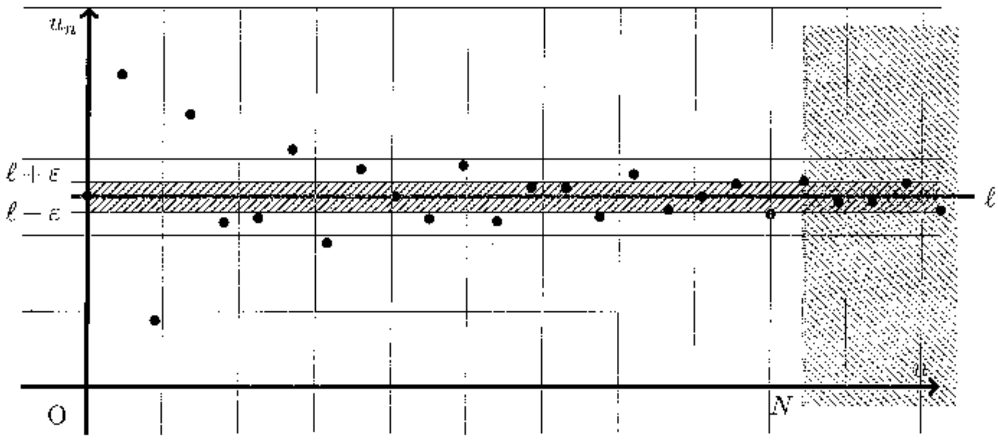
Chapitre 13

Suites



$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ u_n \in \left]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\right[$$

Dessin et formule pour $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Dans ce chapitre, on reprend l'étude des suites numériques, dans le prolongement de ce qui a été fait au lycée, mais de façon plus rigoureuse. Cette nouvelle approche, qui — déjà — est satisfaisante en elle-même, nous permettra d'aller beaucoup plus loin dans les méthodes et dans les résultats.

Chapitre 13 : Suites

Dans ce chapitre, E est un ensemble $\neq \emptyset$

I, Généralités

1) Définition

Déf : . Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E (indexée par $\mathbb{N}$)

est la donnée d'un élément $u_n \in E$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

. L'ens. des suites est noté $E^{\mathbb{N}}$

. On regarde aussi $E^{[\![n_0, +\infty [\![}$ pour $n_0 \in \mathbb{Z}$

. Une suite numérique est un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

. Une suite complexe : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Notation

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera notée aussi $(u_n)_{n\geq 0}$; $(u_n)_n$; (u_n) ; u

⚠ Surtout pas $u_n \to \in \mathbb{R}$ mais $(u_n)_n \to$ suite

idem $f(x) \in \mathbb{R}$ $f \to$ fonction

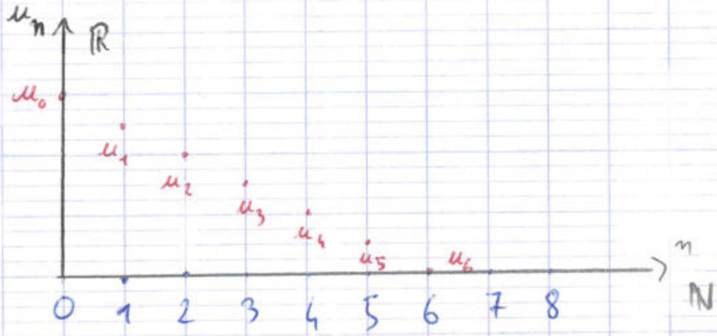
⚠ $\{1, 2, 3, 4 \dots\} = \{4, 1, 3, 2, \dots\}$

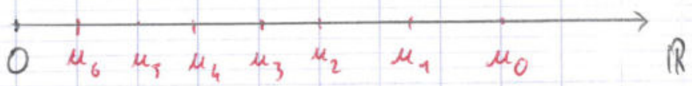
mais $(1,2,3\dots) = (n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (4, 8, 7, 1, \dots)$

2) Dessin d'une suite

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On peut dessiner $(u_n)_n$ de deux façons différentes



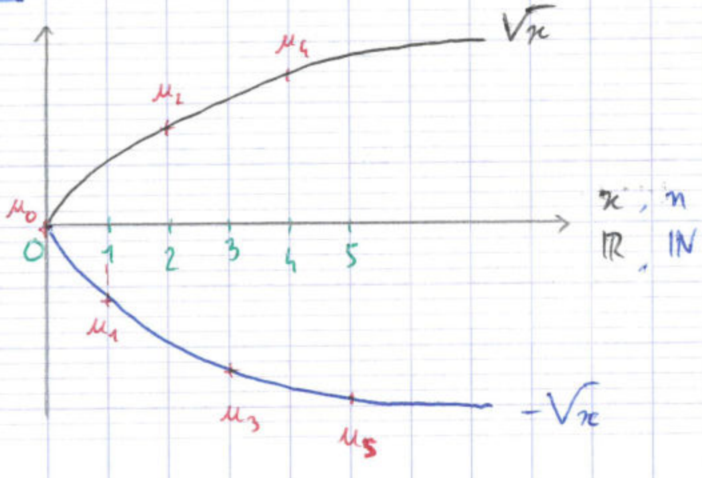


3) Modes de définition d'une suite

a) de façon explicite

ex : $u_n := (-1)^n \sqrt{n}$ si $n \geq 0$

Dessin :



Rq : On peut écrire

Notons $u := \left((-1)^n \sqrt{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

b) par récurrence

ex : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$u_0 = 1 \qquad u_1 = \sqrt{1+1} \qquad u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+1}}$

$u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}} \quad \dots$

R^x c'est une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$"
où $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$

On a $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$

autre exemple : $\begin{cases} u_0 = 1, \ u_1 = 42 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

"suite récurrente d'ordre 2"

Rq : on pose $X_n := \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ $n \geqslant 0$

On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

On note $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$: On a $\forall n$, $X_{n+1} = AX_n$

récurrence : $\forall n, X_n = A^n \cdot X_0$

. suite qui n'est pas du type $u_{n+1} = f(u_n)$ Δ piège

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} + n \end{cases}$$

$$\uparrow$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + n$$

. $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \quad n \geq 0 \end{cases}$$

c) suites définies implicitement

exemple :

Soit $n \geq 1$ et on note $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n + x - n$

On a 1°) $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$
2°) $f_n(0) = -n < 0$
3°) $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$

4°) $f_n \nearrow\nearrow$

D'après le TVI : $\exists! \, \alpha \geq 0 : f_n(x) = 0$

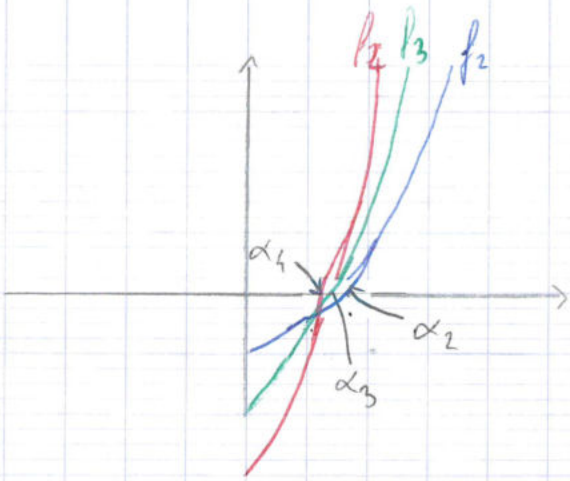
On note α_n ce nombre ≥ 0

Cela définit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$

Questions:

. Monotonie ? . limite de $(\alpha_n)_n$?

. Vitesse de convergence / divergence de $(\alpha_n)_n$?



RF de α_n $\begin{cases} \alpha_n \geqslant 0 \\ f(\alpha_n) = 0 \end{cases}$ ie $(\alpha_n)^n = n - \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Conjectures :

1) $\alpha_n \to 0$

2) $(\alpha_n)_n \searrow$ APCR → à partir d'un certain rang

3) Vitesse de $\alpha_n \to 0$

ok au brouillon

$\alpha_n \to 0$ ie "$\alpha_n \ll 1$"

ie $\alpha_n = o(1)$

"est équivalent à"

. $n \to +\infty$ donc $n - \alpha_n \sim n$

$\alpha_n = o(1)$

. RF : $\alpha_n^n \sim n$

. Ainsi : $\alpha_n \approx \sqrt[n]{n}$ → contradiction

A retenir : $\boxed{\sqrt[n]{n} \to 1}$

démo : $\mathbb{R}^x$ forme expo

$$\sqrt[n]{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^x}}{=} n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n)\right)$$

Or, $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$ par croissance comparée

Par composition des limites : $n^{1/n} \to \exp(0) = 1$

. Mais : osq $\alpha_n \to 1$

On a encore $n - \alpha_n \sim n$

Le $\hat{m}$ raisonnement reste valable

Question : $\alpha_n \to 1$ à quelle vitesse ie $\alpha_n - 1 \to 0$ à quelle vitesse ?

On $\frac{\exp(h) - 1}{h} \to \exp(0) = 1$

Astuce : taux d'accroissement

$$\cdot \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\frac{\ln(n)}{n}} = \frac{\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) - 1}{\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow{\text{par compo des limites}} 1$$

Rappel : $u_n \sim v_n \overset{\Delta}{\text{ssi}} \frac{u_n}{v_n} \to 1$

CCL : $\sqrt[n]{n} - 1 \sim \frac{\ln(n)}{n}$

ce qu'on écrit $\sqrt[n]{n} = 1 + \underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\to 0} + \underbrace{o(\sqrt[n]{n})}_{\text{non !}}$

car : $15{,}835\,t = 13\,t + 1{,}5\,t + 20\,kg + \underbrace{800\,kg}_{\text{non}}$

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

A.N : $300^{1/300} \simeq 1,01919$

$$1 + \frac{\ln(300)}{300} \simeq 1,01901$$

Rq : $1 + \frac{\ln(300)}{300} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(300)}{300}\right)^2$ est plus proche

car on a :

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \cdots$$

Rq : $\alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$

4) Suites extraites

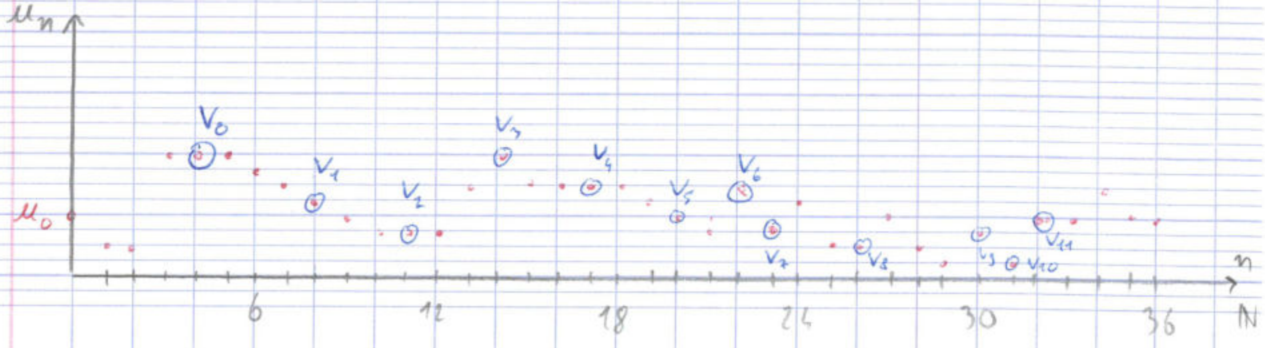
Déf : Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$

On dit que $(v_n)_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$:

$$\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ str. croissante} : \forall n,\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

On dit alors que φ est l'extractrice permettant d'obtenir $(v_n)_n$ à partir de la suite $(u_n)_n$.

Dessin :



Ici, $(u_{?})_n$ extraite de $u_n(n)$

φ ? $\varphi(0) = 4$
$\varphi(1) = 8$
$\varphi(2) = 11$
...

Exemple

$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\downarrow$

"la suite des termes d'indices pairs de $(u_n)_n$

Les extractrices sont :

$\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ elle est bien $\nearrow\nearrow$

et $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n+1$

Fait !! : Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\nearrow\nearrow$
alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$

démo : récurrence

. hérédité

$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$

car $\varphi \nearrow\nearrow$ — hypothèse de réc.

et on est dans $\mathbb{Z}$
donc $\varphi(n+1) \geq n+1$

démo alternative

$$\varphi(n) - \varphi(0) = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\varphi(k+1) - \varphi(k)}_{\substack{\geq 1 \\ \text{car } \varphi \nearrow\nearrow}}}$$ n termes

donc $\varphi(n) - \varphi(0) \geq n \cdot 1$

$$\varphi(n) \geq n + \underbrace{\varphi(0)}_{\in \mathbb{N} \text{ donc } \geq 0} \geq n$$

Rq : la relation " est extraite de " est :
. réflexive (sur elle-m̂)
. transitive ($\varphi \nearrow\nearrow$ et $\psi \nearrow\nearrow \Rightarrow \psi \circ \varphi \nearrow\nearrow$)
. antisymétriq [? $\varphi \nearrow\nearrow$ et $\psi \nearrow\nearrow$ tq $\psi \circ \varphi = Id_{\mathbb{N}}$
$\Rightarrow (\varphi = \psi = Id_{\mathbb{N}})$]

Rq : on montrera $u_n \to l \Rightarrow \forall \varphi \nearrow\nearrow$, $u_{\varphi(n)} \to l$

Rq : On montrera aussi :

$(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée $\Rightarrow \exists \varphi \nearrow\nearrow : (u_{\varphi(n)})_n$ converge

5) Monotonie

a) Suites (str) croissantes

Rappel : . $(u_n)_n \nearrow \overset{\Delta}{\text{ssi}}\ \forall n,\ u_{n+1} \geq u_n$
. $(u_n) \nearrow\nearrow \overset{\Delta}{\text{ssi}}\ \forall n,\ u_{n+1} > u_n$

Prop : Méthodes d'études de la monotonie
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- . $(\forall n, u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow (u_n)_n \nearrow$

  . $(\forall n, u_{n+1} - u_n > 0) \Rightarrow (u_n)_n \nearrow\nearrow$

- On suppose $\forall n, u_n > 0$

  . $\left(\forall n, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1\right) \Rightarrow (u_n)_n \nearrow$

  . $\left(\forall n, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1\right) \Rightarrow (u_n)_n \nearrow\nearrow$

Rq : On utilise le $2^{\text{ème}}$ – qd $(u_n)_n$ est "de type multiplicatif"

Ex : 2^n , $n!$, $\dfrac{(n+1)!}{3^n}$, $5 \exp(n)$
(R^x : $\exp(n) \Leftrightarrow 2^n$)

$(u_n)_n$ tq $\forall n$, $u_{n+1} = u_n^2$

Fait !! R^x : $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n, u_n \geq 0$

Alors, $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow$

b) Suites décroissantes

idem

II. !! Cas particuliers classiques et importants

1) Suites arithmético-géométriques

a) Ce sont les suites $(u_n)_n$ vérifiant une relation du type $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

b) Détermination du terme général (tg)

Exemple : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = 5u_n + 6 \ (*) \end{cases}$

Méthode :

1) On cherche le point fixe de $(*)$
Ie soit $\ell \in \mathbb{R}$ tq $\ell = 5\ell + 6$ $(RF)_\ell$

(ie $\ell = -3/2$)

2) On n'utilise pas la valeur explicite $\ell = -\frac{3}{2}$
On utilise à la place $(RF)_\ell$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} = 5u_n + 6$ $(*)$
$\ell = 5\ell + 6$ $(RF)_\ell$

On soustrait
On obtient : $u_{n+1} - \ell = 5(u_n - \ell)$

4) Ie la suite $(u_n - \ell)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison 5

5) Donc, $\forall n \geq 0$, $u_n - \ell = 5^n (u_0 - \ell)$

6) CCL

donc $\forall n \geq 0$, $u_n = -\frac{3}{2} + 5^n\left(1+\frac{3}{2}\right)$

c) Formule générale ($a \neq 1$)

(?) exo

2) Suites récurrentes d'ordre 2

$\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tq

(*) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n$

a) On dit que (u_n) satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

b) Polynôme / équation caractéristique

L'éq. caractéristique associée à (*) est $r^2 = ar + b$

Le polynôme caractéristique associé à (*) est

$$P := X^2 - aX - b$$

c) Théorème de structure !!

But : obtenir une expression complète de u_n

Théorème :

1) Si P admet deux racines distinctes (dans $\mathbb{K}$)

On note r_1 et r_2 ($\in \mathbb{K}$) ces racines.
Alors, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tq
$$\boxed{\forall n, \quad u_n = \lambda (r_1)^n + \mu (r_2)^n}$$

2) Si P admet une racine double (dans $\mathbb{K}$)

On la note r_0
Alors, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tq
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu)(r_0)^n$$

3) Cas réel à racines complexes

Osq $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Si P admet 2 racines $\in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ 1) ie $\Delta > 0$
P admet 1 racine double $\rightarrow$ 2) ie $\Delta = 0$
Osq $\Delta_P < 0$ ie que P possède deux racines complexes conjuguées
On les note $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$
Alors, il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tq
$$\forall n, \quad u_n = r^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta) \right)$$

Rq : 1) Pour trouver λ et μ, on utilise les conditions initiales (CI). Par ex, dans 1), on a :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases}$$ à résoudre en (λ, μ)

:-)

2) Pour mq 3) on utilise $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et 1)
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tq $\forall n$, $u_n = \lambda (r e^{i\theta})^n + \mu (r e^{-i\theta})^n$
Fixons n
On a $u_n = r^n (\lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta})$

? A partir de cette expr., mq 3)

Éléments de preuve

. Soit $r \in \mathbb{C}$ tq $P(r) = 0$
ie (RF) $r^2 - ar - b = 0$
Mq $(\lambda r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $(*)$ $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$
Soit $n \in \mathbb{N}$
On calcule $\lambda r^{n+2} - a \lambda r^{n+1} - b \lambda r^n$
$= \lambda r^n \underbrace{(r^2 - ar - b)}_{=0}$

. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifie $(*)$
Alors, toute CL de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifie encore $(*)$
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Mq $(\lambda u_n + \mu v_n)_n$ vérifie $(*)$

Soit n. On a
$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda \underbrace{(a u_{n+1} + b u_n)}_{\text{car } (u_n)_n \text{ vérifie } (*)} + \mu \underbrace{(a v_{n+1} + b v_n)}_{\text{idem}}$

$= a (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + b (\lambda u_n + \mu v_n)$

. donc r_1, r_2 sont racines
On a $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $(*)$

. Dernier argument

Si $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ vérifie $(*)$

et si $\begin{cases} u_0 = w_0 \\ u_1 = w_1 \end{cases}$ alors $\forall n, u_n = w_n$ (réc. d'ordre 2)

Cas racine double

On note $r_0 \in \mathbb{K}$ la racine double

1°) On a $(r_0^n)_n$ vérifie $(*)$

2°) Mq $(n r_0^n)_n$ vérifie $(*)$

Idée : racine double $\rightarrow$ $\underbrace{\alpha X^2 + \beta X + \gamma}_{-\frac{\beta}{2\alpha}}$

Ici : $\alpha = 1$, $\beta = -a$, $\gamma = -b$

ici, $r_0 = \dfrac{a}{2}$

On le transforme en (RF_1) : $2r_0 = a$

(RF_2) : $r_0^2 - a r_0 - b = 0$

On calcule : $(n+2) r_0^{n+2} - a(n+1) r_0^{n+1} - b n r_0^n$

$= n \underbrace{\left(r_0^{n+2} - a r_0^{n+1} - b r_0^n \right)}_{= 0 \text{ d'après } (RF_2)} + \underbrace{2 r_0^{n+2} - a r_0^{n+1}}_{(RF_1)}$

Rq : $\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$ peut aussi être écrit $A\cos(n\theta + \varphi)$

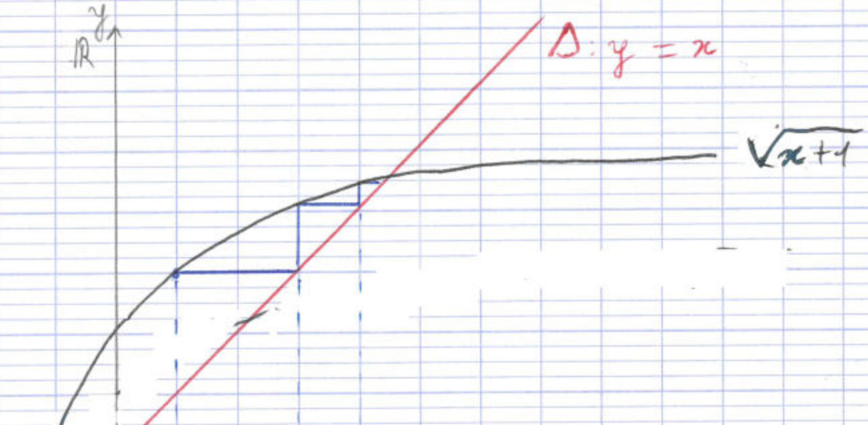
Ceci se généralise aux suites récurrentes d'ordre quelconque

3) Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

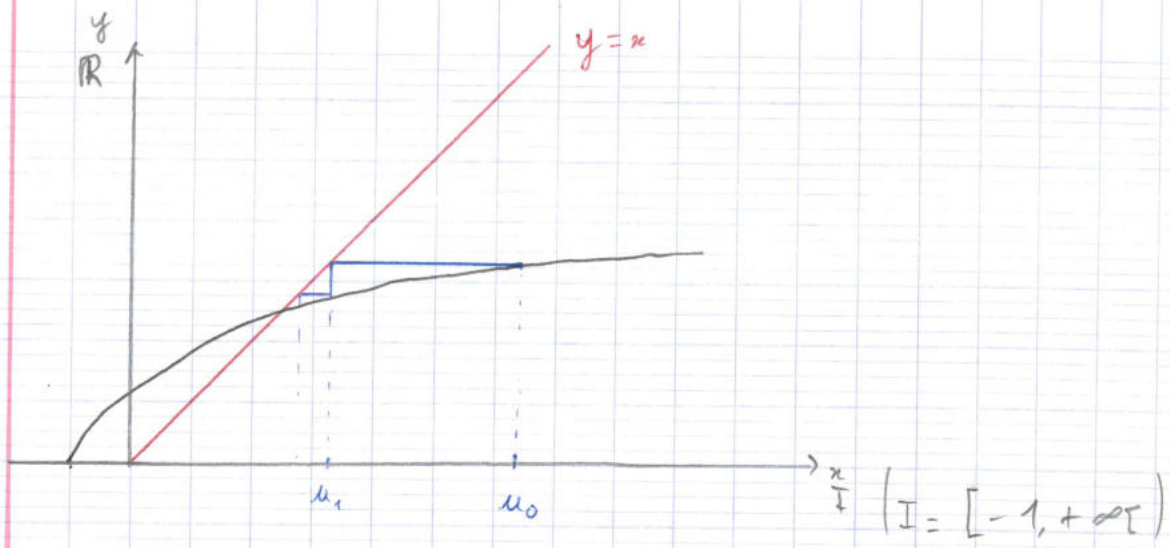
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Dessin

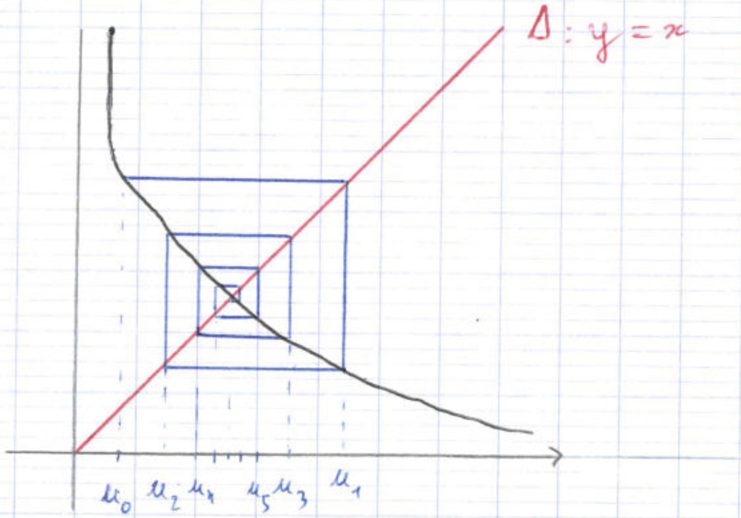
1°_ Cas croissant



$x = -1 \to$ je suis sur le bord de l'intervalle de déf.



2° _ Cas décroissant



b) Quelques remarques

1er cas : $(u_n)_n \nearrow$ et $u_n \to l$ et l est un pt fixe de f $\quad \forall n,\ u_n \leq l$

2ème cas : $(u_n)_n \searrow$ et $u_n \to l$ avec $f(l) = l$ et $\forall n,\ u_n \geq l$

3ème cas : $f \searrow$

$(u_{2n})_n \nearrow$ et $(u_{2n+1})_n \searrow$

$u_{2n} \to l \qquad u_{2n+1} \to l$ où l : pt fixe de f

ie $u_n \to l$

$\forall n,\ u_{2n} \leq l$ et $u_{2n+1} \geqslant l$

c) Généralités

Déjà : pour que $(u_n)_n$ soit bien définie il faut que $f(u_0) \in I$ puis $f(f(u_0)) \in I$ etc

Ex : On prend $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -\sqrt{x}$

et $u_0 = 2$

On a alors $u_1 = f(u_0) = -\sqrt{2}$

On ne peut continuer le processus.

Pour que ça marche, osq $\forall x \in I,\ f(x) \in I$ ie osq I est stable par f.

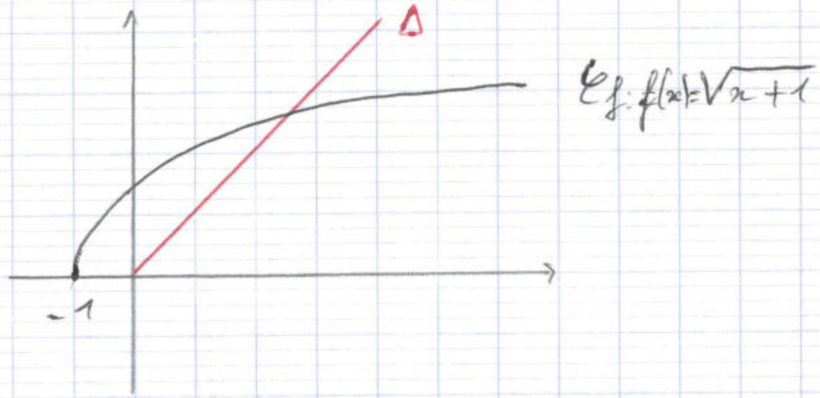
d) Réduction de l'intervalle de définition

Fait : Soit J un intervalle tq 1°) $u_0 \in J$
2°) J est stable par f

alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$

J est stable par f ie $f[J] \subset J$
ie $\forall x \in J,\ f(x) \in J$

Ex :



Ici, $I = [-1, +\infty[$

On a $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$

ie $\forall x \in I,\ f(x) \in \mathbb{R}_+$

Or $\mathbb{R}_+ \subset [-1, +\infty[$

donc ok : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$

Cherchons les points fixes de f

Analyse - synthèse :

Soit $\ell \in I$ tq $f(\ell) = \ell$

On a $f(\ell) \geq 0$ donc $\ell \geq 0$

On a $\sqrt{1+\ell} = \ell$ donc $1 + \ell = \ell^2$

donc (! Astuce rédaction)

donc, $\ell = \dfrac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ avec $\Delta := (-1)^2 - 4\cdot(-1)$

ie $\Delta = 5$

donc $\ell = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, or $\ell \geq 0$

donc $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ On le note ℓ_0

Réciproquement : ok

On a $f \nearrow$

Soit x tq $-1 \leq x \leq \ell_0$

On a donc $f(-1) \leq f(x) \leq f(\ell_0)$

ie $0 \leq f(x) \leq \ell_0$

donc $-1 \leq f(x) \leq \ell_0$

Je !! On a mq $[-1, \ell_0]$ est stable par f

Corollaire : $u_0 \leq l_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l_0$

De même : $x \geq l_0 \Rightarrow f(x) \geq f(l_0) = l_0$

ie $[l_0; +\infty[$ est stable par f

Corollaire : $u_0 \geq l_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq l_0$

Rq : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ <u>croissante</u>

Soit $l \in I$ tq $f(l) = l$

alors : 1) $\forall x \in I, x \geq l \Rightarrow f(x) \geq l$

2) $\forall x \in I, x \leq l \Rightarrow f(x) \leq l$

3) si I est stable par f, alors

a) $I \cap [l, +\infty[$ est stable par f

b) $I \cap]-\infty, l]$ ——

Démo : Mq 3) a)

Osq I est stable ie : $\forall x \in I, f(x) \in I$

Mq $I \cap [l, +\infty[$ est stable

Soit $x \in I \cap [l, +\infty[$

1°) on a $x \in I$ donc $f(x) \in I$

2°) on a $x \geq l$, or $f \nearrow$ donc $f(x) \geq f(l)$

or $f(l) = l$

donc $f(x) \geq l$ ie $f(x) \in [l, +\infty[$

3°) CCL : on a $f(x) \in [l, +\infty[\cap I$

e) Etude de la monotonie

Prop : Osq on a trouvé $J \subset I$ intervalle tq
- J est stable par f
- $u_0 \in J$
- $f : J \to J$ croissante (strictement)

alors $(u_n)_n$ est monotone

mieux : a) $u_1 > u_0 \Rightarrow (u_n)_n \nearrow (\nearrow)$

b) $u_1 < u_0 \Rightarrow (u_n)_n \searrow (\searrow)$

c) $u_1 = u_0 \Rightarrow (u_n)_n$ constante

Dans ce cas, $(u_n)_n$ monotone et le sens de variation de $(u_n)_n$ est déterminée par l'ordre relatif de u_1 et u_0

Démo :

a) Osq $u_1 > u_0$ Mq $(u_n)_n \nearrow$

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_{n+1} \geq u_n$ "

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

Initialisa°: hypothèse

Hérédité :

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $u_{n+1} \geq u_n$ $(*)$

On a $u_n \in J$ et $u_{n+1} \in J$ car $\begin{cases} u_0 \in J \\ J \text{ est stable par } f \end{cases}$

On applique $f \nearrow$ à $(*)$

On obtient $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$

ie $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ ie $P(n+1)$

Rq : $f : J \to J \nearrow$ s'obtient par une étude de fonctions

$\Rightarrow$ $\underline{R^x}$ $u_{n+1} = f(u_n) \to$ réflexe : on étudie f.

f) Position de u_n par rapport à un point fixe

Prop : Osq on a trouvé $J \subset I$ intervalle tq
. J est stable par f
. $u_0 \in J$
. $f : J \to J$ croissante
Soit $\ell \in J$ un pt fixe de f
Alors,
1) $u_0 \geq \ell \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ell$
b) $u_0 \leq \ell \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$
c) $u_0 = \ell \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ell$

démo : $\mathscr{R}^x$ récurrence

. Init : $u_0 \geq \ell$
. Hérédité : $u_n \geq \ell$; or $f \nearrow$ donc
$f(u_n) \geq f(\ell)$ ie $u_{n+1} \geq \ell$

Bilan : Si on a : . J stable ; $u_0, \ell \in J$ avec $f(\ell) = \ell$
. $u_0 \leq \ell$
. $u_1 \geq u_0$
alors : 1) $\forall n, u_n \leq \ell$ donc $(u_n)_n$ majorée
2) $(u_n)_n \nearrow$
Donc, $(u_n)_n$ converge

g) Limite d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème : Osq f est continue
Soit $\ell \in I$ tq $u_n \to \ell$
alors, $f(\ell) = \ell$

Te : si une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ converge, c'est nécessairement vers un point fixe de f

démo : cf + loin

h) cas où f est décroissante

Prop : Osq on a trouvé $J \subset I$ intervalle tq
- . J est stable par f.
- . $u_0 \in J$,
- . $f : J \to J$ décroissante

Alors : 1) $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de variation opposés.

2) Si J contient un point fixe l de f, alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ restent toujours du même côté, opposé, de l.

Démo :
- . $f : J \to J \searrow$
- . donc, $(f \circ f) : J \to J \nearrow$
- . de plus, si $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)) = (f \circ f)(u_n)$
- . donc $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n}) \end{cases}$

et $\begin{cases} u_1 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+3} = (f \circ f)(u_{2n+1}) \end{cases}$

. 1°) Osq $u_2 \geqslant u_0$ $(*)$
alors d'après e) on a $(u_{2n})_n \nearrow$
On applique $f(\cdot)\downarrow$ à $(*)$
On a : $u_3 \leqslant u_1$
d'après e), on a $(u_{2n+1})_n \searrow$

. 2°) De m̂, si $u_2 \leqslant u_0$

. 3°) Si $u_0 \leqslant l$ $(**)$
D'après f), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant l$

(Rq : $(f \circ f)(l) = f(f(l)) = f(l) = l$)

J'applique $f \searrow$ à $(**)$
On a $\underset{\underset{u_1}{\shortparallel}}{f(u_0)} \geqslant \underset{\underset{l}{\shortparallel}}{f(l)}$

donc $u_1 \geqslant l$
D'après f), on a $\forall n$, $u_{2n+1} \geqslant l$

4°) De m̂, si $u_0 \geqslant l$

i) Plan d'étude

1°) Recherche des pts fixes de f
ie on résout $f(l) = l$ avec $l \in I$
2°) Etude de f
3°) Eventuellet, position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à
$\Delta : y = x$
Ie : étude du signe de $f(x) - x$
(ex : $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$ donne $u_1 \geqslant u_0$)

4°) Restriction à un intervalle stable dont l'une des bornes est un point fixe — généralement

5°) Utilisation des résultats généraux ci-dessus, à voir comme des R^x à redémontrer

(?) Etudier $(u_n)_n$ déf par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

III. Propriétés d'une suite vraies à partir d'un certain rang

Définition

1) Soit $P(n)$ un prédicat de $n \in \mathbb{N}$, on dit que $P(n)$ est vraie APCR et on note $P(n)$ APCR ssi

$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, P(n)$

Exemple: Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- $u_n \geq 0$ APCR
- $u_n \neq 0$ APCR

2) Soit $Q(v)$ un prédicat de v pour v une suite

Soit $(u_n)_n$ une suite

On dit que $Q((u_n)_n)$ est vraie à partir d'un certain rang et on note $Q((u_n)_n)$ APCR ssi

$\exists N_0 \in \mathbb{N} : Q((u_n)_{n \geq N_0})$ est vraie

Ex: $(u_n)_n$ croissante APCR

IV, Limite d'une suite : cas fini

Dans cette partie, $(u_n)_n$ est une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$

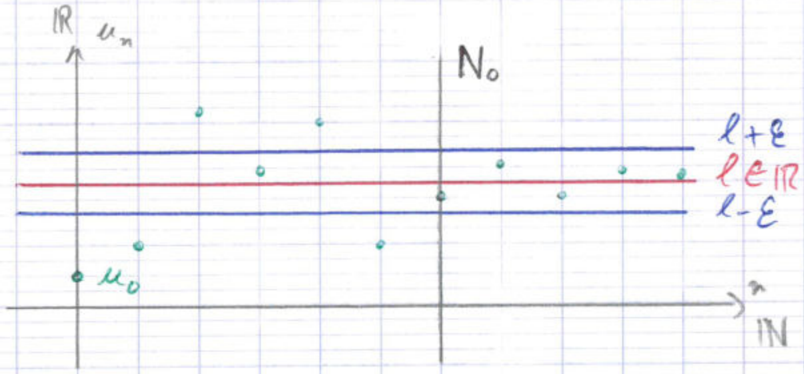
Dans certains énoncés, on supposera $\begin{cases} (u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \ell \in \mathbb{C} \end{cases}$

1) Définition

Déf : On dit que $(u_n)_n$ converge vers ℓ (ou $(u_n)_n$ tend vers ℓ) et on note $u_n \to \ell$

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ $(*)$

Dessin :



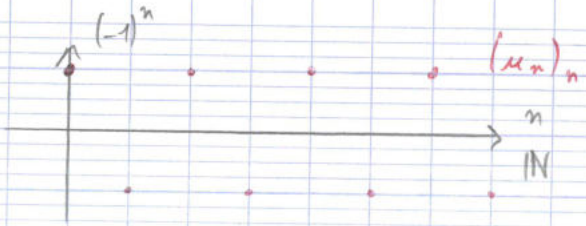
Ie : pour $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut $(\forall \varepsilon > 0)$
il existe un rang N_0 $(\exists N_0 \in \mathbb{N})$
à partir duquel tous les termes de la suite $(\forall n \geq N_0)$
sont ε- proches de ℓ $(|u_n - \ell| \leq \varepsilon)$

Déf : On dit que $(u_n)_n$ converge et on note $(u_n)_n \overset{CV}{\to}$
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists \ell \in \mathbb{R} : u_n \to \ell$

Sinon, on dit que $(u_n)_n$ diverge

Exemples : . $\sqrt{n} \to +\infty$: $(\sqrt{n})_n$ diverge

$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.



Elle n'a pas de limite (ni finie, ni infinie)

. On pourra noter $V_n \nearrow_{Div}$ ou $(-1)^n \not\xrightarrow{CV}$

Exemple : Mq $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

Soit $\varepsilon > 0$

On cherche $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$, $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on reformule ce qu'on veut :

. On a $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$ car $\frac{1}{n} \geq 0$

. $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

On pose $N_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$

Mq $\forall n \geq N_0$, $\left| \frac{1}{n} \right| \leq \varepsilon$

Soit $n \geq N_0$, on a $n \geq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

donc, on a $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ ie $\left| \frac{1}{n} \right| \leq \varepsilon$

CCL : on a mq $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq N_0, \left| \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \varepsilon$

ie $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

2) Remarques

a) Autres notations

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

$$\text{ou} \quad (u_n)_n \to l$$

b) Autres écritures

(*) peut aussi s'écrire:

. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0, \ l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l + \varepsilon$

. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geqslant N_0 \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon)$

c) Dans (*), on peut remplacer "$\leqslant \varepsilon$" par "$< \varepsilon$" ou par "$\leqslant 2\varepsilon$" Ie, on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geqslant N_0, \ |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$< \varepsilon$$

$$\leqslant 2\varepsilon$$

3) Cas complexe

Déf: Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit $l \in \mathbb{C}$

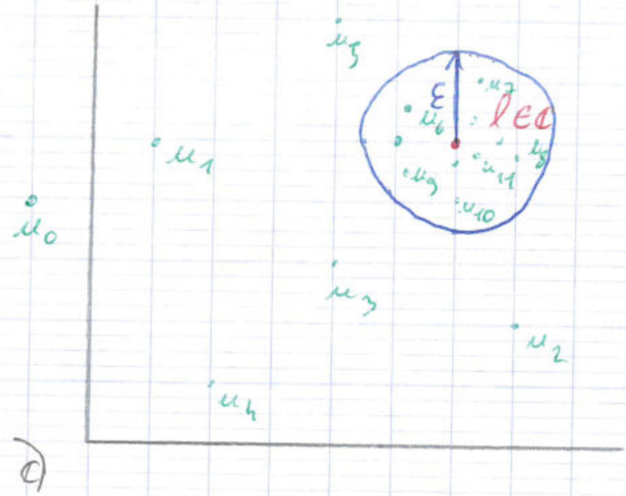
On dit que $(u_n)_n$ converge vers l et on note $u_n \to l$

ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0, \ |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

⚠ c'est le module

Dessin !!



4) Premières propriétés

Fait !! : Soient $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. Alors

$$\underset{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}{u_n \to l} \iff \underset{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}{u_n - l \to 0} \iff \underset{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{|u_n - l| \to 0}$$

démo :

Si $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\underset{u_n \to l}{|u_n - l|} = \underset{u_n - l \to 0}{|(u_n - l) - 0|} = \underset{|u_n - l| \to 0}{\big|\, |u_n - l| - 0 \,\big|}$$

Proposition

Osq $u_n \to l$

alors, toutes les suites extraites de $(u_n)_n$ convergent aussi vers l

Démo :

Osq $u_n \to l$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\nearrow\nearrow$. Mq $u_{\varphi(n)} \to l$

Soit $\varepsilon > 0$, $\hat{c}$ $u_n \to l$, soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq N_0, \ |u_n - l| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Mq $\forall n \geq N_0$, $|u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$

Soit $n \geq N_0$. On a $\varphi(n) \geq n$ (déjà démontré)

donc $\varphi(n) \geq N_0$

donc, d'après $(*)$, on a $\left| u_{\varphi(n)} - l \right| \leq \varepsilon$

5) Unicité de la limite

<u>Prop</u> : Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{C}$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to l_1 \\ u_n \to l_2 \end{array}\right\} l_1 = l_2$$

<u>démo</u> : Soit $\varepsilon > 0$

$\because$ $u_n \to l_1$, soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$, $|u_n - l_1| \leq \varepsilon$

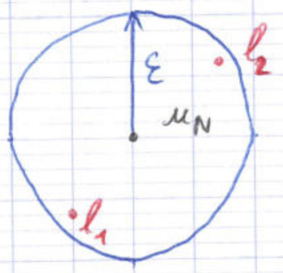
de même, soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2$, $|u_n - l_2| \leq \varepsilon$

On pose : $N := \max(N_1, N_2)$

On a $\forall n \geq N$, $\begin{cases} |u_n - l_1| \leq \varepsilon \\ |u_n - l_2| \leq \varepsilon \end{cases}$

En particulier, on a $\begin{cases} |u_N - l_1| \leq \varepsilon \\ |u_N - l_2| \leq \varepsilon \end{cases}$

<u>Dessin</u> : astuce, on prend u_N ĉ pivot



Mq $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon$

On passe par le pivot u_N et on applique l'inégalité triangulaire

$$|\ell_1 - \ell_2| = \left| (\ell_1 - u_N) + (u_N - \ell_2) \right|$$

$$\leqslant \left| \ell_1 - u_N \right| + \left| u_N - \ell_2 \right| \leqslant 2\varepsilon$$

$\leqslant$ triang.

CCL : on a mq $\forall \varepsilon > 0$, $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon$

On sait alors d'après le cours que $\ell_1 - \ell_2 = 0$

ie $\ell_1 = \ell_2$

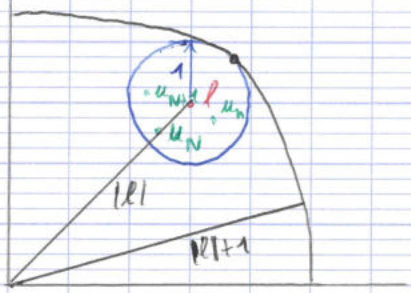
Déf : Osq $(u_n)_n$ est convergente. On appelle limite de $(u_n)_n$ et on note $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ l'unique $\ell \in \mathbb{C}$ tq $u_n \to \ell$

6) Six lemmes

Lemme 1 !!

$$(u_n)_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow (u_n)_n \text{ bornée} \qquad \text{(vrai ds } \mathbb{C})$$

démo : On prend $\varepsilon = 1$, osq $u_n \xrightarrow{CV}$, on note $\ell := \lim\limits_{n \to \infty} u_n$



Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N$, $|u_n - l| \leqslant 1$

Soit $n \geqslant N$. On veut mq $|u_n| \leqslant |l| + 1$

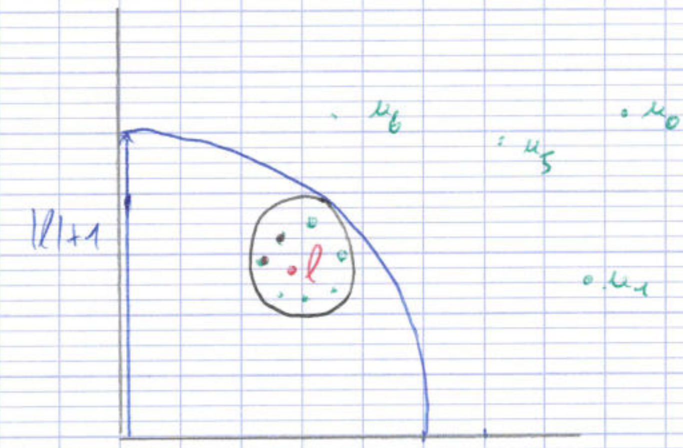
On utilise l'inég. triang. renversée

On a :

$$|u_n| - |l| \leqslant |u_n - l| \leqslant 1$$

donc $|u_n| \leqslant |l| + 1$

Dessin pour $n < N$



c)

On pose $M_0 := \max\limits_{0 \leqslant n \leqslant N-1} |u_n|$

On a $\forall n < N$, $|u_n| \leqslant M_0$

On pose $M := \max(M_0, |l|+1)$

Si $n < N$, on a $|u_n| \leqslant M_0 \leqslant M$

Si $n \geqslant N$, on a $|u_n| \leqslant |l| + 1 \leqslant M$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$

donc $(u_n)_n$ est bornée

Complément : Soit $(u_n)_n$ une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$

alors $u_{n_0} = u_{n_0+1} \Rightarrow \forall n \geqslant n_0, u_n = u_{n_0}$

On écrit $(u_n)_n$ converge
Mais jamais u_n converge
Par extension, on écrira $(u_n)_n \xrightarrow{CV}$
Cependant on a défini la notation $u_n \to l \overset{\Delta}{\text{ssi}} (u_n)_n$ converge vers l

⚠ Attention : on a $1 + \frac{k}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $1 + \frac{k}{n} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$
$(n \in \mathbb{N}^*)$

Lemme 2 :

$(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to 0 \\ v_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(u_n, v_n) \to 0$$

Démo :

. On remarque que $(\max(u_n, v_n))_n$ est une suite.
. Osq $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$
. Soit $\varepsilon > 0$

Comme $u_n \to 0$, Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$, $|u_n| \leq \varepsilon$
$v_n \to 0$, soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2$, $|v_n| \leq \varepsilon$

On pose $N := \max(N_1, N_2)$
Soit $n \geq N$, on a $\max(u_n, v_n) = u_n$ ou v_n
donc $|\max(u_n, v_n)| = |u_n|$ ou $|v_n|$
Dans tous les cas, on a $|\max(u_n, v_n)| \leq \varepsilon$
(si $\max(u_n, v_n) = u_n$ c'est car $n \geq N_1$, sinon c'est car $n \geq N_2$)
Ainsi : $\forall n \geq N$, $|\max(u_n, v_n)| \leq \varepsilon$
CCL : $\max(u_n, v_n) \to 0$

Rq : Rappel : $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow u_{\varphi(n)} \to l$

réciproque : $\left(\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow,\ u_{\varphi(n)} \to l\right) \Rightarrow u_n \to l$

démo : évident : il suffit de prendre $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$

Lemme 3 :

Soient $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{C}$ telque

1°) $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ |u_n - l| \leq \varepsilon_n$

2°) $\varepsilon_n \to 0$

alors $u_n \to l$

Rq :

1°) se lit : à partir du rang N_0, la distance entre u_n et l est contrôlée par ε_n

1°) s'écrit : $|u_n - l| \leq \varepsilon_n$ APCR

Démo :

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, |u_n - l| \leq \varepsilon_n$

Mq $u_n \to l$

Soit $\varepsilon > 0$

ĉ $\varepsilon_n \to 0$, soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$, $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$

On pose $N := \max(N_0, N_1)$ (on a $\forall n, n \geq N \Rightarrow \begin{cases} n \geq N_0 \\ n \geq N_1 \end{cases}$

Soit $n \geq N$

On a : $|u_n - l| \underset{\text{car } n \geq N_0}{\leq} \varepsilon_n \underset{\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+}{=} |\varepsilon_n| \underset{\text{car } n \geq N_1}{\leq} \varepsilon$

. Ainsi, $\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$
donc $u_n \to l$

Rq : • si $\varepsilon_n = 0$ APCR , alors $u_n = l$ APCR
on dit que $(u_n)_n$ est stationnaire
(ssi $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 , u_n = u_{N_0}$)

• Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit $l \in \mathbb{R}$
alors on a : $\forall \varepsilon \geq 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 , |u_n - l| \leq \varepsilon$
↳ $u_n \to l$ $\Updownarrow$

$u_n = l$ APCR

Lemme 4 !!

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \to 0$
Soit $(A_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée

alors $A_n u_n \to 0$

Démo :
. Soit $M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \leq M$
on pose $M' := M + 1$. Ainsi, on a une borne $M' > 0$
de $(A_n)_n$
. Mq $A_n u_n \to 0$
Soit $\varepsilon > 0$
ĉ $u_n \to 0$ et comme $\frac{\varepsilon}{M'} \to 0$, soit $N_0 \in \mathbb{N}$ Idée
tel que $\forall n \geq N_0$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M'}$

. Soit $n \geq N_0$. On a $|A_n u_n| = |A_n| |u_n| \leq M' |u_n| \leq M' \frac{\varepsilon}{M'} = \varepsilon$

donc, $\forall n \geq N_0, |A_n u_n| \leq \varepsilon$

CCL : $A_n u_n \to 0$

Rq : . si $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on dit que $(u_n)_n$ est bornée
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

. le lemme 4 est encore vrai dans $\mathbb{C}$

démo :
Soient $(u_n)_n, (A_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \to 0$
$(A_n)_n$ bornée

alors : $|u_n| \to 0$ suite réelle $\to 0$
$(|A_n|)_n$ suite réelle bornée

donc d'après le lemme : $|A_n u_n| \to 0$

donc : $A_n u_n \to 0$

Lemme 5 !! : anti-passage à la limite dans les inégalités strictes

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \to \ell > 0$

alors :
1) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n > 0$

2 !! (+ mieux)
$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, u_n \geq \varepsilon_0 > 0$

3) + précis : $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$

Rq :
2) est bcp + fort que 1)

suite $(u_n)_n$ qui vérifie 1) mais ne vérifie pas 2)

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$$

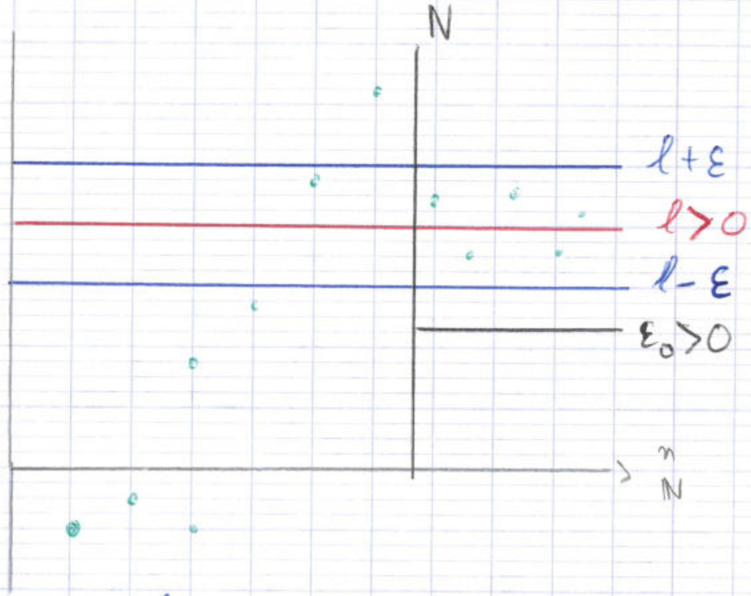
On a bien $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} > 0$

mais $\nexists\, \varepsilon_0 > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \frac{1}{1+n} \geq \varepsilon_0$

. 2) signifie qu'on a trouvé une marge de sécurité $\varepsilon_0 > 0$

Démo : On a évidemment 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1)

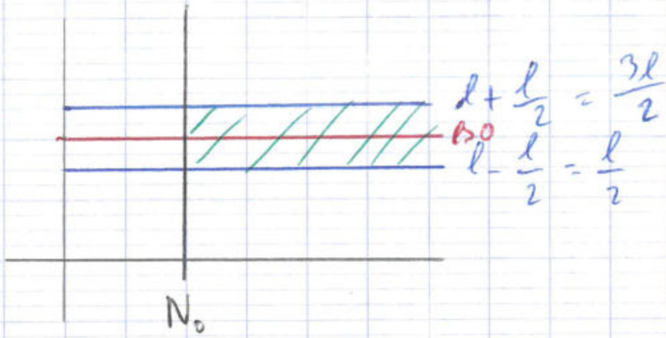
Dessin :



On pose $\varepsilon := \frac{\ell}{2}$. On a bien $\varepsilon > 0$

$\hat{\mathcal{C}}$ $u_n \to \ell$, soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Dessin :



. Soit $n \geq N_0$

On a $|u_n - l| \leq \varepsilon$

1e ℓ Reformulation $|x| \leq a \iff -x \leq a \leq x$ si $a \geq 0$

R^x : $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$

En particulier, on a $u_n \geq l - \varepsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$

CCL : $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, u_n \geq \frac{l}{2} > 0$

Remarques :

1) Passage à la limite

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ u_n \geq 0 \text{ APCR} \end{array}\right\} \Rightarrow l \geq 0$$

2) + généralet :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \quad \text{APCR} \\ u_n \to l \\ v_n \to l' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ccc} u_n & \leq & v_n \quad \text{APCR} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & \leq & l' \end{array}$$

3) Le lemme 5 est faux si $\ell \geq 0$

Je $u_n \to 0 \not\Rightarrow u_n \geq 0$ APCR

ou

$u_n \leq 0$ APCR

contre exemple:

on cherche $(u_n)_n$ tq

a) $u_n \to \ell \geq 0$

b) $u_n \geq 0$ APCR est faux

c) $u_n \leq 0$ APCR est faux

On prend $\frac{(-1)^n}{n}$

(on a $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ car $\frac{1}{n} \to 0$ et $((-1)^n)_n$ bornée

? $\left.\begin{matrix} u_{2n} \to \ell \\ u_{2n+1} \to \ell \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_n \to \ell$

4) Les conclusions du lemme peuvent s'écrire:

- $u_n > 0$ APCR
- $\exists\, \varepsilon_0 > 0 : (u_n \geq \varepsilon_0$ APCR$)$
- $u_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$ APCR

5) On a aussi une version "$\ell < 0$" de ce lemme

Lemme 6

$u_n \to l \Rightarrow |u_n| \to |l|$ vrai dans $\mathbb{C}$

Démo :

On utilise l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \; \big| |a| - |b| \big| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|$$

Soit $\varepsilon > 0$

$\overset{\frown}{c}$ $u_n \to l$, soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N_0, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$

Soit $n \geqslant N_0$, on a :

$$\big| |u_n| - |l| \big| \leqslant |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0, \big| |u_n| - |l| \big| \leqslant \varepsilon$

ie $|u_n| \to |l|$

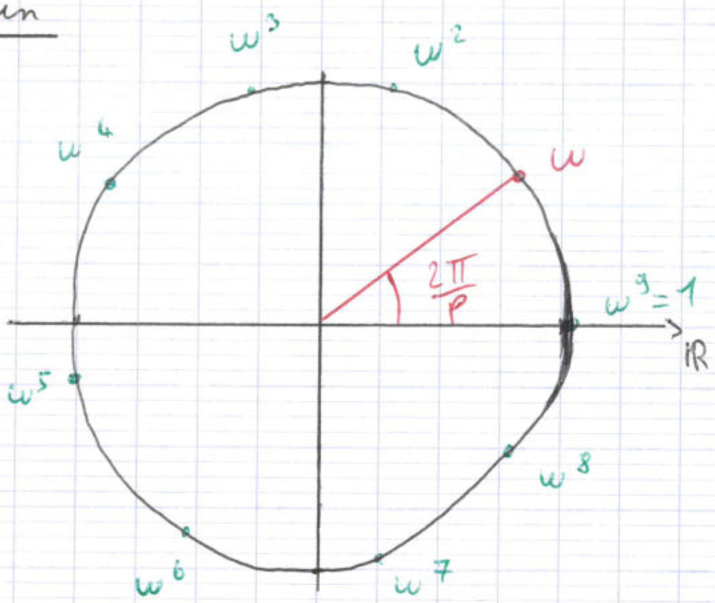
Rq : la réciproque est fausse

Ie $|u_n| \to |l| \not\Rightarrow u_n \to l$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \geqslant 2$

On pose $\omega := e^{i\frac{2\pi}{p}}$ (on a $\omega \in \mathbb{U}_p$)

Dessin



On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n := \omega^n$

? Mq $(\omega^n)_n$ est divergente

mais on a $\forall n$, $|\omega_n| = 1$
donc $|u_n| \to 1$

7) Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
Soient $l, l' \in \mathbb{C}$

a) Somme

Prop : $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \to l + l'$

Démo :

Les raisonnements "à la $\varepsilon > 0$" étant dans les lemmes, on va essayer de faire sans.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\left| (u_n + v_n) - (\ell + \ell') \right| = \left| (u_n - \ell) + (v_n - \ell') \right|$$

$$\underset{\leqslant \text{ triang.}}{\leqslant} |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$$

Idée : utiliser le max

$$\underset{(*)}{\leqslant} 2 \max \left(|u_n - \ell| , |v_n - \ell'| \right)$$

CCL :

. lemme 2 : $\max(|u_n - \ell|, |v_n - \ell'|) \to 0$

Or $(2)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée

d'après le lemme 4, $2\max(|u_n - \ell|, |v_n - \ell'|) \to 0$

Enfin, on applique le lemme 3 avec l'inégalité $(*)$

donc $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \to 0$

Ie, $u_n + v_n \to \ell + \ell'$

Autre preuve :

Soit $\varepsilon > 0$

$\hat{c}$ $u_n \to \ell$: soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N_0, |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

de $\hat{m}$, soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N_1, |v_n - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

. On pose $N := \max(N_0, N_1)$

. Soit $n \geq N$

On a : $|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

d'où, $u_n + v_n \to l + l'$

b) Produit

Prop : $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{array}\right\} \Rightarrow u_n v_n \to l l'$

Démo : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n v_n - ll'| = |(u_n - l) v_n + l v_n - ll'|$$

! On force à app. $(u_n - l)$

$$= |v_n (u_n - l) + l (v_n - l')|$$

$$\underset{(*)}{\leq} |v_n| \cdot |u_n - l| + |l| \cdot |v_n - l'|$$

Or, (lemme 1) : $(v_n)_n$ bornée car elle $\xrightarrow{CV}$

et $|u_n - l| \to 0$

donc (lemme 4), $|v_n| \cdot |u_n - l| \to 0$

. de m̂, $|l| |v_n - l'| \to 0$

. D'après a) Somme, on a :

$|v_n| \cdot |u_n - l| + |l| \cdot |v_n - l'| \to 0 = 0 + 0$

. Grâce au lemme 3 et au contrôle (*), on a :
$$|u_n v_n - \ell\ell'| \to 0$$

Ie $u_n v_n \to \ell\ell'$

c) Scalarisation

Corollaire : $\lambda \in \mathbb{C}$
$$u_n \to \ell \Rightarrow \lambda u_n \to \lambda \ell$$

d) Un corollaire important

Corollaire:

$$(u_n)_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow u_{n+1} - u_n \to 0$$

Démo :

Osq $(u_n)_n \xrightarrow{CV}$. On note $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. on a $u_n \to \ell$

Or, $(u_{n+1})_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$
donc $u_{n+1} \to \ell$

. On a $-u_n \to -\ell$ (scalarisation par -1)

par somme : $u_{n+1} - u_n \to \ell - \ell = 0$

⚠ la réciproque est fausse !!

ie $u_{n+1} - u_n \to 0 \not\Rightarrow (u_n)_n \xrightarrow{CV}$

Deux contres exemples :

1°) $(\ln(n))_n$

On a $\ln(n) \to +\infty$

Soit $n \geq 1$. on calcule :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

or $\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$

Or $\ln(.)$ est continue en 1 ; donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \underset{=0}{\ln(1)}$

2°) $(\sqrt{n})_n$

. On a $\sqrt{n} \to +\infty$

si $n \geq 1$, on a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

Or, $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \to +\infty$

donc $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 0$

ie $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$

Complément

1) Notons P : " $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ u_n > 0$ "

Q : " $\exists \varepsilon_0 > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ u_n \geq \varepsilon_0 > 0$ "

R : " $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ \exists \varepsilon_0 > 0 : u_n \geq \varepsilon_0 > 0$ "

Dans Q le "$\exists\, \varepsilon_0 > 0$" est global : c'est le m̂ ε_0 pour tous les $n \geq N_0$

Mais dans R, le $\varepsilon_0 > 0$ a priori dépend de n. Pour chaque u_n on peut avoir un ε_0 différent.

On a : $Q \Rightarrow R$

$Q \Rightarrow P$

$P \Rightarrow Q$ est faux

contre-exemple :

négation de $P \Rightarrow Q$ est P et non Q

On cherche $(u_n)_n$ tq 1) P est V 2) Q est F

$\simeq$ Ie : $\forall n, u_n > 0$ mais on n'a pas de $\varepsilon_0 > 0$ de sécurité

On prend $u_n = \dfrac{1}{n}$

2) Attention :

"$\forall n \in \mathbb{N}, \exists A \in \mathbb{R} : u_n \leq A$"

ne veut pas dire que $(u_n)_n$ est majorée

Rq ⚠ : Cela n'a aucun sens d'écrire

$$u_n \to v_n$$

En particulier, $u_{n+1} - u_n \to 0$ ne s'écrit pas

$$u_{n+1} \to u_n$$

. Imaginons qu'on ait le droit d'écrire $u_n \to v_n$ quand $u_n - v_n \to 0$

alors, on aurait : $\dfrac{1}{n} \to 0$, $\dfrac{1}{n} \to \dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow$ par unicité$^{\text{del}}$: $0 = \dfrac{1}{n}$.

Or, alors : $\dfrac{(-1)^n}{n} \to \dfrac{1}{n}$ $(*)$

car $\dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\dfrac{1}{n} \to 0$

En multipliant (*) par n : $(-1)^n \to 1$

e) inverse

Prop : $\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ 1) $\frac{1}{u_n}$ définie APCR

2) $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}$

vrai dans $\mathbb{C}$

Démo : (dans le cas $\mathbb{R}$)

Osq $u_n \to \ell$ et $\ell \neq 0$

Par exemple, supposons $\ell > 0$

D'après le lemme 5, $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, u_n > 0$ (*)

donc $\frac{1}{u_n}$ est définie APCR

Fixons un N_0 ĉ dans (*)

Mq $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \geq N_0$, on a :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - u_n}{u_n \ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n \ell|}$$

Soit $N_1 \geq N_0$ et soit $\varepsilon_0 > 0$ tq $\forall n \geq N_1, u_n \geq \varepsilon_0$ (lemme 5)

Si $n \geq N_1$, on a $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$ donc $\left(\frac{1}{|u_n \ell|}\right)_{n \geq N_1}$ est bornée

Grâce au $\varepsilon_0 > 0$ de sécurité, on a : $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq N_0}$ bornée

Or, $|u_n - l| \to 0$

donc $\dfrac{|u_n - l|}{|u_n l|} \to 0$ d'après le lemme 4

f) Quotient

Prop : $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l' \\ l' \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{l}{l'}$

$\mathbb{C}$ - vrai

démo : $\left.\begin{array}{l} \text{inverse} \\ \text{produit} \end{array}\right\} \to$ quotient

Rq : $(u_n)_n$ bornée APCR $\Leftrightarrow$ $(u_n)_n$ bornée
majorée majorée
minorée minorée

g) Une forme indéterminée (FI)

Attention ! $\left.\begin{array}{l} u_n \to 1 \\ v_n \to +\infty \end{array}\right\} \not\Rightarrow u_n^{v_n} \to 1$

A retenir : $1^{+\infty}$ est une FI

(?) Trouver u_n, v_n tq $\left.\begin{array}{l} u_n \to 1 \\ v_n \to +\infty \end{array}\right\}$ et $u_n^{v_n} \to 42$

Fait !!! $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e$

8) Convergence dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

<u>Prop :</u> Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$(z_n)_n \xrightarrow{CV} \iff \begin{cases} (\mathrm{Re}(z_n))_n \xrightarrow{CV} \\ (\mathrm{Im}(z_n))_n \xrightarrow{CV} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a :

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

démo :

$\Leftarrow$ sens facile : Osq $\mathrm{Re}(z_n) \to l_1$ et $\mathrm{Im}(z_n) \to l_2$ avec $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

Alors, par opérations, on a :

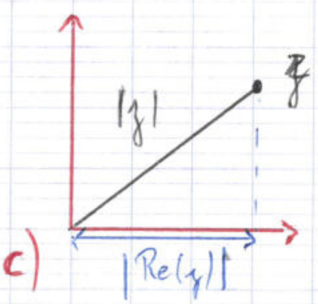
$$\mathrm{Re}(z_n) + i\,\mathrm{Im}(z_n) \to l_1 + i\, l_2$$

et on a $\forall n,\ z_n = \mathrm{Re}(z_n) + i\,\mathrm{Im}(z_n)$ donc $z_n \to l_1 + i l_2$

On note $l := \lim z_n$

$\Rightarrow$ Rappel : $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$

Dessin :



c)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\operatorname{Re}(z_n - \ell)| \leq |z_n - \ell|$$

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(\ell)| \leq |z_n - \ell|$$

or, $|z_n - \ell| \to 0$

donc $|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(\ell)| \to 0$

ie $\operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(\ell)$

Pour $(\operatorname{Im}(z_n))_n$, on peut faire pareil.

On a $z_n \to \ell$

$\operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(\ell)$

c'est $\operatorname{Im}(z_n)$

Par opérations, $\dfrac{z_n - \operatorname{Re}(z_n)}{i} \to \dfrac{\ell - \operatorname{Re}(\ell)}{i}$

donc $\operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(\ell)$

Rq : Soit $(M_n)_n$ une suite de points de l'espace $\mathbb{R}^3$

Soit $P \in \mathbb{R}^3$

On dit que $M_n \to P$ (dans $\mathbb{R}^3$) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \; M_nP \leq \varepsilon$

$d(M_n, P) \leq \varepsilon$

- M_nP = longueur du segment
- $\|\overrightarrow{M_nP}\|$
- $\|\overrightarrow{OM_n} - \overrightarrow{OP}\|$

<u>Caractérisation</u> : On a $M_n \to P$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_{M_n} \to x_P \text{ dans } \mathbb{R} \\ y_{M_n} \to y_P \text{ ——} \\ z_{M_n} \to z_P \text{ ——} \end{cases}$$

9) Passage à la limite dans les inégalités larges ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

a) Un lemme

Lemme de Boccacino

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq 0 \text{ APCR} \\ u_n \to l \end{array}\right\} \Rightarrow l \geq 0$$

démo : Osq $u_n \geq 0$ APCR et $u_n \to l$.

Mq $l \geq 0$ par l'absurde

Osq $l < 0$

On utilise l'anti-passage à la limite

donc, $u_n < 0$ APCR

C'est absurde car $u_n \geq 0$ APCR

b) Résultats

Prop : $m, M \in \mathbb{R}$

a) $$\left.\begin{array}{l} u_n \leq M \text{ APCR} \\ u_n \to l \end{array}\right\} \Rightarrow l \leq M$$

b) $$\left.\begin{array}{l} u_n \geq M \text{ APCR} \\ u_n \to l \end{array}\right\} \Rightarrow l \geq M$$

c) $$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \text{ APCR} \\ u_n \to l \\ v_n \to l' \end{array}\right\} \Rightarrow l \leq l'$$

$$\left.\begin{array}{l} m \leq u_n \leq M \text{ APCR} \\ u_n \to l \end{array}\right\} \Rightarrow m \leq l \leq M$$

d)

<u>démo</u> : on applique le lemme à :

a) $M - u_n$
b) $u_n - M$
c) $v_n - u_n$
d) $= a) + b)$

c) on ne peut pas passer à la limite dans une inégalité <u>stricte</u>

ie : $\left.\begin{array}{l} u_n > M \quad \text{APCR} \\ u_n \to l \end{array}\right\}$ c'est F^{H} de dire $l > m$

contre-exemple :

$\frac{1}{n} > 0$ APCR mais "$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} > 0$" est faux

V, Limite d'une suite : cas infini

$(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ⚠ cela ne marche pas pour les suites complexes

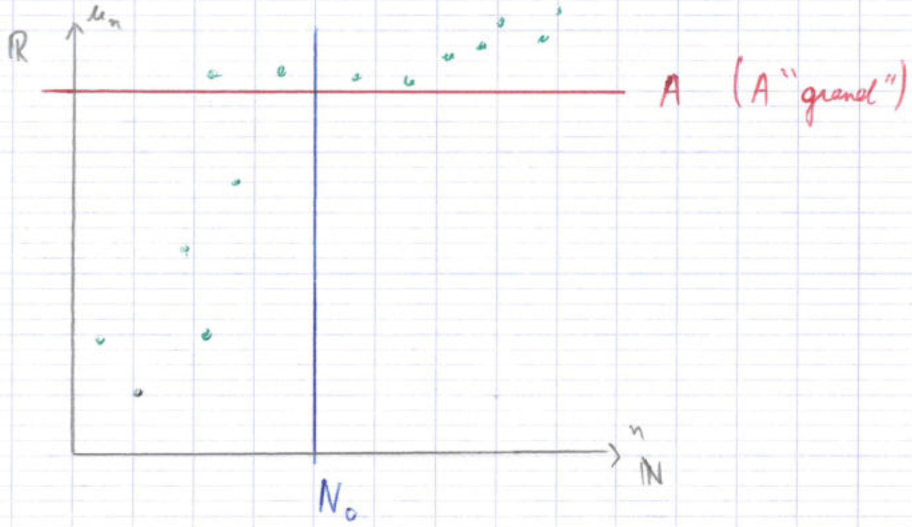
1) Définition de $u_n \to +\infty$

<u>Déf</u> : on dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et on note $u_n \to +\infty$ ssi

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ u_n \geq A$$

Noté aussi : $\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$, etc.

Dessin :



Remarques

1) Dans la déf, on peut remplacer "$\forall A \in \mathbb{R}$" par "$\forall A \geq 0$"

$$u_n \to +\infty \iff \underbrace{\forall A \geq 0}_{\text{ou } \forall A \geq 1},\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ \underbrace{u_n \geq A}_{\text{ou } u_n > A}$$

2) "$u_n \to +\infty \Rightarrow (u_n)_n \nearrow$ APCR" est F^{++}

contre-exemple

Idée. on adapte aux suites le ctrex : $x \mapsto \frac{x}{2} + \sin(x)$
pour $n \geq 0$, on pose $u_n := \frac{n}{2} + (-1)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$

1°) On a $u_n \geq \frac{n}{2} - 1 \longrightarrow +\infty$

donc $u_n \longrightarrow +\infty$

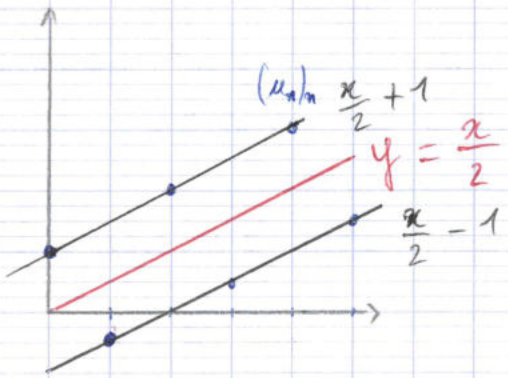
2°) On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} + (-1)^{n+1} - \frac{n}{2} - (-1)^n$

$$= \frac{1}{2} + (-1)^n \left(-1 - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \, (-1)^n$$

si n est pair, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} - 2 < 0$

si n est impair, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} + 2 > 0$



<u>Exemple :</u> $n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$

Soit $A \geq 0$, on cherche $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$, $n \geq A$

Il suffit de prendre $N_0 := \lfloor A \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$

Rappel : $\lfloor x \rfloor = \max \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \right\}$

2) $u_n \to -\infty$

Déf : On dit que $u_n \to -\infty$ ssi

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, u_n \leq A$$

3) Premiers résultats

Fait :

$$1) \left. \begin{array}{c} u_n \to +\infty \\ \text{ou} \\ u_n \to -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n)_n \text{ n'est pas bornée}$$

$$2) \left. \begin{array}{c} u_n \to +\infty \\ \text{ou} \\ u_n \to -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n)_n \text{ diverge}$$

Démo : Mq $u_n \to +\infty \Rightarrow (u_n)_n$ non majorée

Osq $u_n \to +\infty$. Par l'absurde, osq $(u_n)_n$ majorée

Soit donc $M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

Or, $u_n \to +\infty$

Soit donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, u_n \geq M+1$

On a alors $u_{N_0} \geq M+1$ et $u_{N_0} \leq M$

absurde.

donc, en particulier, $u_n \to +\infty \Rightarrow (u_n)_n$ non bornée

1 bis) De m̂ : $u_n \to -\infty \Rightarrow (u_n)_n$ n'est pas minorée

$\Rightarrow (u_n)_n$ n'est pas bornée

2) On sait que

$(u_n)_n \overset{CV}{\rightarrow} \Rightarrow (u_n)_n$ bornée

donc, par contraposition :

$(u_n)_n$ non bornée $\Rightarrow (u_n)_n$ diverge

Fait : Osq $u_n \to +\infty$

Alors, toute suite extraite de $(u_n)_n$ tend aussi vers $+\infty$

De m̂, pour $u_n \to -\infty$

Démo ?

4) Opérations sur les limites

Prop :

1) $\left.\begin{array}{l} u_n > 0 \quad APCR \\ u_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \to +\infty$

2) $\left.\begin{array}{l} u_n < 0 \quad APCR \\ u_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \to -\infty$

démo :

1) Osq $u_n > 0$ APCR. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, u_n > 0$

Osq $u_n \to 0$

Mq $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$

Soit $A > 0$

Astuce : On pose $\varepsilon := \dfrac{1}{A}$

$\hat{C}$ $u_n \to 0$ Soit $N_1 \geq N_0$ tq $\forall n \geq N_1$, $0 < u_n \leq \varepsilon = \frac{1}{A}$

Soit $n \geq N_1$ Or, $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$ $\searrow$ donc, on a $\frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{\varepsilon} = A$

Ainsi $\forall n \geq N_1$: $\frac{1}{u_n} \geq A$ donc $\frac{1}{u_n} \to +\infty$

2) Idem

<u>Exercice</u>

Enoncer et démontrer tous les résultats que vous connaissez sur les limites

- $\left.\begin{array}{l} u_n \to +\infty \\ \text{ou } u_n \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \to 0$

- $\left.\begin{array}{l} u_n \to +\infty \\ (v_n)_n \text{ bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \to +\infty$

- mieux : $\left.\begin{array}{l} u_n \to +\infty \\ (v_n)_n \text{ minorée} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \to +\infty$

Or, si j'ai $w_n \to +\infty \Rightarrow (w_n)_n$ minorée

Ainsi, $\left.\begin{array}{l} u_n \to +\infty \\ w_n \to +\infty \end{array}\right\} u_n + w_n \to +\infty$

VI. Théorème d'existence des limites

1) Théorème d'encadrement

Soient $(m_n)_n$, $(M_n)_n$, $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soit $l \in \mathbb{R}$

Osq 1) $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ APCR

2) $m_n \to l$ et $M_n \to l$

alors, $u_n \to l$

démo : exercice

Application

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$

On a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{\uparrow}{=} -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \geqslant -\left(-\frac{1}{n+1}\right)$

Hyper astuce

donc $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$

donc $\frac{n}{n+1} \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

$$1 \to 1$$

Par encadrement : $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$

Or, $\exp(\cdot)$ est C^0 en 1 : donc $\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \to \exp(1)$

ie $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

Théorème (divergence par minoration)

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geqslant m_n \quad \text{APCR} \\ m_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \to +\infty$$

démo : ?

Application : $n! \to +\infty$

Soit $n \geqslant 1$

On a $n! = n \times (n-1)!$

or $(n-1)! \geqslant 1$ donc $n! \geqslant n$

Or $n \to +\infty$ donc $n! \to +\infty$

Application !! : limite des suites géométriques

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors

1) $\left.\begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ a > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^n \to +\infty$

2) ! $\left.\begin{array}{l} a \in \mathbb{C} \\ |a| < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^n \to 0$

3) On suppose $|a| = 1$
alors :
$(a^n)_n \xrightarrow{CV} \iff a = 1$

4) $\left.\begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ a \leqslant -1 \end{array}\right\} \Rightarrow (a^n)_n$ n'a pas de limite
(ni finie, ni infinie)

5) $\left.\begin{array}{l} a \in \mathbb{C} \\ |a| \geqslant 1 \\ a \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (a^n)_n$ diverge

Démo

1) Osq $a \in \mathbb{R}$ et $a > 1$

Astuce Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $a^n = (1 + \underbrace{(a-1)}_{\substack{\alpha := \\ \alpha > 0}})^n = (1+\alpha)^n \underset{\text{Newton}}{\geqslant} 1 + n\alpha$

Or, $n\alpha \to +\infty$ car $\begin{cases} \alpha > 0 \\ n \to +\infty \end{cases}$, donc par minoration

$a^n \to +\infty$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Osq $a \neq 0$
On a :

$|a^n| = |a|^n \underset{\text{astuce}}{=} \left(\dfrac{1}{\frac{1}{|a|}}\right)^n$

Or $\dfrac{1}{|a|} > 1$

donc, d'après 1) : $\left(\frac{1}{|a|}\right)^n \to +\infty$

donc, par opérations sur les limites : $\frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} \to 0$

ie $|a^n| \to 0$ donc $a^n \to 0$

3) Osq $|a| = 1$

R* ie $a \in \mathbb{U}$ ← cercle unité

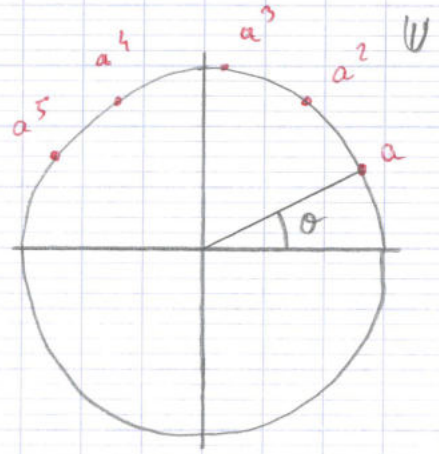
(rappel : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{U}_n \subsetneq \mathbb{U}$)

Soit donc $\theta \in \mathbb{R}$ tq $a = e^{i\theta}$

(Rappel : $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$)

Osq $(a^n)_n \xrightarrow{CV}$

Dessin :



On a donc $a^{n+1} - a^n \to 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $a^{n+1} - a^n = a^n(a-1)$

donc $|a^{n+1} - a^n| = \underbrace{|a|^n}_{=1} |a-1| \to 0$

Ie $|a-1| \to 0$

donc $|a-1| = 0$

ie $a = 1$

4) 5) Exercice ?

2) Théorème de la limite monotone

Th : $\left.\begin{array}{l}(u_n)_n \nearrow \\ (u_n)_n \text{ majorée}\end{array}\right) \Rightarrow (u_n)_n \xrightarrow{CV}$

Démo : Osq $(u_n)_n \nearrow$ et majorée

La suite $(u_n)_n$ étant majorée, on peut poser

$l := \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$

Mq $u_n \to l$

Soit $\varepsilon > 0$

On utilise le fait que la borne supérieure est atteinte à ε - près

Ie, $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \sup u_n - \varepsilon < u_{N_0} \leq \sup u_n$

Fixons un tel N_0

Soit $n \geq N_0$, déjà on a $u_n \leq l$

(car $l = \sup_k u_k$)

On a $\underset{\substack{\uparrow \\ (u_k)_k \nearrow}}{u_n \geq u_{N_0}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{déf de } N_0}}{\geq l - \varepsilon}$

Ainsi, on a $l - \varepsilon \leq u_n \leq l$

En particulier : $|u_n - l| \leq \varepsilon$

CCL : $u_n \to l$

Remarques

1) Énoncé similaire si $(u_n)_n \searrow$ et minorée

2) Ici, on a $\forall n$, $u_n \leqslant \lim\limits_{p \to \infty} u_p$

3) On peut améliorer ce résultat

$$\left.\begin{array}{l}(u_n)_n \nearrow \text{ APCR} \\ (u_n)_n \text{ majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)_n \xrightarrow{CV}$$

Corollaire
Soit $(u_n)_n$ croissante
Alors, on a l'alternative suivante :
- si $(u_n)_n$ majorée, elle converge
- sinon $u_n \to +\infty$

démo :
Soit $(u_n)_n \nearrow$
Osq $(u_n)_n$ n'est pas majorée
ie "$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$" est faux
Osq $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, u_{N_0} > M$ (*)

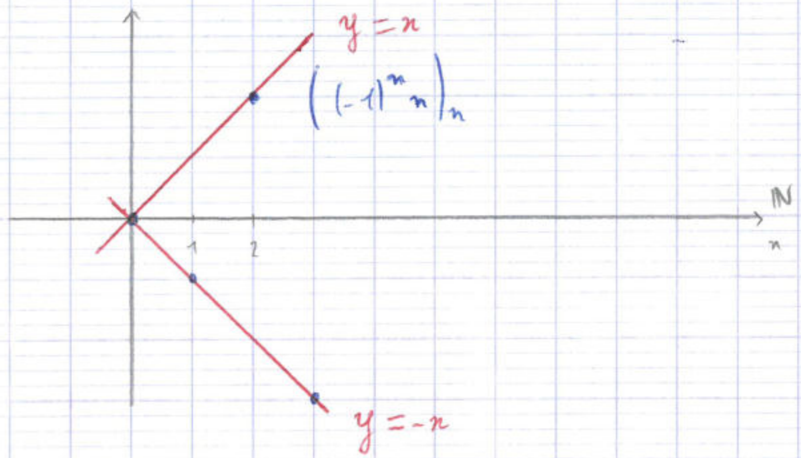
Mq $u_n \to +\infty$
Soit $A \in \mathbb{R}$
D'après (*), soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $u_{N_0} > A$
Soit $n \geqslant N_0$, ĉ $(u_k)_k \nearrow$, on a $u_n \geqslant u_{N_0} \geqslant A$

Ainsi, $u_n \to +\infty$

Remarque :

Une suite $(u_n)_n$ non majorée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$

contre-exemple : $((-1)^n n)_{n\geq 0}$

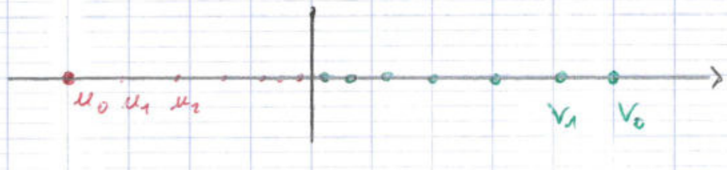


3) Suites adjacentes

Déf : on dit que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$:

- $(u_n)_n \nearrow$ et $(v_n)_n \searrow$
- $v_n - u_n \to 0$

Dessin



Lemme :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ adjacentes

1) $(v_n - u_n)_n \searrow$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$

Démo :

1) On a $(u_n)_n \nearrow$ donc $(-u_n)_n \searrow$
or $(v_n)_n \searrow$

donc $(v_n - u_n)_n \searrow$

2) Mq $\forall n$, $u_n \leq v_n$
ie mq $\forall n$, $u_n - v_n \leq 0$
On raisonne par l'absurde et osq
$\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} - v_{n_0} > 0$
On fixe un tel n_0. On écrit plutôt $v_{n_0} - u_{n_0} < 0$
Or, $(v_n - u_n)_n \searrow$
donc : $\forall n \geq n_0$, $v_n - u_n \leq v_{n_0} - u_{n_0} < 0$ (*)

On passe à la limite $(n \to \infty)$ dans (*), on obtient $0 \leq v_{n_0} - u_{n_0} < 0$

donc $0 < 0$ Absurde.

Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ adjacentes

alors, il existe $l \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} u_n \to l \\ v_n \to l \end{cases}$

De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$

Démo :

1) Mq $(u_n)_n$ majorée par v_0

Soit $n \in \mathbb{N}$
Ĉ $(v_n)_n \searrow$ on a : $v_n \leq v_0$
D'après le lemme : $u_n \leq v_n$
donc, $u_n \leq v_0$

donc $(u_n)_n \xrightarrow{CV}$
On note $l := \lim\limits_{n \to \infty} u_n$

On a $\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n - u_n \to 0 \end{array}$ donc, on a $u_n + v_n - u_n \to l$

ie $v_n \to l$

Méthode à retenir :

Soit $n \in \mathbb{N}$. $(\text{Mq } u_n \leq l)$
Soit $p \geq n$. Ĉ $(u_n)_n \nearrow$, on a $u_n \leq u_p$ $(*)$
Dans $(*)$, on laisse n fixe et on fait tendre p vers $+\infty$
A la limite, on a : $u_n \leq l$
par passage à la limite dans $\leq$

De $\hat{m}$: $\forall n$, $l \leq v_n$

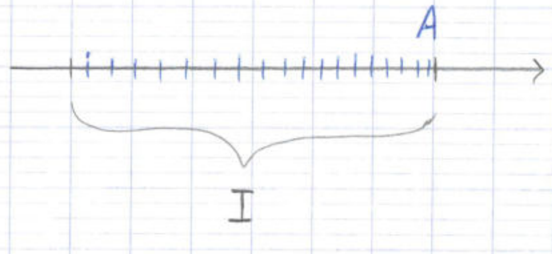
VII. Point de vue séquentiel sur quelques propriétés de $\mathbb{R}$

1) Suites et densité

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $l(I) > 0$
Soit $A \subset I$
alors, les assertions suivantes sont équivalentes
1) A dense dans I
2) $\forall x \in I$, $\exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$: $a_n \to x$

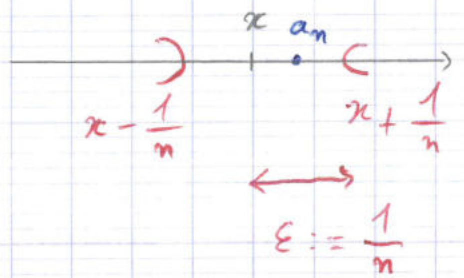
Dessin :



démo :

1) $\Rightarrow$ 2)
Osq A dense dans I
Soit $x \in I$
On sait que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$: $|x - a| \leq \varepsilon$ $(*)$
On séquentialise cette assertion
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varepsilon := \frac{1}{n}$.
D'après $(*)$, il existe $a \in A$ tq $|x - a| \leq \varepsilon = \frac{1}{n}$
on le note a_n

Dessin :



Ainsi : $\exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}^*} : \forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n - x| \leq \frac{1}{n}$

Fixons une telle suite

On a $a_n \to x$

Remarques

1) En fait, on aurait pu mq

$$\exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, |\underbrace{a_n}_{\in A} - \underbrace{x}_{\in I}| \leq \frac{1}{2^n}$$

2) Ce procédé de séquentialisation est en fait possible pour n'importe quelle ($\forall \varepsilon > 0$)- assertion.

2) $\Rightarrow$ 1)

Osq $\forall x \in I, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \to x$ $(**)$

Mq A dense dans I

Soit $x \in I$

Soit $\varepsilon > 0$

Mq $\exists a \in A : |x - a| \leq \varepsilon$

D'après $(**)$, soit $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to x$

Ĉ $a_n \to x$, soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, |a_n - x| \leq \varepsilon$

On a $|a_{N_0} - x| \leq \varepsilon$

On a mq

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : |x - a| \leq \varepsilon$

2) Bornes supérieures et suites

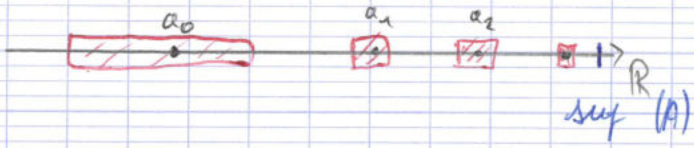
Théorème très pratique

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée

1) il existe $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to \sup A$

2) On peut prendre $(a_n)_n$ croissante

3) si $\sup A \notin A$, on peut prendre $(a_n)_n$ strictement croissante



Démo :

On distingue deux cas

1er cas : $\sup A \in A$ ie A admet un + grand élément

On prend la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à $\sup A$

2ème cas : $\sup A \notin A$

On sait que

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \sup A - \varepsilon < a < \sup A$

Construisons $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

1) $(a_n)_n \nearrow\nearrow$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n - \sup A| \leq \frac{1}{n}$

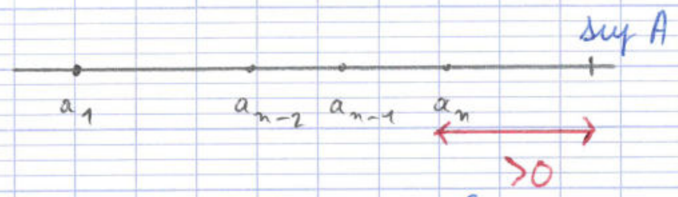
$n = 1$: d'après (*) avec $\varepsilon = 1$

Soit $a_1 \in A$ tq $\sup A - 1 < a_1 < \sup A$

On a donc $|a_1 - \sup A| \leq \frac{1}{1}$

Fixons $n \geq 1$

Qsq on a construit $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ vérifiant 1) et 2)



On a : $\sup A > a_n$ car $\begin{cases} a_n \in A \\ \sup A \notin A \end{cases}$

On pose $\varepsilon := \min\left(\underbrace{\sup A - a_n}_{d>0}, \frac{1}{n+1}\right)$

d'après (*) avec ε

soit $a_{n+1} \in A$ tq $\sup A - \varepsilon < a_{n+1} < \sup A$

On a :

. $\sup A - a_{n+1} < \varepsilon \leq \sup A - a_n$

donc $a_{n+1} > a_n$

. $|\sup A - a_{n+1}| = \sup A - a_{n+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{n+1}$

CCL : par récurrence, on a construit une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}^*} \nearrow\nearrow$ tq $\forall n$, $|a_n - \sup A| \leq \frac{1}{n}$

On a donc $a_n \to \sup A$

3) Théorème de Bolzano - Weierstrass

Théorème (HP) :

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée

Alors, $(u_n)_n$ admet une sous-suite (suite extraite) convergente.