Chapitre 14

Comparaison des suites

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Formule de Stirling donnant un équivalent simple de $n!$

Les outils de comparaison des suites permettent de donner, par exemple, un sens aux énoncés intuitifs suivants :

▷ « Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers $+\infty$ à la même vitesse ».

▷ « À quelle vitesse la suite $(u_n)_n$ tend-elle vers ℓ ? ».

▷ « La suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ beaucoup plus vite que $(v_n)_n$ ne le fait ».

▷ « La suite $(\varepsilon_n)_n$ tend très vite vers 0 ».

▷ « La quantité u_n est négligeable devant la quantité v_n ».

Ces outils s'avèrent fondamentaux pour étudier les suites.

Savoir calculer des équivalents et manier ces relations de comparaison est l'un des objectifs importants du cours de PCSI.

Chapitre 14 : Comparaison des suites

Objectif :

On veut donner un sens précis à " $u_n \to 0$ rapidement ", ou " $a_n \to 2$ à la vitesse $\frac{1}{n}$ "

Rq : Tout ce qui sera fait ici sera également fait pour les fonctions

Notations : $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$, $(A_n)_n$, $(B_n)_n$, etc. sont les suites réelles.
$\ell \in \mathbb{R}$

I, Suites équivalentes

1) Suites non nulles APCR

Déf : On dit que $(u_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang et on note $u_n \neq 0$ APCR
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ u_n \neq 0$

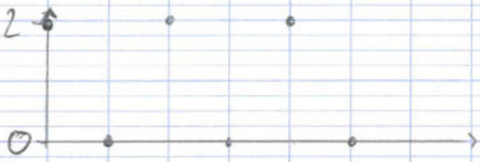
Exemples :
A part la suite nulle, toutes les suites usuelles (ou presque) sont $\neq 0$ APCR

$n^2+1 \neq 0$ APCR

$\sqrt{1+\frac{1}{n}+\ln(n)} \neq 0$ APCR

non-exemple : $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right)_n$ n'est pas $\neq 0$ APCR

• $((-1)^n+1)_n$ n'est pas $\neq 0$ APCR



2) Définition dans le cas $\neq 0$ APCR

Déf : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ $\neq 0$ APCR
On dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(v_n)_n$
et on note $u_n \sim v_n$ ssi

$$\frac{u_n}{v_n} \to 1$$

Autres notations

$$u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n \quad , \text{etc...}$$

⚠ On n'écrit jamais $\cancel{u_n \sim 0}$

Exemples : On a $n^2 - 3n \sim n^2$
démo : $\dfrac{n^2-3n}{n^2} = 1 - \dfrac{3}{n} \to 1$

On a également : $n^2 - 3n \sim n^2 + 42\sqrt{n} - 8$

démo : ! on met l'exp. la + simple au dénominateur.

! facto par la qté dom.

$$\frac{n^2+42\sqrt{n}-8}{n^2-3n} = \frac{1+\frac{42}{n\sqrt{n}}-\frac{8}{n^2}}{1-\frac{3}{n}}$$

et $1 + \dfrac{42}{n\sqrt{n}} - \dfrac{8}{n^2} \to 1$; $1 - \dfrac{3}{n} \to 1$ donc $\dfrac{n^2+42\sqrt{n}-8}{n^2-3n} \to 1$

Prop : La relation "$u_n \sim v_n$" est une relation d'équivalence.

démo : 3 pts à vérifier

. $u_n \sim u_n$ car $\frac{u_n}{u_n} = 1 \to 1$

. osq $u_n \sim v_n$ ie $\frac{u_n}{v_n} \to 1$ alors $\frac{1}{\left(\frac{u_n}{v_n}\right)} \to \frac{1}{1} = 1$

ie $v_n \sim u_n$

. osq $\frac{u_n}{v_n} \to 1$ et $\frac{v_n}{w_n} \to 1$

alors, on a $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} \to 1 \times 1 = 1$

3) Exemples

. $5n^2 - 8n + 2 \sim 5n^2$

. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$

avec $p \in \mathbb{N}$ et $a_p \neq 0$

alors $P(n) \sim a_p n^p$

. $\frac{7n^3 - 15n^2 + 2n - 1}{5n^4 + 2n^3 - 10n^2 + 12} \sim \frac{7}{5n}$

. $n^2 + \ln(n) \sim n^2$

. Mq $\ln(n+1) \sim \ln(n)$

Méthode

On regarde $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1$

Soit $n \geq 1$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0}{\ln(n) \to +\infty}$$

⚠ " $\dfrac{0}{+\infty}$ " n'est pas une FI

On a donc $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 \to 0$

ie $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \to 1$

CCL : $\ln(n+1) \sim \ln(n)$

Solution fausse !!!

On a $n+1 \sim n$

On passe au $\ln(\cdot)$: on obtient $\ln(n+1) \sim \ln(n)$

? Mq $\ln(3n^2 - 8n + 1) \sim \ln(5n^2 - 12)$

. Mq $\ln(2n) \sim \ln(n)$

Soit $n \geq 1$, on a

$$\frac{\ln(2n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(2) + \ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} \to 1$$

. $2^n + \ln(n)^n \sim \ln(n)^n$

Soit $n \geq 1$

On a $\dfrac{2^n + \ln(n)^n}{\ln(n)^n} = 1 + \left(\dfrac{2}{\ln(n)}\right)^n$

Mq $\left(\dfrac{2}{\ln(n)}\right)^n \to 0$

1ère démo :

On a $\dfrac{2}{\ln(n)} \to 0$ donc $0 \leq \dfrac{2}{\ln(n)} \leq \dfrac{1}{2}$ APCR

donc $0 \leq \left(\dfrac{2}{\ln(n)}\right)^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ APCR

or, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ donc $\left(\dfrac{2}{\ln(n)}\right)^n \to 0$

2ème démo :

On écrit : $\left(\dfrac{2}{\ln(n)}\right)^n = e^{n \ln\left(\frac{2}{\ln(n)}\right)}$

Or, $\dfrac{2}{\ln(n)} \to 0$, donc par composition, $\ln\left(\dfrac{2}{\ln(n)}\right) \to -\infty$

et, $n \to +\infty$

donc $n \ln\left(\frac{2}{\ln(n)}\right) \to -\infty$

Par composition, $\exp\left(n \ln\left(\frac{2}{\ln(n)}\right)\right) \to 0$

CCL : $2^n + \ln(n)^n \sim \ln(n)^n$

? $2^n + \ln(n)^{\sqrt{n}} \sim$?

Remarque : forme des équivalents simples

Pour les équivalents simples, on s'autorise :

- $C \in \mathbb{R}$ avec $C \neq 0$
- n
- $2^n, 3^n, \dots$: a^n avec $a > 0$
- $\exp(n)$
- $\ln(n)$, $\ln(\ln(n))$

ainsi que
- tous les produits d'équivalents simples
- tous les inverses
- toutes les puissances A_n^α où A_n est un éq. simple (>0 APCR) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemples : n^{42}, 42^n, $n^2 \ln(n)$

$5^n \cdot n^3 \cdot \sqrt{\ln(n)}$

4) Définition en toute généralité (HP)

<u>Déf</u> : Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On dit que $u_n \sim v_n$ ssi

$$\exists (\lambda_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \begin{cases} u_n = \lambda_n \cdot v_n \quad \text{APCR} \\ \lambda_n \to 1 \end{cases}$$

5) Trois équivalents classiques

<u>Proposition</u>: R*

Soit $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\underline{\varepsilon_n \to 0}$

alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n \\ 2)\ \ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n \\ 3)\ \exp(\varepsilon_n) - 1 \sim \varepsilon_n \end{array}}$$

<u>Démo</u>: Ce sont des taux d'accroissements

1) On a $\dfrac{\sin(h)}{h} = \dfrac{\sin(h) - \sin(0)}{h} \xrightarrow[h \to 0,\, \neq]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$

Or $\varepsilon_n \to 0$

On peut composer les limites. On obtient : $\dfrac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 1$

ie $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

2) On a : $\dfrac{\ln(1+h)}{h} = \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} \xrightarrow[h \to 0,\, \neq]{} \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

Or, $\varepsilon_n \to 0$, on a : $\dfrac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 1$

ie $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

3) On écrit pour $h \neq 0$

$$\frac{\exp(h)-1}{h} = \frac{\exp(h)-\exp(0)}{h} \underset{h \to 0, \neq}{\longrightarrow} \exp'(0) = 1$$

Or, $\varepsilon_n \to 0$

donc $\frac{\exp(\varepsilon_n)-1}{\varepsilon_n} \to 1$

ie $\exp(\varepsilon_n) - 1 \sim \varepsilon_n$

Exemple !! $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

$$\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$$

6) Limite de suites équivalentes

Prop : Deux suites équivalentes ont la m̂ limite (finie ou infinie)

1) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ l \in \mathbb{R} \\ u_n \to l \end{array}\right\} \Rightarrow v_n \to l$

2) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow v_n \to +\infty$

3) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u_n \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow v_n \to -\infty$

Démo :

1) Osq $u_n \to l \in \mathbb{R}$ et $\frac{u_n}{v_n} \to 1$

APCR, on a $v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n$

et $\begin{cases} \frac{u_n}{v_n} \to 1 \\ u_n \to l \end{cases}$

donc $v_n \to l$

2) 3) idem.

Exemple

Calculer la limite (si elle existe) de $2^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Il s'agit d'une FI " $+\infty \times 0$ "

On a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $2^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 2^n \times \frac{1}{n}$

Or, $\frac{2^n}{n} \to +\infty$ par croissance comparée

CCL : $2^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to +\infty$

De m̂, $\sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

On a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $\sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

CCL, $\sqrt{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$

Prop !! : Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Soit $l \in \mathbb{R}$ tq $\underline{l \neq 0}$

alors $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \sim v_n$

Remarque :

- $\left.\begin{array}{l} 2^n \to +\infty \\ n^2 \to +\infty \end{array}\right\} \not\Rightarrow 2^n \sim n^2$

- $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} \to 0 \\ \frac{1}{5^n} \to 0 \end{array}\right\} \not\Rightarrow \frac{1}{n} \sim \frac{1}{5^n}$

Démo :

On a $\frac{u_n}{v_n} \to \frac{l}{l} = 1$ ■

Exemple : $2 + \frac{1}{n} \sim 2 + \frac{1}{10^n}$

Remarques :

- $\left.\begin{array}{l} (u_n)_n \text{ bornée} \\ u_n \sim v_n \end{array}\right\} \Rightarrow (v_n)_n \text{ bornée}$

de m̂ pour majorée, minorée

⚠ $\left.\begin{array}{l} (u_n)_n \nearrow \text{ APCR} \\ u_n \sim v_n \end{array}\right\} \not\Rightarrow (v_n) \nearrow \text{ APCR}$

contre - exemples:

$\cdot\ \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\searrow} \sim \overbrace{1-\frac{1}{n}}^{\nearrow}$

$\cdot\ \frac{n}{2} + (-1)^n \sim \frac{n}{2} \hookrightarrow \nearrow$

ni $\nearrow$ ni $\searrow$

<u>démo</u>:
$$\frac{\frac{n}{2}+(-1)^n}{n/2} = 1 + \frac{2(-1)^n}{n}$$

R^x : passer à la valeur absolue

On a $\left|\frac{2(-1)^n}{n}\right| = \frac{2}{n} \to 0$

R^x : pour mq $u_n \to 0$, on fait $|u_n| \leq \ldots \leq \varepsilon_n \to 0$

CCL : $\frac{n}{2} + (-1)^n \sim \frac{n}{2}$

⚠ $u_n \sim v_n \not\Rightarrow u_n - v_n \to 0$

<u>contre exemple:</u>

$n^2+n \sim n^2$

mais $(n^2+n) - n^2 \to +\infty$

En revanche, on a :

$u_n \sim v_n$ ssi la différence relative entre u_n et v_n tend vers 0 démo : $\frac{u_n - v_n}{u_n} = 1 - \frac{v_n}{u_n} \to 0$

$$\Updownarrow$$

$$u_n \sim v_n$$

7) Signe des suites équivalentes

Proposition :
Deux suites équivalentes ont le même signe strict APCR

Démo :

On a $\frac{u_n}{v_n} \to 1$

donc, $\frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}$ APCR

donc : $\frac{u_n}{v_n} > 0$ APCR

donc u_n et v_n ont le m signe strict APCR

8) Opérations autorisées dans les équivalences

Prop :

1) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim A_n \\ v_n \sim B_n \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \cdot v_n \sim A_n \cdot B_n$

2) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim A_n \\ p \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n^p \sim A_n^p$

⚠ p est une puissance constante

3) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim A_n \\ A_n \neq 0 \text{ APCR} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_n \neq 0 \text{ APCR} \\ \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{A_n} \end{array}$

4) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim A_n \\ v_n \sim B_n \\ B_n \neq 0 \text{ APCR} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{A_n}{B_n}$

5) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim A_n \\ A_n \geqslant 0 \quad \text{APCR} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_n \geqslant 0 \quad \text{APCR} \\ \sqrt{u_n} \sim \sqrt{A_n} \end{array}$

<u>Complément</u> : composition des limites

On pose $\cancel{h = \frac{1}{n}}$ ou $\cancel{\frac{1}{x} = h}$

<u>Prop</u> : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Soit $\left\{\begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ l \in \mathbb{R} \end{array}\right.$ tel que $f(t) \xrightarrow[t \to a]{} l$

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to a$

alors $f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$

c'est le théorème de composition des limites

<u>Application</u> :

On a $\ln(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$
et $\ln'(1) = 1$

ie $\dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ \neq}]{} 1$

Or, $\dfrac{1}{n} \to 0$

donc, par composition des limites, on a

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

ie $\quad n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1$

Rq$^{*/2}$: Osq $u_n \longrightarrow -\infty$
alors $\exp(u_n) \longrightarrow 0$
car $\exp(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$

On note $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

↳ théorème vrai pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Démo :

1) Osq $u_n \sim A_n$, $v_n \sim B_n$
On a $\frac{u_n}{A_n} \longrightarrow 1$ et $\frac{v_n}{B_n} \longrightarrow 1$

donc par produit des limites $\frac{u_n v_n}{A_n B_n} \longrightarrow 1$

ie $u_n v_n \sim A_n B_n$

2) récurrence sur p

3) Osq $\frac{u_n}{A_n} \longrightarrow 1$, donc $\frac{A_n}{u_n} \longrightarrow 1$

! On force à apparaître $\frac{1}{u_n}$

Or, $\dfrac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{A_n}} = \dfrac{A_n}{u_n}$

donc $\dfrac{1/u_n}{1/A_n} \longrightarrow 1$ ie $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{A_n}$

4) $\Leftarrow$ 1) et 3)

5) Osq $\dfrac{u_n}{A_n} \longrightarrow 1$

et u_n, $A_n \geqslant 0$ APCR

Or, $\sqrt{\cdot}$ est continue en 1

donc $\sqrt{\dfrac{u_n}{A_n}} \longrightarrow 1$ ie $\dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{A_n}} \longrightarrow 1$

? 1) Soit $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tq $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

Mq $\sqrt{\varepsilon_n} \longrightarrow 0$

2) Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}_+$ tq $u_n \longrightarrow \ell$

Mq $\sqrt{u_n} \longrightarrow \sqrt{\ell}$

Qté conjuguée

⚠ $((-1)^n)_n$ n'a pas de limite

mais $((-1)^n)^2 \longrightarrow 1$

9) Opérations interdites

Prop :

1) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim A_n \\ v_n \sim B_n \end{array}\right\} \not\Rightarrow u_n + v_n \sim A_n + B_n$

2) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim A_n \\ u_n\ A_n > 0 \text{ APCR} \end{array}\right\} \not\Rightarrow \ln(u_n) \sim \ln(A_n)$

3) $u_n \sim A_n \Rightarrow \exp(u_n) \sim \exp(A_n)$

4) $u_n \sim A_n \not\Rightarrow u_n^{\,n} \sim A_n^{\,n}$

Démo : !! contre exemples à retenir

1) $1 + \frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{n}$

$-1 \sim -1$

↳ somme : $\frac{1}{n} \sim -\frac{1}{n}$ FAUX

Rq : $\left.\begin{array}{l} u_n \to 0 \\ v_n \to 0 \end{array}\right\} \not\Rightarrow u_n \sim v_n$

contre exemple : $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{10^n}$

En effet $\frac{1/n}{1/10^n} = \frac{10^n}{n} \longrightarrow +\infty$

2) $1+\frac{1}{n} \sim 1-\frac{1}{n}$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$\sim \frac{1}{n} \not\sim -\frac{1}{n}$

3) On a $n+1 \sim n$

A-t-on $\exp(n+1) \sim \exp n$?

NON car, $\frac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = e^{n+1-n} = e^1 \not\to 1$

4) On a $1+\frac{1}{n} \sim 1$

mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n$

$\qquad e \qquad\qquad 1$

10) Obtention d'équivalent par encadrement

Prop :

$$\left.\begin{array}{ll} m_n \leqslant u_n \leqslant M_n & \text{APCR} \\ m_n \sim M_n & \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_n \sim m_n \\ u_n \sim M_n \end{array}$$

démo :

Osq $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ APCR et $m_n \sim M_n$

1er cas : $M_n > 0$ APCR

On a APCR $\frac{m_n}{M_n} \leqslant \frac{u_n}{M_n} \leqslant 1$

or $\dfrac{m_n}{M_n} \to 1$

donc $\dfrac{u_n}{M_n} \to 1$ ie $u_n \sim M_n$

2^e cas : si $M_n < 0$ APCR

c'est pareil

<u>Cas général</u>

Soit N_0 tq $\forall n \geqslant N_0$, $\begin{cases} m_n \neq 0 \\ M_n \neq 0 \end{cases}$

Soit $n \geqslant N_0$

Deux cas :

1) si $M_n > 0$ alors on a $\dfrac{m_n}{M_n} \leqslant \dfrac{u_n}{M_n} \leqslant 1$

2) si $M_n < 0$, on a $\dfrac{m_n}{M_n} \geqslant \dfrac{u_n}{M_n} \geqslant 1$

dans 1 : $\dfrac{m_n}{M_n} - 1 \leqslant \dfrac{u_n}{M_n} - 1 \leqslant 0$

donc $\left| \dfrac{u_n}{M_n} - 1 \right| \leqslant \left| \dfrac{m_n}{M_n} - 1 \right|$

formellement, on utilise le fait que $|\cdot|$ est $\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$

dans 2 : on a $\dfrac{m_n}{M_n} - 1 \geqslant \dfrac{u_n}{M_n} - 1 \geqslant 0$

On a $\left| \dfrac{u_n}{M_n} - 1 \right| \leqslant \left| \dfrac{m_n}{M_n} - 1 \right|$

dans tous les cas, on a $\left| \dfrac{u_n}{M_n} - 1 \right| \leqslant \left| \dfrac{m_n}{M_n} - 1 \right|$

On $\frac{m_n}{M_n} \to 1$

donc $\left| \frac{m_n}{M_n} - 1 \right| \to 0$

CCL : $\frac{u_n}{M_n} \to 1$

11) Formule de Stirling

Prop : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$

III, Suites négligeables

1) Définition

Déf : Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n \neq 0$ APCR

On dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$
et on note $u_n = o(v_n)$ (qd $n \to \infty$)
"u_n est un petit "o" de v_n"

ssi $\frac{u_n}{v_n} \to 0$

on notera aussi $u_n \underset{n \to \infty}{=} o(v_n)$

Rq : on dit alors que $(u_n)_n$ est prépondérante devant $(u_n)_n$

Exemples:

. $\ln(n) = o(n)$
"$\ln(n)$ est infiniment petite devant n"

. $\sqrt{n} = o(n)$
. $1 = o(n)$
. $n = o(n!)$
démo: On calcule $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \leq \frac{1}{n-1}$

si $n \geq 1$, ainsi $\frac{n}{n!} \to 0$

. $\exp(n) = o(n!)$

démo: en TD

. si $a > 1$, $a^n = o(n!)$

. $\frac{1}{10^n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$
. $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ou $\frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n}\right)$?

Remarque ⚠ : ici le signe "=" est juste une notation.
Ce n'est pas une vraie égalité

2) Cas particulier très important

Prop R*: $u_n = o(1) \iff u_n \to 0$

démo : Soit u_n (n) $\neq 0$ APCR
(vrai en généralité)

alors on a : $u_n = o(1) \Leftrightarrow \frac{u_n}{1} \to 0$

$\Leftrightarrow u_n \to 0$

Rq (HP) : en tte généralité

$u_n = o(v_n) \overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\exists (\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \begin{cases} u_n = \varepsilon_n v_n & \text{APCR} \\ \varepsilon_n \to 0 \end{cases}$

3) !!! Caractérisation de l'équivalence à l'aide des o(.)

a) Notation

Notation !!

Soient $(u_n)_n$, (v_n), $(t_n)_n$ des suites

On note $u_n = v_n + o(t_n)$

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $u_n - v_n = o(t_n)$

Rq : Dire que $u_n = v_n + o(t_n)$
c'est exact^t dire $(u_n)_n$ égal $(v_n)_n$ plus un petit "o" de $(t_n)_n$

Exemple : $m_{camion} = m_{chassis} + o(1\,t)$

b) Exemple

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ défini par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = n^2 + 3n + 2 - \frac{8}{n}$$

alors on a :

- $u_n = o(n^3)$
- $u_n \sim n^2$
- $u_n = n^2 + o(n^2)$

démo :

On a $u_n - n^2 = 3n + 2 - \frac{8}{n} = o(n^2)$

- $u_n = n^2 + 3n + o(n)$

même démo

⚠ $u_n = n^2 + 42n + o(n)$ est faux

démo :

$$u_n - n^2 - 42n = n^2 + 3n + 2 - \frac{8}{n} - n^2 - 42n$$

$$= -39n + 2 - \frac{8}{n} \neq o(n)$$

car $\dfrac{-39n + 2 - \frac{8}{n}}{n} \not\to 0$

⚠ mais $u_n = n^2 + 42n + o(n^2)$ est vrai

car $\dfrac{-39n + 2 - \frac{8}{n}}{n^2} \to 0$

- $u_n = \underbrace{n^2 + 3n + 2 + o(1)}$

ie $u_n = n^2 + 3n + 2 +$ une suite qui tend vers 0

On dit qu'on fait un développement asymptotique (DA)

c) Exemple plus compliqué

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Exemple: $H_{1000} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{1000}$

C'est la suite harmonique. On n'a pas de formule pour $(H_n)_n$.

On a : $H_n = \ln(n) + \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{12}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

1er terme d'un DA est un équivalent

$\gamma \in \mathbb{R}$

démo : + tard

d) Proposition:

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$$
$$\iff u_n = v_n + o(u_n)$$

Démo : $\frac{u_n}{v_n} \to 1 \iff \frac{u_n}{v_n} - 1 \to 0$

$$\iff \frac{u_n - v_n}{v_n} \to 0$$

$$\iff u_n - v_n = o(v_n)$$
$$\iff u_n = v_n + o(v_n) \quad \blacksquare$$

Application à venir :

. Ssq $u_n \sim v_n$

donc, on a $u_n = v_n + o(v_n)$

donc $\exp(u_n) = \exp(v_n + o(v_n))$

$= \exp(v_n) \cdot \exp(o(v_n))$

et $u_n = v_n + o(v_n)$

$= v_n \underbrace{(1 + o(1))}_{\text{une suite qui tend vers 1}}$

! On a factorisé v_n dans l'expr. $v_n + o(v_n)$

donc $\ln(u_n) = \ln(v_n) + \underbrace{\ln(1 + o(1))}_{o(1)}$

donc $\ln(u_n) = \ln(v_n) + o(1)$

ie $\ln(u_n) - \ln(v_n) \to 0$

Fait : $\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u_n, v_n > 0 \text{ APCR} \end{array}\right\} \Rightarrow \ln(u_n) - \ln(v_n) \to 0$

Rappel : $u_n \sim v_n \not\Rightarrow u_n - v_n \to 0$

$u_n - v_n \to 0 \not\Rightarrow u_n \sim v_n$

démo : 1) $n+1 \sim n$ mais $n+1-n \to 1$

2) $\frac{1}{n} - \frac{1}{10^n} \to 0$ mais $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{10^n}$

? $\left.\begin{array}{l} u_n \to +\infty \\ u_n - v_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \sim v_n$

4) Opérations autorisées

Proposition

1) $$\left.\begin{aligned} u_n &= o(v_n) \\ \lambda &\neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_n = o(\lambda v_n)$$

ie $o\left(\frac{1}{n}\right) \leftrightarrow o\left(\frac{2}{n}\right) \leftrightarrow o\left(\frac{-1}{n}\right)$

2) Compatibilité à la somme

$$\left.\begin{aligned} u_n &= o(t_n) \\ v_n &= o(t_n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_n + v_n = o(t_n)$$

3) Transitivité

$$\left.\begin{aligned} u_n &= o(v_n) \\ v_n &= o(t_n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_n = o(t_n)$$

4) a) $$\left.\begin{aligned} u_n &= o(A_n) \\ v_n &= o(B_n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_n v_n = o(A_n B_n)$$

b) $$\left.\begin{aligned} u_n &= o(v_n) \\ a_n &\sim \alpha_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n u_n = o(\alpha_n v_n)$$

5) $$\left.\begin{aligned} &p \in \mathbb{N} \\ &u_n = o(v_n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_n^p = o(v_n^p)$$

6) $$\left.\begin{aligned} &u_n, v_n > 0 \text{ APCR} \\ &u_n = o(v_n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{u_n} = o(\sqrt{v_n})$$

7) $u_n = o(A_n)$, $u_n \sim v_n$, $A_n \sim B_n$ $\Rightarrow$ $v_n = o(B_n)$

$$\left.\begin{array}{l} u_n = o(A_n) \\ u_n \sim v_n \\ A_n \sim B_n \end{array}\right\} \quad v_n = o(B_n)$$

$\left(\text{ie} \quad o(n+\sqrt{n}) \longleftrightarrow o(n) \right)$

démo : ?

Application à la sommation des équivalents

Si on veut sommer des équivalents

1°) R^x c'est interdit

2°) R^x on utilise : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$

on passe par les $o(\cdot)$

Exemple.

$u_n = n - 2\ln(n)$

$v_n = (n^2+1)\ln\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)$

But : $u_n + v_n \sim ?$

a) on a $u_n \sim n$

b) R^x, c'est un produit

On fait l'équivalent terme à terme

- $n^2 + 1 \sim n^2$
- $\ln\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \sim \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$

$\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

$2n+1 \sim 2n$

donc $\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$

donc, $v_n \sim \dfrac{n^2}{2n} = \dfrac{n}{2}$

c) On a $u_n = n + o(n)$

$$v_n = \frac{n}{2} + o\left(\frac{n}{2}\right)$$

mieux : $v_n = \dfrac{n}{2} + o(n)$

donc $u_n + v_n = \dfrac{3}{2} n + o(n)$

ie $u_n + v_n \sim \dfrac{3}{2} n$

5) Inversion des ordres de comparaison

Proposition :

$$u_n = o(v_n) \Rightarrow \frac{1}{v_n} = o\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

Application

$$\sqrt{n} = o(n \ln(n))$$

En effet, on a déjà $\sqrt{n} = o(n)$

donc a fortiori $\sqrt{n} = o(n \ln(n))$

donc, $\dfrac{1}{n \ln(n)} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

6) Croissances comparées

Proposition

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $\alpha < \beta \Rightarrow n^\alpha = o(n^\beta)$

2) $\alpha > 0 \Rightarrow \ln(n)^\beta = o(n^\alpha)$

3) $a > 1 \Rightarrow n^\alpha = o(a^n)$

4) $0 < a < b \Rightarrow a^n = o(b^n)$

5) (cf exo) $a > 1 \Rightarrow a^n = o(n!)$

6) $n! = o(n^n)$

III, Suites dominées

1) Définition

Déf : Soit $(u_n)_n, (A_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \neq 0$ APCR

On dit que $(u_n)_n$ est dominée par $(A_n)_n$ ssi $\left(\frac{u_n}{A_n}\right)_n$ est bornée

On note $u_n = O(A_n)$ ← lu "grand O"

Exemples :

On compte le nombre d'opérations effectuées dans un programme. On a une liste l en paramètre qui est de taille n

1°) On a quelques opérations initiales $\simeq 5$

2°) On a deux boucles imbriquées au sein desquelles on fait à chaque fois 6 opérations

Au total : $6n^2$ opérations

3°) A la fin on nettoie la liste. Cela fait
$2n$ opérations

4°) On termine avec 2 opérations

Total : le nb d'opérations effectuées par le programme vaut $5 + 6n^2 + 2n + 2$
ie $6n^2 + 2n + 7 = O(n^2)$

démo : $\frac{6n^2+2n+7}{n^2} \to 6$

Donc $\left(\frac{6n^2+2n+7}{n^2}\right)_n$ est bornée

donc $6n^2 + 2n + 7 = O(n^2)$

. On a $4n + 8 = O(n^2)$

Ainsi, si le programme est tel que :
- dans certains cas, il effectue $4n+8$ opérations
- dans d'autres, $6n^2 + 2n + 7$ opérations

Alors, sa complexité est un $O(n^2)$

démo :
. On a $4n + 8 = o(n^2)$
. On a $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n \xrightarrow{CV}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n \text{ bornée}$$

$$\Leftrightarrow u_n = O(v_n)$$

- Si $0 \leq u_n \leq v_n$ APCR

  alors $0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1$ APCR

  donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ bornée

CCL : $0 \leq u_n \leq v_n$ APCR $\Rightarrow u_n = O(v_n)$

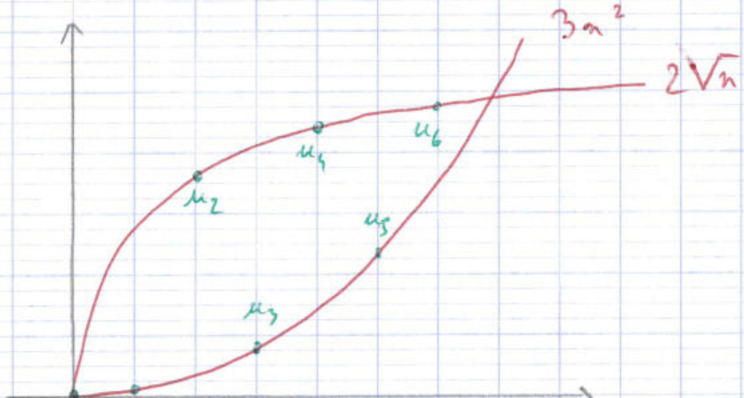
- $8\ln(n) - 2 = O(n^2)$

- mais n^3 n'est pas un $O(n^2)$

2) Un exemple + subtil

Soit $(u_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \begin{cases} 3n^2 \text{ si } n \text{ impair} \\ 2\sqrt{n} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$

Dessin



On a $u_n = O(n^2)$

ie " $(u_n)_n$ ne va pas ⊕ vite (sous entendu infiniment + vite) que n^2 "

3) Un cas particulier très important

Prop R*

$$u_n = O(1) \iff (u_n)_n \text{ bornée}$$

Exemple : Un programme dont la complexité est en $O(1)$ est un programme dont la vitesse d'exécution "ne dépend pas" de la taille des données.

Ex : afficher le 1er terme d'une liste

Rq* : L'opération l.append(a) n'a pas une complexité en $O(1)$

idée :

Opérations	Mémoire
l = [1, 2, 3]	[1 | 2 | 3 | | |] inutilisée pour le moment mais réservée en mémoire
l.append(4)	[1 | 2 | 3 | 4]
l.append(10)	[1 | 2 | 3 | 4 | 10]
l.append(-1)	[1 | 2 | 3 | 4 | 10 | -1]
l.append(7)	1°) Aller chercher un espace mémoire 2 fois + grand 2°) Aller y recopier la liste : ↳ $O(n)$ opérations

[1 | 2 | 3 | 4 | 10 | -1 | 7 | | | | |]

CCL : L'opération .append(a) n'est pas en $O(1)$
Cependant, en moyenne, elle est en $O(1)$

Ie si j'effectue p opérations .append(a) cela se fera en $O(p)$

⚠ **Rq** : L'opération "a in l" a une complexité en $O(\text{len}(l))$

Rq : On parle aussi de la complexité en mémoire ie la taille de la mémoire utilisée par le programme en fct de n

4) Propriétés de $O(\cdot)$

Prop

1) $\left.\begin{array}{l} u_n = O(A_n) \\ \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n = O(\lambda A_n)$

Ie : $O(42n^2)$ est interchangeable avec $O(n^2)$

2) $\left.\begin{array}{l} u_n = O(A_n) \\ v_n = O(A_n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n = O(A_n)$

3) $\left.\begin{array}{l} u_n = O(A_n) \\ A_n = O(B_n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n = O(B_n)$

4) $\left.\begin{array}{l} u_n = O(A_n) \\ a_n \sim \alpha_n \end{array}\right\} \Rightarrow a_n u_n = O(\alpha_n A_n)$

5) etc

Prop : $\left.\begin{array}{l} m_n \leq u_n \leq M_n \quad \text{APCR} \\ m_n = O(A_n) \\ M_n = O(A_n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n = O(A_n)$

5) Passage à la $|\cdot|$

Prop :

1) $u_n = o(v_n) \iff |u_n| = o(|v_n|)$

2) $u_n = O(v_n) \iff |u_n| = O(|v_n|)$

6) Liens

Prop

$$\begin{array}{ccc} u_n = o(v_n) & & u_n \sim v_n \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & u_n = O(v_n) & \end{array}$$

7) Extension aux nombres complexes

Tout ce qui précède s'étend à $\mathbb{C}$

Ex : Soient $(z_n)_n$, $(w_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $(\neq 0 \text{ APCR})$

alors $z_n \sim w_n$ ssi $\dfrac{z_n}{w_n} \longrightarrow 1$

⚠ *

$$z_n \sim w_n \quad \overset{\not\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \quad \begin{cases} Re(z_n) \sim Re(w_n) \\ Im(z_n) \sim Im(w_n) \end{cases}$$

Complément

Osq $\forall n$, $u_n = 3^n - n$

alors

1) $u_n = o(2^n)$ F mais $2^n = o(u_n)$
2) $u_n = O(2^n)$ F mais $10 \times 2^n - n^2 = O(n^2)$
3) $u_n = o\left(\frac{1}{5^n}\right)$ F
4) $u_n \sim 3^n$ V $n = o(n^2)$
5) $u_n = 3^n + o(n^2)$ V
6) $u_n \sim n$ F
7) $u_n = o(u_n)$ F
8) $u_n = O(u_n)$ V
9) $2^n = o(u_n)$ V $\frac{2^n}{3^n - n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$
10) $u_n = 3^n + o(\sqrt{n})$ F
11) $u_n = O(n^2)$ F
12) $u_n = 3^n - n + o(n)$ V
13) $u_n - n \sim 3^n$ V
14) $u_n = O(n)$ F
15) $u_n = 3^n + o(n)$ F $u_n = 3^n + O(n)$
16) $\ln(n) 2^n = o(u_n)$ V
17) $u_n = O(n^n)$ V
18) $u_n = 3^n + n + o(n^2)$ V car $-2n = o(n^2)$
19) $u_n \sim u_n$ V