de matrices colonnes (taille n)

(ex : $n = 3$ ; $p = 10$)

On dit que $(X_1, \ldots, X_p)$ est liée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{0\} : \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i = 0_{n,1} \quad (*)$$

(*) = <u>relation de liaison</u>

Rq : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On a $\alpha$ algébrique $\iff \exists\, n \in \mathbb{N}^*$ : $(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ liée

**Exemple :** $(n = 3, \ p = 4)$

Mq $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est liée

Mq $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est liée

💡 On cherche toutes les relaθ de liaisons

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{K}^*$

On a :

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_j C_j = 0_{3,1} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{R_\ell}{\iff} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Echelonnons A

$$A \sim_L \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{matrix}$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\underbrace{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3}_{\text{inconnues principales}} \ \textcircled{\lambda_4} \rightarrow \text{inconnue auxiliaire}$$

On a donc $(S) \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ t \\ t \end{pmatrix}, \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

CCL : $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $t = 1$ correspond à une relaO de liaison

ie $0C_1 - 4C_2 + C_3 + C_4 = 0_{3,1}$

donc $(C_1, C_2, C_3, C_4)$ est liée

**Rq !!** On verra + tard que

$$p > n \Rightarrow \forall (X_1, \dots, X_p) \in M_{n,1}(\mathbb{K})^p \, , \, (X_1, \dots X_p) \text{ liée}$$

Rq : Déf analogue pour des matrices lignes liées

**Prop :** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

1) Si les colonnes de A sont liées, alors A est non inversib
2) Si les lignes de A sont liées, A est non inversible

**Application :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \underset{\overset{\uparrow}{💡 \, R^{x}}}{\notin} GL_3(\mathbb{R})$$

**Démo :**

On suppose que les colonnes de A sont liées

Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j(A) = 0_{n,1}$$

💡 On a traduit "les colonnes de A sont liées"

On pose $\lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

On a $A\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j(A)$

💡 !!! $R^{x}$ : interprétation matricielle d'une relation de liaison

On suppose par l'absurde que A est inversible

On a $A^{-1} A \lambda = I_n \, 0_{n,1}$

donc, on a $\lambda = 0_{n,1}$ absurde

donc, $A$ n'est pas inversible

$$\begin{tikzcd} & A^{-1}(A\lambda) = A^{-1} O_{n,1} \\ A^{-1} A \lambda \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (A^{-1}A)\lambda = I_n \lambda \end{tikzcd}$$

# VII. Ensembles de matrices remarquables

## 1) Matrices diagonales

. Ce sont les matrices s'écrivant $\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ où les $a_i \in \mathbb{K}$

On pourra noter $D_n(\mathbb{K})$ l'ens. de ces matrices

et $\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$

. Les matrices scalaires ou homothéties sont les $\lambda I_n$ ie les : $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$

L'ens. de ces matrices est noté $\mathbb{K}.I_n$

**Fait** $A \in M_n(\mathbb{K})$

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ Alors,

1) $A \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \left( a_1 C_1 \,\middle|\, a_2 C_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_n C_n \right)$

où les $C_j$ sont les colonnes de $A$

2) $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_1 L_1 \\ a_2 L_2 \\ \vdots \\ a_n L_n \end{pmatrix}$

où les $L_i$ sont les lignes de $A$

<u>démo :</u> avec les techniques en colonnes du produit

Rappel : $\forall j,\ C_j(AB) = A\,C_j(B)$

<u>Corollaire :</u>

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_1 b_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

<u>Proposition</u> : $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$
alors :

1) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$ inversible $\iff \forall i,\ a_i \neq 0$

2) Dans ce cas, on a $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & & \\ & 1/a_1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

<u>démo :</u>

$\Leftarrow$ Osq $\forall i,\ a_i \neq 0$. Mq $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$ inversible.

On a $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I_n$

de m̂, $\begin{pmatrix} 1/a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = I_n$

$\Rightarrow$ On montre la contraposée

ie Mq $\exists i_0 : a_{i_0} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ non inversible

Osq $\exists i_0 : a_{i_0} = 0$ . On fixe un tel $i_0 \in [\![1, n]\!]$

donc, $C_{i_0}\left(\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\right) = 0_{n,1}$

donc $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \notin GL_n(\mathbb{K})$

Rq : On verra que $\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\right) = \prod_{i=1}^{n} a_i$

## 2) Matrices triangulaires supérieures

**Déf:** Une matrice triang. sup. est une matrice qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Une matrice strictement triang. sup. s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

ex : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est strict. triang. sup.

On note $T_n(\mathbb{K})$ l'ens. des matrices triangulaires supérieures
On a $T_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$

## Proposition

1) $T_n(\mathbb{K})$ est stable par produit
ie $\forall M, N \in T_n(\mathbb{K})$ , $MN \in T_n(\mathbb{K})$

2) De plus, on a : $\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_1 b_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n b_n \end{pmatrix}$

Ie dans un produit de matrices triang. sup. les coeffs diag. du produit sont les produits des coeffs diagonaux

## Exemple :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{8} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} \end{pmatrix} \\ & \quad\quad 2\times 4 \quad -1\times 6 \end{array}$$

## Théorème !!!

Soit $M \in T_n(\mathbb{K})$. Alors

1) $M$ inversible $\Longleftrightarrow \forall i \in [\![ 1, n ]\!]$ , $m_{ii} \neq 0$

2) Dans ce cas, $M^{-1} \in T_n(\mathbb{K})$

Rq : donc $\left\{ M \in T_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \forall i,\ m_{ii} \neq 0 \right\}$

muni du produit matriciel est un groupe

Rq : Si $M \in T_n(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$
alors $\forall i,\ (M^{-1})_{ii} = \dfrac{1}{m_{ii}}$

démo du thm : + tard

## 3) Espaces $T_n^{(p)}(\mathbb{K})$

Soit $M \in T_n(\mathbb{K})$. Soient $i, j \in [\![ 1, n ]\!]$

A quelle condition $m_{ij} = 0$ ?

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ m_{ij} & & * \end{pmatrix} \qquad i > j \Rightarrow m_{ij} = 0$$

donc $T_n(\mathbb{K}) = \left\{ M \in M_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \forall i, j \in [\![ 1, n ]\!],\ i > j \Rightarrow m_{ij} = 0 \right\}$

. Soit M strictement triangulaire supérieur
Soient $i, j$
Alors : $m_{ij} = 0$ dès que $i \geqslant j$
ie dès que $i > j - 1$

## Bilan

M strict. triang. sup $\iff \forall i, j \ , \ i > j-1 \Rightarrow m_{ij} = 0$

On pose, si $p \in \mathbb{N}$ :

$$T_n^{(p)}(\mathbb{K}) = \left\{ M \in M_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \forall i, j \in [\![1, n]\!] \ , \ i > j - p \Rightarrow m_{ij} = 0 \right\}$$

On a :

$$T_n^{(0)}(\mathbb{K}) \iff \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$T_n^{(2)}(\mathbb{K}) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0^{a_1} & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 0^{a_{n-2}} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_n^{(p)}(\mathbb{K}) \iff \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & * \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}}\right\} p \text{ lignes}$$

On a $T_n^{(n)}(\mathbb{K}) = \{ 0_n \}$ et $\forall p \geq n \ , \ T_n^{(p)}(\mathbb{K}) = \{ 0_n \}$

## Exemple !!!

On note :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$$

Calculer $N^2$, $N^3$, $N^4$, $N^5$, etc ...

On a $N^2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in T_n^{(2)}(\mathbb{K})$

Puis $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in T_n^{(3)}(\mathbb{K})$

$N^4 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$N^5 = 0_5$

Proposition : Soient $p, q \in \mathbb{N}$ alors :

$\forall M \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$, $\forall N \in T_n^{(q)}(\mathbb{K})$, $M \times N \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$

Application : $p = q = 0$

$\forall M \in T_n(\mathbb{K})$, $\forall N \in T_n(\mathbb{K})$, $MN \in T_n(\mathbb{K})$

Démonstration : Soient $M \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et $N \in T_n^{(q)}(\mathbb{K})$

Mq $MN \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$

reformulation $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $i > j-(p+q) \Rightarrow (MN)_{i,j} = 0$

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ tq $i > j-(p+q)$ (**)

Mq $(MN)_{i,j} = 0$

On a $(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{kj}$

Mq $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $m_{ik} n_{kj} = 0$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$

On distingue deux cas :

1er cas : Osq $i > k - p$

Ĉ $M \in T_n^{(p)}(\mathbb{K})$, on a $m_{ik} = 0$

donc $m_{ik} n_{kj} = 0$

2ème cas : Osq $i \leqslant k - p$ (*)

💡 On fait confiance aux inégalités
Naturellement, la bonne condition va apparaître

(*) donne $-i \geqslant p - k$ qu'on ajoute à (**)

On a $i - i > j - (p+q) + p - k$

$0 > j - q - k$

ie $k > j - q$

Or $N \in T_n^{(q)}(\mathbb{K})$ donc $n_{kj} = 0$

CCL : $\forall k$, $m_{ik} n_{kj} = 0$

donc $(MN)_{ij} = 0$

donc $MN \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$

## Remarque :

Autre preuve possible :

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ tq $i > j - (p+q)$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$

Mq $m_{ik} n_{kj} = 0$

Raisonnons par l'absurde

Osq "on est ds le cas défavorable pour $m_{ik}$ et pour $n_{kj}$

ie osq $i \leq k - p$ et $k \leq j - q$

On a alors $i + k \leq k + j - (p+q)$

donc $i < j - (p+q)$ : absurde

CCL : on a $i > k - p$ ou $k > j - q$

donc $m_{ik} = 0$ ou $n_{kj} = 0$

donc $m_{ik} n_{kj} = 0$

$(MN)_{ii} = m_{ii} n_{ii}$

## Démo :

Soient $M, N \in T_n(\mathbb{R})$ ; soit $i \in [\![1, n]\!]$

car $N \in T_n^{(0)}(\mathbb{K})$

$$\text{On a : } (MN)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{ki} \underset{\uparrow}{=} \overbrace{m_{ii} n_{ii}}^{k=i} + \sum_{k>i} m_{ik} \overset{\boxed{=0}}{\boxed{n_{ki}}} + \sum_{k<i} \underset{\boxed{=0}}{\boxed{m_{ik}}}$$

on coupe la $\Sigma$ en 3

car $M \in T_n^{(0)}(\mathbb{K})$

Rq ! Ceci se transpose exactement aux matrices triang. inférieures

$M$ triang. inf $\Leftrightarrow$ $M^T$ triang. sup. $\in T_n(\mathbb{K})$

## 4) Matrices symétriques / antisymétriques

Déf : $M \in M_n(\mathbb{K})$

a) $M$ est symétrique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall i, j$, $m_{ij} = m_{ji}$

On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ens. de ces matrices

b) $M$ antisymétrique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall i\ j$, $m_{ij} = - m_{ji}$

On note $A_n(\mathbb{K})$ ces matrices

Fait : $M \in M_n(\mathbb{K})$

a) $M \in S_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow M^T = M$

b) $M \in A_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow M = -M^T$

Application :
Pour mq $M \in S_n(\mathbb{K})$, on calcule $M^T = \dots = M$

Fait : $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont stables par CL

a) $\forall A, B \in S_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(A + \lambda B) \in S_n(\mathbb{K})$
b) $\forall A, B \in A_n(\mathbb{K})$ ———————— $A_n(\mathbb{K})$

## Remarque

1) On note P : " $\forall A, B \in S_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B \in S_n(\mathbb{K})$ "

Q : " $\forall A, B \in S_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda A + \mu B \in S_n(\mathbb{K})$ "

Mq $P \iff Q$ :

. $Q \Rightarrow P$ : ok $\left( \begin{array}{l} \text{on prend } \lambda \leftarrow 1 \\ \qquad\qquad \mu \leftarrow \lambda \end{array} \right)$

. $P \Rightarrow Q$ : Qsq P mq Q.

Soient $A, B \in S_n(\mathbb{K})$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

D'après P pour $\lambda \leftarrow \frac{\mu}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$

On a $A + \frac{\mu}{\lambda} B \in S_n(\mathbb{K})$

D'après P pour : $A \leftarrow O_n$

$B \leftarrow A + \frac{\mu}{\lambda} B \in S_n(\mathbb{K})$

$\lambda \leftarrow \lambda$

On a : $O + \lambda \left( A + \frac{\mu}{\lambda} B \right) \in S_n(\mathbb{K})$ ie $\lambda_a + \mu B \in S_n(\mathbb{K})$

2) On pourrait montrer par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall (A_i)_{1 \leq i \leq p} \in S_n(\mathbb{K})^p, \ \forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p, \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i \in S_n(\mathbb{K})$$

⚠ Ni $S_n(\mathbb{K})$, ni $A_n(\mathbb{K})$ ne sont stables par produit

Contre-exemple :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$$

et $BA$ = on inverse les colonnes de B $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{R})$

💡 technique classique !!

On pose :

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$ diagonale par blocs

$$\widetilde{B} := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

ie $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)$ et $\widetilde{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)$

💡 Calcul par blocs

On a $\widetilde{B}\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} BA & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$

$\notin S_n(\mathbb{R})$

Rq : Si M, N sont triang. sup par blocs alors MN l'est aussi et les blocs diagonaux de MN sont les produits des blocs diag. de M par ceux de N

(?) ctre-exemple de $A_n(\mathbb{K})$ stable par produit

(?)$^{!!!}$ Mq $\forall\, M \in M_n(\mathbb{K}),\ \exists!\, (S, A) \in S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K}) : M = S + A$

Fait : $M \in A_n(\mathbb{K}) \implies \forall i,\ m_{ii} = 0$

## VIII) Systèmes linéaires et matrices inversibles

### 1) Matrices élémentaires

Ce sont les matrices $E_{ij} := \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & \underset{j\text{-ième colonne}}{1} & 0 \end{pmatrix} i\text{-ième ligne} \quad \in M_{np}(\mathbb{K})$

ex, pour $n = 4$, on a $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Fait : Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$

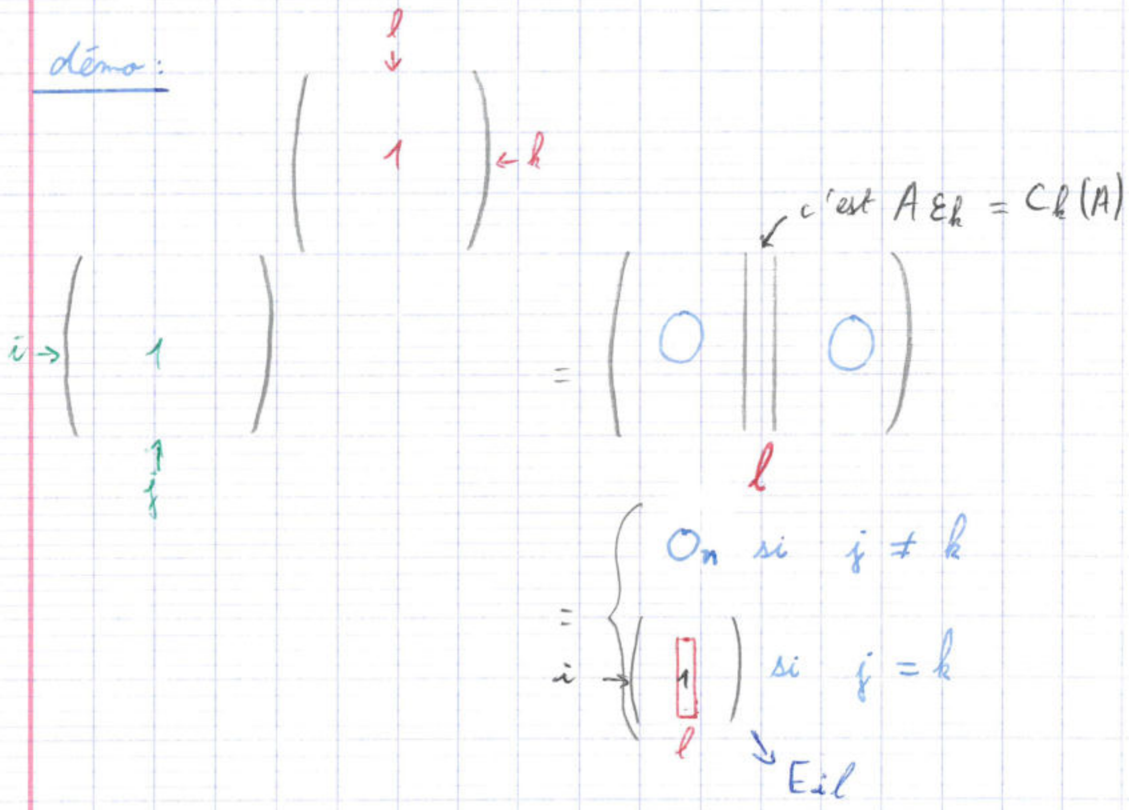
alors $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{ij}$

**Proposition** : Soient $i, k, j, l \in [\![1, n]\!]$

alors $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$

(dans $M_n(\mathbb{K})$)

**démo :**



## 2) Matrices opérations élémentaires

Ce sont les matrices d'un des trois types suivants

### a) Matrice de transposition

$$X_{ij} := \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{array}\right) \\ \uparrow\ \ \uparrow \\ i\ \ \ j \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$$

ex : $n = 4$

$$X_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fait :
- $X_{ij} = X_{ji}$
- $X_{ij} \in S_n(\mathbb{R})$
- $X_{ii} = I_n$

## b) Matrices de dilatation

$$D_i(\lambda) := \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & 1 & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}) \quad \Bigg| \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{K}^* \\ i \in [\![1, n]\!] \end{array}$$

## c) Matrices de transvection

$$T_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & \overset{\text{colonne } j}{\overset{\downarrow}{\alpha}} \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{K} \\ i \neq j \end{array}$$

(?) Exprimer ces matrices à l'aide de $I_n$ et des $E_{ij}$

### Fait

a) $X_{ij} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $X_{ij}^{-1} = X_{ij}$

b) $D_i(\lambda) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$

c) $T_{ij}(\alpha) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$

Rq : $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

### Démonstration :

a) Mq $X_{ij}^2 = I_n$ : par interprétation en colonnes (?)

b) $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$ : matrices diagonales

c) On a :

$$T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}$$

On a $T_{ij}(\alpha)\, T_{ij}(-\alpha) = (I_n + \alpha E_{ij})(I_n - \alpha E_{ij})$

$$= I_n \overset{=0}{\boxed{-\alpha E_{ij} + \alpha E_{ij}}} - \alpha^2 E_{ij} E_{ij}$$

Or $i \neq j$

donc $E_{ij} E_{ij} = 0_n$
car $E_{ij} E_{kl} = (\ldots)$

donc $T_{ij}(\alpha)\, T_{ij}(-\alpha) = I_n$

de m̂, $T_{ij}(-\alpha)\, T_{ij}(\alpha) = I_n$

## 3)! Equivalences par lignes : le point de vue matriciel

Rappel : $A, B \in M_{np}(\mathbb{K})$
On dit qu'elles sont $\sim_L$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ on peut passer de $A$ à $B$ par échange de lignes, dilatation ou transvection

## Calculs pélininaires

Soit $M \in M_{np}(\mathbb{K})$ qu'on écrit $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$

. $X_{ij} M$ ?

On a $X_{ij} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon_1} \\ \widetilde{\varepsilon_j} \\ \widetilde{\varepsilon_i} \\ \widetilde{\varepsilon_n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \leftarrow \text{ligne } j \\ \\ \end{matrix}$

où $\widetilde{\varepsilon_k} = (0, \ldots, 0\, \underset{\overset{\uparrow}{k}}{1}\, 0 \ldots 0) = \varepsilon_k^T$

donc,

$$X_{ij} M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \leftarrow \text{ligne } j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

C'est M après échange de $L_i$ et $L_j$

. $$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

. $$T_{ij}(\alpha) M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \alpha L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

**Prop:** $A, B \in M_{np}(\mathbb{K})$

alors $A \sim_L B$

$$\Updownarrow$$

$\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\exists E_1, \dots, E_N$ matrices d'opé élémentaires : $B = E_N \dots E_2 E_1 A$

Rq : Dans cet énoncé, on a $\forall i$, $E_i \in GL_n(\mathbb{K})$

donc, on a $E_N \dots E_2 E_1 A \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\text{c'est } \underbrace{\prod_{k=0}^{N-1}}_{N \text{ termes dans ce produit}} E_{N-k}$$

**Théorème (Gauss-Jordan)**

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$
Alors il existe $A' \in M_{np}(\mathbb{K})$ échelonnée réduite tq
$E \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A' = EA$

## 4) Echelonnement des matrices inversibles

**Proposition :** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) La réduite échelonnée de $A$ est $I_n$
2) $A \sim_L I_n$
3) $A \in GL_n(\mathbb{K})$

**Démo**

1) $\Rightarrow$ 2) : ok

2) $\Rightarrow$ 3) : Qsq $A \sim_L I_n$
Soit donc $E \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $I_n = EA$ $(*)$
Or, $E \in GL_n(\mathbb{K})$ ; on a donc $E^{-1} = A$ (on a multiplié $(*)$ par $E^{-1}$.
donc $A \in GL_n(\mathbb{K})$

3) $\Rightarrow$ 2) : Qsq $A \in GL_n(\mathbb{K})$
On échelonne réduit $A$. Soit donc $E \in GL_n(\mathbb{K})$ tq

$$EA = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{M}$$

Montrons que la matrice M possède n pivots.

On aura donc $M = I_n$

On raisonne par l'absurde et osq le nb de pivots est $< n$

donc : $\exists i_0 \in [\![ 1, n ]\!] : \forall i \geq i_0 , L_i(M) = 0_{1,n}$

ie M se termine par des lignes nulles

En particulier, la dernière ligne est nulle :

$$L_n(M) = 0_{1,n}$$

Or, si une matrice possède une ligne nulle, elle n'est pas inversible

De plus, $\left.\begin{array}{l} A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ par hyp} \\ E \in GL_n(\mathbb{K}) \end{array}\right\}$ donc EA ie M est inversible

Absurde.

Donc EA possède n pivots donc $EA = I_n$

Or, on peut prendre E un produit de matrices d'opérations élémentaires

donc la réduite échelonnée de A est $I_n$.

## Application au calcul de l'inverse

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

- On veut a) savoir si A est inversible
  b) Si elle l'est, je veux calculer $A^{-1}$
- On réalise cela à l'aide d'un seul calcul
- On échelonne / réduit A en A'

Deux cas possibles :

1°/ $A' \neq I_n$ : d'après la prop précédente $A \notin GL_n(\mathbb{K})$

2°/ $A' = I_n$

On a donc trouvé $E_1, \dots, E_N$ matrices d'opérations élémentaires tq

$$I_n = (E_N \dots E_2 E_1) A$$

On a donc : $A^{-1} = E_N \dots E_2 E_1$

On remarque ici que $E_N \dots E_2 E_1 = E_N \dots \left(E_2 (E_1 I_n)\right)$

donc, en appliquant à $I_n$ les m̂ opérations élémentaires que celles que j'ai appliquées à A
en fin de compte, on obtient $A^{-1}$

Exemple : On note

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

On échelonne réduit A et on appliq en m̂ temps à $I_3$ les m̂ opérations

On a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on échelonne cette partie

on trouvera $A^{-1}$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

Conclusion :

A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

? . A - t - on :

$$\left.\begin{array}{l} A \in S_n(\mathbb{K}) \\ A \in GL_n(\mathbb{K}) \end{array}\right\} A^{-1} \in S_n(\mathbb{K})$$

. $\hat{m}$ exo avec $A_n(\mathbb{K})$

## 5) Théorème d'inversibilité unilatérale

Théorème : $A \in M_n(\mathbb{K})$
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $AB = I_n$
2) $BA = I_n$
3) A est inversible et $A^{-1} = B$

Démo :

1) => 2) . Osq $AB = I_n$ (*)
On échelonne / réduit A en A'
Soit donc $E \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = EA$

On multiplie $(*)$ à gauche par $E$

D'où : $EAB = E$

ie $A'B = E$

Mq $A' = I_n$ ie mq $A'$ a $n$ pivots

Osq le nb de pivots de $A'$ est $< n$

donc $L_n(A') = 0_{1,n}$

Or, $L_n(\underbrace{A'B}_{E}) = L_n(A')B = 0_{1,n}B = 0_{1,n}$

donc $L_n(E) = 0_{1,n}$ : absurde (car $E \in GL_n(\mathbb{K})$)

CCL : $A' = I_n$

D'après 4), on a donc $A \in GL_n(\mathbb{K})$

Or, $AB = I_n$

donc $A^{-1}AB = A^{-1}$ ie $B = A^{-1}$

donc $BA = I_n$

2) => 3) : Osq $BA = I_n$

On fait la même preuve que pour 1) => 2) mais pour $B$.

On en déduit que $AB = I_n$ donc $A$ inversible et $A^{-1} = B$

3) => 1) : c'est la définition

## 6) Systèmes de Cramer !!!

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $A \sim_L I_n$

2) $A$ est inversible

3) $\forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ a une uniq solution

4) $\forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ admet au moins 1 solution
5) $\forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ a au plus 1 solution
6) Le système $AX = \tilde{0}_{n,1}$ n'admet que la sol. nulle

**Rq** : On aura donc si $A$ n'est pas inversible

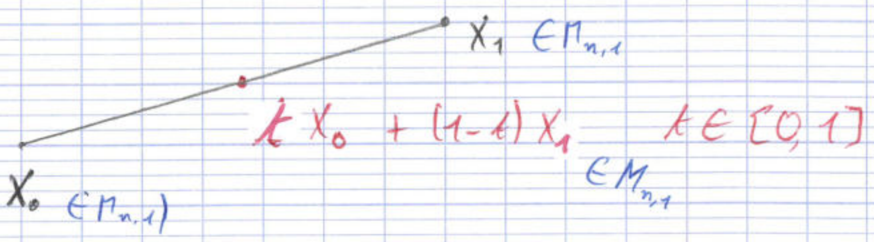
1) $\exists B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ : $AX = B$ n'a pas de solutions
2) $\exists B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ : $AX = B$ a au moins deux solutions
3) $\exists X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$ : $AX_0 = 0_{n,1}$

**Rq 2** :

(?) Mq $AX = B$ admet au moins deux solutions $\Rightarrow$ $AX = B$ a une $\infty^{\text{té}}$ de solutions

idée de démo : On note $X_0 \neq X_1$ des solutions de $AX = B$

puis



**Rq 3** : Si on a $X_0 \neq 0_{n,1}$ tq $AX_0 = 0_{n,1}$

Or, $R^{x}$ : $AX_0$ est une CL des colonnes de $A$

Si j'écris $X_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ avec les $\lambda_i$ non tous nuls

alors, on a $AX_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j(A)$

donc, on a une relation de liaison entre les $C_j(A)$

## Démo

1) => 2) : Osq $A \sim_L I_n$ : Mq $A$ inversible cf 4)

2) => 3) : Osq $A$ inv. Mq $\forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$
a une unique solution

Cela doit être $R^x$ : analyse- synthèse

Soit $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tq $AX = B$

alors, on a

$$X = \underbrace{\underbrace{A^{-1}}_{\in M_n(\mathbb{K})} \underbrace{B}_{\in M_{n,1}}}_{M_{n,1}(\mathbb{K})}$$

donc, on a l'unicité

Rq : dans une analyse - synthèse, si à la fin de l'analyse, on ne trouve qu'un seul candidat possible alors on a l'unicité.

démo : en effet, si $X_1, X_2$ tq $AX_1 = B$
$AX_2 = B$

alors $X_1 = A^{-1}B$ et $X_2 = A^{-1}B$

donc $X_1 = X_2$

Existence : On pose $X := A^{-1}B$

On a $AX = AA^{-1}B = I_n B = B$

ie $X_0$ est sol. de $AX = B$

3) => 4) : ok

4) => 5)

Osq $\forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ a au moins 1 solution $(*)$

1°) on va particulariser (*) avec des B simples
2°) idée d'Anouk

Soit $j \in [\![1, n]\!]$ , grâce à (*) Soit $X_j \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tq $AX_j = \mathcal{E}_j$

💡 Idée : On note $B := \left( X_1 \middle| X_2 \middle| X_{\dots} \middle| X_n \right)$

En effet, on a regardé les systèmes

$$AX = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \dots, \quad AX = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

$X_1$ sol. $\qquad$ $X_2$ est sol. $\qquad$ $X_n$ est sol.

On a $AB = \left( \mathcal{E}_1 \middle| \mathcal{E}_2 \middle| \dots \middle| \mathcal{E}_n \right)$ grâce aux techniques de calcul en colonne

car $\forall j$, 
$$\begin{aligned} C_j(AB) &= A\, C_j(B) \\ &= A X_j \\ &= \mathcal{E}_j \end{aligned}$$

ie $AB = I_n$
donc A inversible (thm d'inv. unilatéral)
donc $\forall B$, $AX = B$ a une uniq. solution
donc $\forall B$, $AX = B$ a au plus une sol

5) $\Rightarrow$ 6) : Osq $\forall B$, $AX = B$ a au plus une sol.

Mq $AX = 0_{n,1}$ n'a que $0_{n,1}$ comme solution

Facile car $0_{n,1}$ est solution de $AX = 0_{n,1}$
Or $AX = 0_{n,1}$ a au plus une solution par hypothèse
donc, c'est la seule

6) $\Rightarrow$ 1) :

On montre la contraposée
Ie mq $A$ non inv $\Rightarrow \exists X_0 \neq 0 : AX_0 = 0$
Osq $A$ non inv.
alors $A^T$ non inversible
On échelonne / réduit $A^T$. Soit donc $E \in GL_n(\mathbb{K})$
tq $A' = EA^T$
où $A'$ est la réduite échelonnée de $A^T$
Or $A^T \notin GL_n(\mathbb{K})$
donc $L_n(A^T) = 0_{1,n}$
Ie $\tilde{\varepsilon}_n A' = 0_{1,n}$ (technique en ligne)
Ie $\varepsilon_n^T A' = 0_{1,n}$ (**)
ie $\varepsilon_n^T E A^T = 0_{1,n}$
On transpose :

$$(A^T)^T E^T (\varepsilon_n^T)^T = 0_{n,1}$$

$$A \underbrace{E^T \underset{\downarrow\, M_{n,1}}{\varepsilon_n}}_{M_{n,1}} = 0_{n,1}$$

On a $E^T \varepsilon_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$
De plus $E^T \in GL_n(\mathbb{K})$
donc $E^T \varepsilon_n \neq 0_{n,1}$ (mini absurde : $E^T \varepsilon_n = 0$
alors $(E^T)^{-1} E^T \varepsilon_n = \varepsilon_n = 0$) absurde.

donc, on a trouvé $X_0 \neq 0_{n,1}$ tq $AX_0 = 0_{n,1}$

Définition: Un système $AX = B$ vérifiant l'une de ces assertions est appellé système de Cramer.

Proposition: $R^x$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que
"le seul $X^{\in M_{n,1}(\mathbb{K})}$ vérifiant $AX = 0_{n,1}$ est $X = 0_{n,1}$"
alors $A$ est inversible

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \left(\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}\right) \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$$

Application: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
Mq $A$ est inversible
💡 $R^x$ Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tq $AX = 0_{n,1}$
Mq $X = 0_{n,1}$
Si on y arrive, on a nécessairement $A \in GL_n(\mathbb{K})$

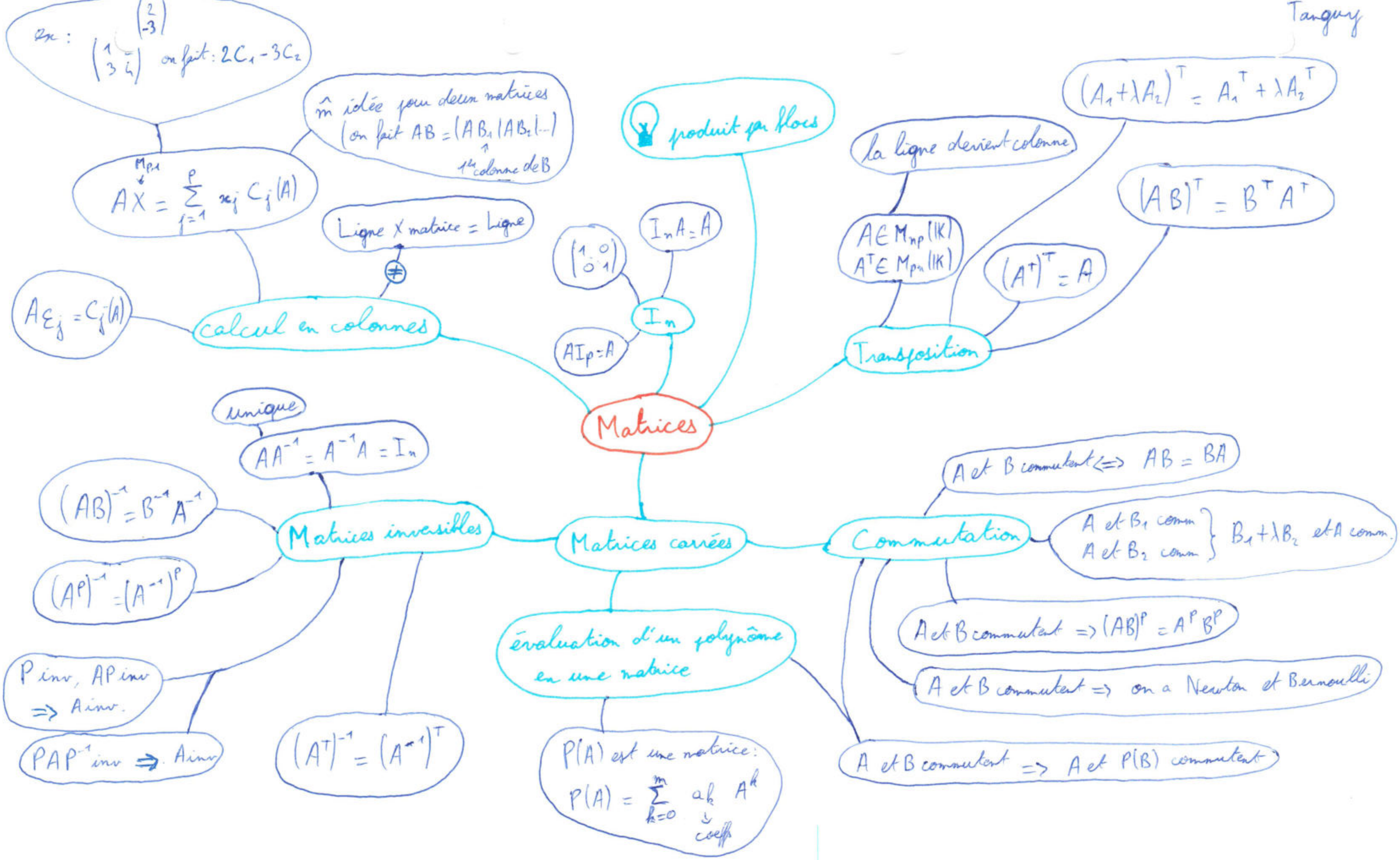
(?) Soit $A \in T_n(\mathbb{K})$ tq $\forall i\ a_{ii} \neq 0$
Mq $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} \in T_n(\mathbb{K})$

2) Mq $(\exists i_0 : a_{i_0 i_0} = 0) \Rightarrow A \notin GL_n(\mathbb{K})$

(?) a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit $T \in T_n(\mathbb{K})$
A-t-on $AT \in T_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A \in T_n(\mathbb{K})$ ?

b) et si $T \in T_n(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$

Tanguy



- **Matrices**
  - produit par blocs
  - $I_n$
    - $I_n A = A$
    - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
    - $AI_p = A$
  - Transposition
    - $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ <br> $A^T \in M_{pn}(\mathbb{K})$
      - la ligne devient colonne
    - $(A_1 + \lambda A_2)^T = A_1^T + \lambda A_2^T$
    - $(A^T)^T = A$
    - $(AB)^T = B^T A^T$
  - calcul en colonnes
    - $A\varepsilon_j = C_j(A)$
    - $\overset{M_{p1}}{AX} = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j(A)$
      - Ex : $\begin{pmatrix} 1 & \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ on fait : $2C_1 - 3C_2$
      - m̂ idée pour deux matrices (on fait $AB = (AB_1 | AB_2 | \dots)$) ↑ 1re colonne de B
    - $\neq$ Ligne X matrice = Ligne
  - Matrices carrées
    - Matrices inversibles
      - $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
        - unique
      - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
      - $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$
      - P inv, AP inv => A inv.
      - $PAP^{-1}$ inv $\Rightarrow$ A inv
      - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
    - évaluation d'un polynôme en une matrice
      - P(A) est une matrice : $P(A) = \sum_{k=0}^{m} \underset{\text{coeff}}{a_k} A^k$
    - Commutation
      - A et B commutent <=> AB = BA
      - A et $B_1$ comm, A et $B_2$ comm } $B_1 + \lambda B_2$ et A comm.
      - A et B commutent => $(AB)^p = A^p B^p$
      - A et B commutent => on a Newton et Bernoulli
      - A et B commutent => A et P(B) commutent