

Chapitre 15

Espaces vectoriels



H. Grassmann

Hermann Grassmann
(1809–1877)



Richard Dedekind
(1831–1916)



Giuseppe Peano
(1858–1932)



Hermann Weyl
(1885–1955)

Le long travail d'abstraction et de formalisation qui aboutit à la théorie des espaces vectoriels commença par les travaux révolutionnaires de Hermann Grassmann. Ses recherches ne furent pas remarquées à leur juste valeur en son temps, et Grassmann fut plus célèbre à son époque en tant que linguiste qu'en tant que mathématicien.

Ils furent repris et peaufinés par de nombreux mathématiciens ensuite, parmi lesquels Richard Dedekind (grand représentant de l'école algébriste allemande), Giuseppe Peano (grand mathématicien italien) et Hermann Weyl (mathématicien et physicien théoricien allemand, émigré aux USA).

Chapitre 15: Espaces vectoriels

Introduction:

Soient $\vec{v}, \vec{w}$ deux vecteurs

On sait faire:

$$\cdot \vec{v} + \vec{w}$$

$$\cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\cdot \vec{v} - \vec{w}$$

$$\cdot 2\vec{v}, \quad 3\vec{w}, \quad -5\vec{v}, \quad \sqrt{2}\vec{v}$$

Exemples d'ensembles où l'on dispose de $\begin{cases} x+y \\ \lambda x \end{cases}$

$\cdot \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: le plan et l'espace

Rq: on a identifié $\vec{u} \leftrightarrow \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}) \leftrightarrow \mathbb{R}^2$

$\cdot \mathbb{C}$

$\cdot \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

Prop:

$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue} \\ g \text{ continue} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f+g \text{ continue} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f \text{ continue} \end{array}$

$\cdot \mathcal{E}^p(I, \mathbb{R})$ I intervalle, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$\cdot \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

$\cdot M_{n,p}(\mathbb{K}) : \begin{cases} M_1 + M_2 \\ \lambda M \end{cases}$

$\cdot \mathbb{K}[X] : \begin{cases} P+Q \\ \lambda P \end{cases}$

$\cdot \text{Si } n \in \mathbb{N} : \mathbb{K}_n[X]$

Rq: $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable par produit

$$\begin{aligned} & \cdot T_n^{(P)}(K) \\ & \cdot \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

$$(u_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{R}^N \rightarrow \begin{cases} (u_n)_n + (w_n)_n \\ \lambda (u_n)_n \end{cases}$$

Notation : K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

R_q^* : ce qui suit est vrai aussi dans
n'importe quel corps $(Q, \bar{Q}, \bar{Q} \cap \mathbb{R})$

I, Espaces vectoriels

1) Définition

Soit $(E, +, \cdot)$ un triplet où

- E est un ensemble
- $+$: $E \times E \rightarrow E$ est une loi
- $\cdot$ est une loi de composition externe
ie $\cdot : K \times E \rightarrow E$
 $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel
ssi

- a) $+$ fait de $(E, +)$ un groupe commutatif dont le neutre est noté 0_E : c'est le vecteur nul
- b) $\cdot$ est distributive sur $+$
ie $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- c) $\cdot$ est distributive sur $+$ _{K}
ie $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

d) $\cdot_E$ est compatible avec $\times_K$
 ie $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 K K E
 $\underbrace{\hspace{10em}}_E$

e) 1 agit trivialement sur E
 $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Rq: a) $\Rightarrow \forall x, y \in E, x + y = y + x$

Vocabulaire:

- Les éléments de E sont appelés vecteurs
- Les éléments de K ——— scalaires

Rq: a) E espace vect $\Rightarrow E \neq \emptyset$
 en effet, on a $\exists e \in E : \forall x \in E, \begin{cases} e + x = x \\ x + e = e \end{cases}$

On a l'existence d'un neutre : donc
 l'existence d'un élément. On a toujours $0_E \in E$

Conventions:

- On notera K_{ev} pour K -espace vectoriel
- ou bien ev pour K -ev
- on notera λx pour $\lambda \cdot x$
- on notera $\frac{x}{\lambda}$ pour $\frac{1}{\lambda} \cdot x$ si $x \in E$ et $\lambda \in K^*$

⚠ On ne divise jamais par un vecteur

⚠ λx ok mais on ne scalarise jamais à droite $x \lambda$

Exemples d'expressions

Soit $(E, +, \cdot)$ un K -ev

Généralement, on dira : "Soit E un K -ev"

Soient $x, y, z \in E$

On peut considérer $2x - y + 4z$; $-2x$; $-y + 5z$
etc

⚠ Je ne peux pas écrire xy , $\frac{1}{x}$, $x + 4z$

2) Combinaison linéaire

Déf : Soit E ev, soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ des vecteurs

Soit $y \in E$

On dit que y est une CL des x_i ssi

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n : y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

Rq : On note aussi $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

3) Premières propriétés

Ici est le seul endroit où l'on va manipuler formellement les axiomes

Fait 1 $\forall \lambda \in K, \lambda \cdot 0_E = 0_E$

Soit $\lambda \in K$, soit $x \in E$

On a $\lambda \cdot (x + 0_E) = \lambda x + \lambda 0_E$ d'après b)

de plus, $x + 0_E = x$ par déf de 0_E

donc, $\lambda x + \lambda 0_E = \lambda x$

de plus, $\lambda x = \lambda x + 0_E$ (par déf de 0_E)

donc, $\lambda x + \lambda 0_E = \lambda x + 0_E$

donc (cf lemme) : $\lambda 0_E = 0_E$

Lemme $x, y, z \in E$

alors $x + y = x + z \Rightarrow y = z$

démo: $(E, +)$ est un groupe, donc x possède un inverse noté $(-x)$ pour +

On a $x + y = x + z$ (*)

on ajoute $(-x)$ à gauche de (*)

On a $\underbrace{(-x + x)}_{\substack{0_E \\ \text{par déf de } -x}} + y = \underbrace{(-x + x)}_{0_E} + z$

y par déf de 0_E

z par déf de 0_E

donc $y = z$

Rq : $\left. \begin{array}{l} P \in GL_n(\mathbb{K}) \\ A, B \in M_n(\mathbb{K}) \end{array} \right\} PA = PB \Rightarrow A = B$

Fait 2 $\forall x \in E, \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$

démo: soit $x \in E$

On a $(0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$ (déf de $0_{\mathbb{K}}$)

donc $0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$

ie: $0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_E$

donc (lemme) : $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ ■

Fait 3 $\forall x \in E, (-1)_{\mathbb{K}} \cdot x = -x$

Rq: "-x" est l'opposé de x, ie l'inverse de x pour la loi +

démo: Soit $x \in E$

$$\text{On a } \underbrace{(1 + (-1))}_{= 0_{\mathbb{K}} \text{ par déf de } (-1)} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E \quad \uparrow \text{fait 2}$$

De plus, par c), on a:

$$\begin{aligned} (1 + (-1))x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x \\ &= x + (-1) \cdot x \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{d'après e)} \end{aligned}$$

Bilan: $x + (-1) \cdot x = 0_E = x + (-x)$

donc $(-1) \cdot x = -x$

Proposition!!! Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$

1) Alors: $\lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E$

2) en particulier :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \neq 0 \\ \lambda x = 0_E \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0_E$$

démo:

On distingue deux cas:

1^{er} cas : $\lambda = 0_K$: ok

2^{ème} cas : $\lambda \neq 0_K$ R^x on dispose de $\frac{1}{\lambda}$

$$\text{On a alors } \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E \quad (\text{fait 1})$$

$$\text{Or, } \frac{1}{\lambda} \times \lambda x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{axiome d)}}}{=} \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda \right) \cdot x = 1_K \cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{axiome e)}}}{=} x$$

$$\text{CCL: } x = 0_E$$

4) Exemples

a) $E = \mathbb{R}^2$

$$\text{On prend } +_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

$$\text{On prend } \cdot_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

On vérifie que $(E, +_E, \cdot_E)$ vérifie les 5 axiomes.

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 150 \end{pmatrix}$$

On a $O_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ si $x, y \in \mathbb{R}$

b) De même $\mathbb{R}^3$: somme et scalarisation coordonnées par coordonnées

c) $\mathbb{R}^n$ espace de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$)

Alors $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \forall i, x_i \in \mathbb{R} \right\}$

est un $\mathbb{R}$ -ev

d) De même : $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$ -ev

ex: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

On a $i \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 5i \end{pmatrix}$

e) Soit X un ensemble non vide

alors, $F(X, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -ev
l'addition et la scalarisation sont définies
coordonnées par coordonnées

cf: $\mathbb{R}^n$ où $F(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^X$

ie $+$: $F(X, \mathbb{R}) \times F(X, \mathbb{R}) \rightarrow F(X, \mathbb{R})$
 $f, g \mapsto \begin{pmatrix} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{pmatrix}$
 notée $f+g$
 $\downarrow$
 $: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{et } \cdot : \mathbb{R} \times F(X, \mathbb{R}) \rightarrow F(X, \mathbb{R}) \\ (\lambda, f) \mapsto \lambda f := \left(\begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda f(x) \end{array} \right)$$

On a $(F(X, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -ev.

Cas particulier !!

Si I intervalle $\neq \emptyset$ alors $F(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -ev

$$\text{Rq: On a } 0_{F(X, \mathbb{R})} = \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$$

Généralisations

. $F(X, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev

. si E est un $\mathbb{K}$ -ev alors $F(X, E)$ est un $\mathbb{K}$ -ev

f) $(\mathcal{E}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -ev

De même, $\mathcal{E}^r(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, etc sont des $\mathbb{R}$ -ev

g) $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$ -ev

De même : $M_{n,p}(\mathbb{K})$

et $\mathbb{R}^N$ est un $\mathbb{R}$ -ev

$\mathbb{C}^N$ est un $\mathbb{C}$ -ev

5) Espace vectoriel produit

Soit $(E, +_E, \cdot_E)$ et $(F, +_F, \cdot_F)$ deux K -ev

On munit $E \times F$ d'une structure de K -ev en considérant

$$1) \quad + : (E \times F) \times (E \times F) \rightarrow E \times F \\ ((x, y), (x', y')) \mapsto \left(\underbrace{x +_E x'}_{:E}, \underbrace{y +_F y'}_{:F} \right)$$

$$2) \quad \text{et } \cdot : K \times (E \times F) \rightarrow E \times F \\ (\lambda, (x, y)) \mapsto \left(\underbrace{\lambda \cdot_E x}_E, \underbrace{\lambda \cdot_F y}_F \right)$$

Ainsi $E \times F$ est un K -ev

Ex : $\mathbb{R}[X] \times \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
est un $\mathbb{R}$ -ev

$$((p, f) + (q, g)) = (p + q, f + g)$$

Rq : $n \in \mathbb{N}^*$

$E_1, E_2, \dots, E_n$ ev
alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ev noté $\prod_{i=1}^n E_i$ ev

Cas particulier :

$$\left. \begin{array}{l} E \text{ ev} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \Rightarrow E^n \text{ ev}$$

$$R_q^* : E^n \leftrightarrow \mathcal{F}(\llbracket 1, n \rrbracket, E)$$

II, Familles de vecteurs

E est un K -ev et $p \in \mathbb{N}^*$

1) Familles liées

Définition

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs à p éléments

On dit que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée si

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p \setminus \{(0, \dots, 0)\} : \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$$

Fait 1

Si l'un des vecteurs de ma famille est nul alors elle est liée

$$\exists i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket : x_{i_0} = 0_E \Rightarrow (x_1, \dots, x_p) \text{ liée}$$

démon : Orq $\exists i_0 : x_{i_0} = 0_E$. On en fait un

$$\text{On a } 1 \cdot x_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p 0 \cdot x_i = 0_E$$

qui est une relation $\neq$ non nulle de liaison

A venir : $E = \mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 1$)

$$p > n$$

$\Downarrow$

$(x_1, \dots, x_p)$ est liée

Exemple: $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{x_2} \right)$ est liée

$$\text{On a } 2 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

Fait 2

Si une famille contient deux fois le même élément, elle est liée

Je $\exists i_0, i_1 \in [1, p] : i_0 \neq i_1 \text{ et } x_{i_0} = x_{i_1} \Rightarrow (x_1, \dots, x_p)$ est liée

Def: Soient $x, y \in E$

On dit que x et y sont colinéaires si (x, y) est liée

Rq: On a (x, y) liée $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K : x = \lambda y$ ou $\exists \mu \in K : y = \mu x$

Fait 3

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, s'il existe une sous-famille de $(x_1, \dots, x_p)$ qui est liée alors $(x_1, \dots, x_p)$ est liée

Fait 4

Si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée alors l'un des x_i est CL des autres

démo: Orq $(x_1, \dots, x_p)$ est liée
Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ ← Δ
(ou $\mathbb{K}^p \setminus \{0_{\mathbb{K}^p}\}$)

$$\text{tel que } \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$$

$\exists (\lambda_i)_i \neq 0_{\mathbb{K}^p}$, soit $i_0 \in [1, p]$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$
On écrit: $\lambda_{i_0} x_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \lambda_i x_i = 0_E$

$$\text{donc } x_{i_0} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^p \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i \quad \leftarrow (\lambda_{i_0} \neq 0)$$

Rq: la réciproque est vraie

• l'ordre des vecteurs dans une famille n'a pas d'influence sur son caractère liée
i.e. $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \forall \varphi: [1, p] \rightarrow [1, p]$ bijective,
 $\left[(x_1, \dots, x_p) \text{ liée} \Leftrightarrow (x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \dots, x_{\varphi(p)}) \text{ liée} \right]$

2) Familles libres

a) Définition

Déf: on dit que $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ est libre si elle n'est pas liée

b) En pratique

ie: la seule rela Θ de liaison entre les x_i est la relation nulle

$$\gamma_e : \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p, \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [1, p], \lambda_i = 0 \right)$$

Application: schéma de rédaction pour prouver qu'une famille est libre.

"Mq $(x_1, \dots, x_p)$ est libre

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p$ tq $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$

Mq $\forall i \in [1, p], \lambda_i = 0$ "

c) Exemples

On se place dans $E := \mathcal{E}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On considère la famille $\vec{F} := (\cos, \sin)$

Mq $\vec{F}$ est libre

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(*) \lambda \cos + \mu \sin = 0$

Mq $\lambda = \mu = 0$

$\uparrow$
ie 0_E
ie $0_{\mathcal{E}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$
ie $\vec{0}$

démo 1: $\Downarrow$ On spécialise

pour $x = 0$: on a $\lambda \cos(0) + \mu \sin(0) = 0$

ie $\lambda = 0$

pour $x = \frac{\pi}{2}$: on obtient $\mu = 0$

démo 2 : On dérive

En dérivant (*), on obtient

$$(**) \quad -\lambda \sin + \mu \cos = \tilde{0}$$

et si on faisait apparaître $\lambda^2 + \mu^2$?

On fait $\lambda (*) + \mu (**)$

$$\text{On obtient } \lambda^2 \cos + \lambda \mu \sin - \lambda \mu \sin + \mu^2 \cos = \tilde{0}$$

$$\text{ie } (\lambda^2 + \mu^2) \cos = \tilde{0}$$

$$\text{En } x = 0, \text{ on obtient } \lambda^2 + \mu^2 = 0$$

$$\text{donc } \lambda = \mu = 0$$

(ou rappel : $\forall \sigma \in K, \forall y \in E, \sigma y = 0_E \Rightarrow \sigma = 0 \text{ ou } y = 0_E$)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

On pose $E := \mathbb{R}_N[X]$

Soit $(P_0, \dots, P_N) \in E^{N+1}$ tq $\forall i \in [0, N], \deg(P_i) = i$

déf. on dit que $(P_i)_i$ est échelonnée

alors : $(P_0, \dots, P_N)$ est libre

Exemple : $(\overset{d^0_0}{3}, \overset{d^0_1}{2X-1}, \overset{d^0_2}{X^2+X+1}, \overset{d^0_3}{8X^3-4X+2})$ est échelonnée

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tq $\sum_{i=0}^N \lambda_i P_i = 0 \quad (*)$

$$\text{Mq } \forall i, \lambda_i = 0$$

- On pourrait montrer par récurrence descendante forte que $\forall i, \lambda_i = 0$

Initialisation : Mq $\lambda_N = 0$

$$\text{On a } \lambda_N P_N = - \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i P_i$$

$$\text{On a } \deg \left(- \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i P_i \right) \leq N-1$$

Si on avait $\lambda_N \neq 0$, on aurait : $\deg(\lambda_N P_N) = N$,
ce qui est faux
donc $\lambda_N = 0$

Hérédité

Soit $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

osq $\forall l \in \llbracket k+1, N \rrbracket, \lambda_l = 0$

Mq $\lambda_k = 0$

$$(*) \text{ s'écrit } \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i = 0$$

En raisonnant de $\hat{m}$, on montre que $\lambda_k = 0$
d'où l'hérédité descendante

CCL : $\forall i, \lambda_i = 0$

- Autre démonstration

On raisonne par l'absurde

Osq $\exists i_0 \in \llbracket 0, N \rrbracket : \lambda_{i_0} \neq 0$

On considère le plus grand tel i_0

formellement, $i_0 := \max \{ l \in \llbracket 0, N \rrbracket \mid \lambda_l \neq 0 \}$

- 1) $C \subseteq \mathbb{Z}$ 2) majorée car $l \leq N$
3) $\neq \emptyset$ par hyp absurde

On a $\forall i \geq i_0, \lambda_i = 0$

(car i_0 est le + grand)

donc (*) s'écrit $\sum_{i=0}^{i_0} \lambda_i P_i = 0$ qui s'écrit :

$$P_{i_0} = - \frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i P_i$$

c' est absurde. donc $\forall i, \lambda_i = 0$

d) Familles libres dans K^n

On considère $E := \mathbb{K}^n$ qu'on identifie à $M_{n,1}(\mathbb{K})$

⚠ On est dans $\mathbb{K}^n$. On prend des familles de n vecteurs

ex: on regarde $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}}_{3 \text{ vecteurs}} \in \mathbb{R}^3$

Prop: Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$
alors, on a $(x_1, \dots, x_n)$ libre $\Leftrightarrow (x_1 | x_2 | \dots | x_n)$ inversible

Démo:

($\Leftarrow$) On note $A := (X_1 | \dots | X_n)$. Orq $A \in GL_n(K)$
Mq $(X_1, \dots, X_n)$ libre
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = 0_{n,1}$

$\Downarrow R^X$: interprétation en colonne du produit matriciel

On note :

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } A \Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{C_i(A)}_{X_i \text{ par déf de } A} = 0_{n,1}$$

$$\text{donc } A^{-1} \cdot A \cdot \Lambda = A^{-1} \cdot 0_{n,1} = 0_{n,1}$$

$$\text{ie } \Lambda = 0_{n,1} \text{ ie } \forall i, \lambda_i = 0$$

donc $(X_1, \dots, X_n)$ libre

($\Rightarrow$) Orq $(X_1, \dots, X_n)$ libre . Mq A est inversible

$\Downarrow R^X$ (caractérisation de Cramer des matrices inversibles)

Soit $X \in M_{n,1}(K)$ tq $AX = 0_{n,1}$. Mq $X = 0_{n,1}$

On écrit $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ avec les $\lambda_i \in K$

$$\text{On a } AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$$

donc, $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = 0_{n,1}$

Or, $(X_1, \dots, X_n)$ libre donc $\forall i, \lambda_i = 0$

ie $X = 0_{n,1}$

Exemple:

On considère $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mq (X_1, X_2, X_3) libre

On note $A := \left(X_1 \mid X_2 \mid X_3 \right)$

On échelonne A

!! Quand on effectue des op. élémentaires sur une matrice, on ne change pas le caractère inversible

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Cette dernière matrice étant inversible car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, on a A inversible

donc (x_1, x_2, x_3) libre

Rq : $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est de dimension infinie

Proposition

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{K}^n)^p$

alors :

a) $(x_1, \dots, x_p)$ libre $\Rightarrow p \leq n$

b) $p > n \Rightarrow (x_1, \dots, x_p)$ liée

Exemple : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix} \right)$ est liée car $p=4$
 $n=3$

Rq : la réciproque est fautive
ie $p \leq n \nRightarrow (x_1, \dots, x_p)$ liée

Démon : Mq b)

Orq $p > n$

On complète les x_i par des zéros pour en faire des vecteurs de taille p

On pose, pour $i \in [1, p]$,

$$\widetilde{x}_i := \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{\textcolor{red}{} } n \text{ coordonnées} \\ \text{\textcolor{red}{} } p-n \text{ zéros} \\ \text{\textcolor{red}{} } (>0) \end{array} \right\}$$

On pose $A := \left(\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & \dots & \tilde{X}_p \end{array} \right) \in M_p(K)$

$\hat{C} \quad L_p(A) = 0_{1,p}$, la matrice A est non inversible

donc $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p)$ est liée

et, une RL entre les $\tilde{X}_i$ donne en particulier une RL entre les λ_i

donc $(X_1, \dots, X_p)$ liée

e) Exemples

• La base canonique $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre

En effet $(E_1 | E_2 | \dots | E_n)$ qui égale I_n est libre

• La famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ est libre car elle est échelonnée en degré

• On se place dans $\mathcal{E}^0(I, \mathbb{R})$ où I intervalle tq $l(I) > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in [0, n]$, on note $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^i$

ie $f_i := \tilde{X}_i|_I$

Alors $(f_0, \dots, f_n)$ libre

Démonstration!

⊥ $\mathbb{R}^X$ rédaction type famille libre

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ tq $\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i = \tilde{0} \quad (*)$

$$\text{Mq } \forall i, \lambda_i = 0$$

Ⓜ $\mathbb{R}^x$ de reformulation

$$(*) \text{ signifie } \forall x \in I, \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 0$$

$$\text{ie } \forall x \in I, \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n = 0$$

$$\text{On note } P := \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i$$

$$\text{On a } \forall x \in I, P(x) = 0$$

donc P s'annule en une $\infty^{\text{té}}$ de valeurs

Ⓜ $\mathbb{R}^x$ Critère radical de nullité

$$\text{donc } P = 0 \quad \text{donc } \forall i, \lambda_i = 0$$

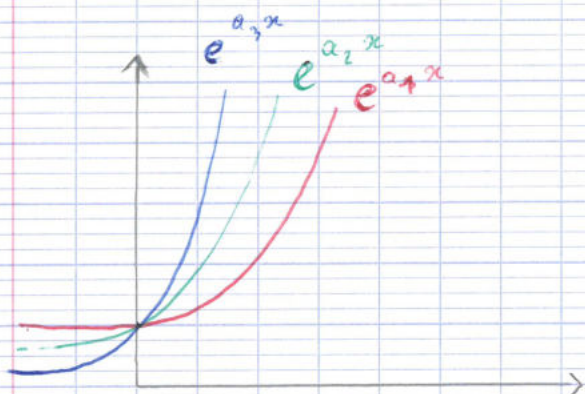
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ tq

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{a_i x}$$



$M_q (q_1, \dots, q_n)$ liée (dans $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par ex.)

❖ $\mathbb{R}^n$ canonique : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i = \tilde{0}$ (*)

$$\text{On a } \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{a_i x} = 0 \quad (*)$$

Deux preuves possibles

1°) On spécialise (*) en $x = 0$

$$\text{On obtient : } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

$$\text{Essai : en } x = 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{a_i} = 0$$

$$\text{en } x = 2 : \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{2a_i} = 0$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i (e^{a_i})^2 = 0$$

❖ Idée : on dérive (*)

$$!! \quad \forall i, q_i' = a_i q_i$$

$$\text{même : } \forall p, \forall i, q_i^{(p)} = (a_i)^p q_i$$

$$\text{On a donc } \forall p, \sum \lambda_i a_i^p q_i = 0$$

$$\text{En } x = 0, \text{ on obtient } \forall p, \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^p = 0$$

$$\text{ie } \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$$

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

$$\lambda_1 a_1^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 = 0$$

Ainsi,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^{n-1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} 1 \\ a_n \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0_{n,1}$$

On note $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$

On pose $X := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

On a $AX = 0$

Mq A est inversible

⚡ Astuce⁺ : Mq A^T inversible

On a $A^T = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$

⚠ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

⚡⁺⁺ Soit $Y = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $A^T \cdot Y = 0_{n,1}$

On a $\mu_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} a_1^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \end{pmatrix} + \dots + \mu_{n-1} \begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ \vdots \\ a_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0_{n,1}$

$$\text{Donc (s)} \begin{cases} \mu_0 + \mu_1 a_1 + \mu_2 a_1^2 + \dots + \mu_{n-1} a_1^{n-1} = 0 \\ \mu_0 + \mu_1 a_2 + \mu_2 a_2^2 + \dots + \mu_{n-1} a_2^{n-1} = 0 \\ \quad \quad \quad a_3 \quad \quad \quad a_3^3 \quad \quad \quad a_3^{n-1} \\ \quad \quad \quad \vdots \end{cases}$$

R^* polynomial : On pose $P = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i X^i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

On a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = 0$ (c'est (s))

donc P admet au moins n racines

d'après le critère radical de nullité $P = 0$

donc $\forall i, \mu_i = 0$

donc $Y = 0_{n-1}$

donc $A^T \in GL_n(\mathbb{R})$

donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$

donc les λ_i sont tous nuls

donc $(q_1, \dots, q_n)$ est liée

Deuxième preuve

2°) Par analyse

❗ On fait un absurde optimal

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i = \vec{0}$

Osg non $(\forall i, \lambda_i = 0)$ ie $\exists i_0 : \lambda_{i_0} \neq 0$

❗ On optimise Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le + grand k
tq $\lambda_k \neq 0$

$$i.e. \quad i_0 := \max \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0 \right\}$$

↓
($\subset \mathbb{Z}$, bornée, $\neq \emptyset$ par hyp.)

On a $\forall i > i_0, \lambda_i = 0$

donc $\sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i q_i = 0$

donc $q_{i_0} = - \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} q_i$

Reformulation

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{e^{a_{i_0} x}}_{\substack{\text{croît très} \\ \text{vite} \rightarrow +\infty}} = - \underbrace{\sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} e^{a_i x}}_{\substack{\text{croissent } \infty^t \ominus \text{ vite} \\ \text{vers } +\infty}}$

donc, $\forall x \geq 0, 1 = - \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \underbrace{\frac{e^{a_i x}}{e^{a_{i_0} x}}}_{\parallel}$

On fait tendre $x \rightarrow +\infty$

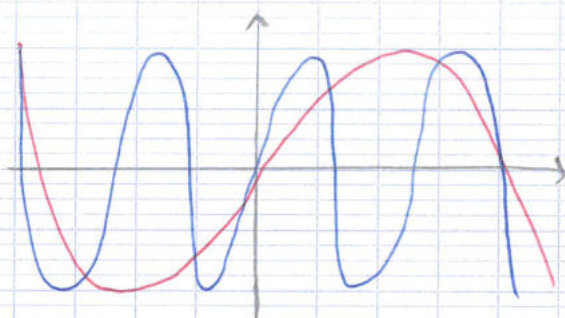
$\parallel$
 $e^{\underbrace{(a_i - a_{i_0}) x}_{< 0}}$
car $a_1 < a_2 < \dots < a_{i_0}$

On obtient $1 = - \sum \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{a_i x}}{e^{a_{i_0} x}}$

$\parallel$
0

Aburde

⑦ $M_q \ (x \mapsto \sin(a_i x))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ liné



3) Familles génératrices

a) Définition

Déf : Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$

On dit que $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice dans E ssi

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

Exemples

• la base canonique $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est génératrice dans $M_{n,1}(K)$

démo : Soit $X \in M_{n,1}(K)$. On l'écrit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\text{On a } X = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\underbrace{(1, x, x^2, \dots, x^n)}_{n+1 \text{ éléments}}$ est génératrice dans $K_n[X]$

b) Exemple calculatoire

On se place dans $\mathbb{R}^3$

$$\text{On considère } X_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A. t-on $\forall X \in \mathbb{R}^3, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : X = aX_1 + bX_2 + cX_3$?

ie a-t-on (X_1, X_2, X_3) génératrice dans $\mathbb{R}^3$?

Soit $X \in \mathbb{R}^3$. On l'écrit $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $aX_1 + bX_2 + cX_3 = X$ (*)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{On note } \tilde{A} := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & \beta \\ 1 & 3 & 1 & \gamma \end{array} \right)$$

$$\text{On a } \tilde{A} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & \beta - \alpha \\ 0 & 2 & 0 & \gamma - \alpha \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & \beta - \alpha \\ 0 & 0 & 2 & \alpha - 2\beta + \gamma \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\sim L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2\alpha - \beta \\ 0 & 2 & -2 & 2\beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & 2 & \alpha - 2\beta + \gamma \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha + \beta - \gamma \\ 0 & 2 & 0 & \alpha + \gamma \\ 0 & 0 & 2 & \alpha - 2\beta + \gamma \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

donc $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha + \beta - \gamma \\ b = \frac{\gamma - \alpha}{2} \\ c = \frac{\alpha^2 - 2\beta + \gamma}{2} \end{cases}$

Rq : En fait, il suffisait de m_q A inversible

On a $A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est inv.

donc (*) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ (1)

Récrivons (**). On a :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (2)$$

On en déduit avec (1) et (2) que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) Familles génératrices dans K^n

Prop: Soit $(x_1, \dots, x_p) \in (K^n)^p$

a) $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice dans $K^n \Rightarrow p \geq n$

b) $p < n \Rightarrow (x_1, \dots, x_p)$ n'est pas génératrice dans K^n

Démonstration

Par b) Or $p < n$

On raisonne par l'absurde. Or $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice dans K^n

Idées :

- on engendre $(e_1, \dots, e_n)$
- on réinterprète matriciellement
- on échelonne
- interprétation matricielle, $L_n(\cdot) = 0_{n,n}$

On note $A := \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_p \\ | & & | \end{pmatrix} \in M_{n,p}(K)$
↳ "beaucoup de lignes
peu de colonnes"

Q Interprétation en colonne de AX

$(X_1, \dots, X_p)$ génératrice dans K^n

$$\Leftrightarrow \forall Y \in M_{n,1}(K), \exists X \in M_{p,1}(K) : Y = AX$$

On l'applique pour $Y = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$

DONC pour $i \in [1, n]$, soit $C_i \in M_{p,1}(K)$ tq $\varepsilon_i = AC_i$

Matriciellement, on note $B := (C_1, \dots, C_n) \in M_{p,n}(K)$

$$\text{On a } \underset{\substack{\uparrow \\ M_{n,p}(K)}}{A} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ M_{p,n}(K)}}{B} = I_n \quad \text{C'est impossible}$$

Exemple : $n = 3, p = 1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_B \rightarrow \text{les colonnes sont liées}$$

↓
non inv.

Q "Ag CL"
↑
colonne X ligne

. démo 1: cf Bastien

. démo 2: Soit A' l'échelonnée réduite de A
Soit $E \in GL_n(K)$ tq
 $A' = E \cdot A$

$$\text{On a } E \cdot AB = E \\ \text{donc } A'B = E$$

$$\text{On } p < n \text{ donc le nb de pivots dans } A' \leq p < n \\ \text{donc } L_n(A') = O_{1,p}$$

$$\text{donc } L_n(AB') = L_n(A) \cdot B = O_{1,n}$$

$$\text{ie } L_n(E) = O_{1,n} \text{ absurde car } E \in GL_n(K)$$

Proposition

$$\text{Soit } (X_1, \dots, X_n) \in (K^n)^n$$

$$\text{On note } A := (X_1 | X_2 | \dots | X_n) \in M_n(K)$$

$$\text{Alors } (X_1, \dots, X_n) \text{ est génératrice dans } K^n \\ \Leftrightarrow A \text{ inversible}$$

Démo :

$$\Rightarrow \text{Osq } (X_1, \dots, X_n) \text{ génératrice}$$

$$\text{On a vu que } \exists B \in M_n(K) : AB = I_n \\ \text{donc, (th m d'inversibilité unilatérale), } A \text{ est inv.}$$

$$\Leftarrow \text{Osq } A \text{ est inversible}$$

$$\text{Mq } (X_1, \dots, X_n) \text{ génératrice dans } K^n$$

$$\text{Soit } Y \in M_{n,1}(K). \text{ On cherche}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \text{ tq } \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = Y$$

Analyse - synthèse :

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = Y$

❗ On a donc $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = Y$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} Y$$

réciroquement : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coordonnées de $A^{-1} Y$

$$\text{On a } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} Y \quad \text{donc } A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = Y \quad \text{donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = Y$$

Evidance : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$. Alors :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est génér. des } \mathbb{K}^n$$

4.) Bases

a) définition

Déf : Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$

On dit que $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de E si elle est libre et génératrice

b) caractérisation

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ base de } E \iff \forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p : \\ x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

Les λ_i sont les coordonnées de x dans la base $(x_1, \dots, x_p)$

Exemple: On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on regarde

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On a B génératrice ; automatiquement, comme elle est de bonne taille, elle est libre.
donc B est une base.

Cherchons les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans B

$$\text{On cherche } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1^\circ \text{ On a vu que } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a alors } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$$

2 Rappel: la solu 0 de $AX = B$ quand A invr
est $X = A^{-1} B$

2°) souvent, on trouve par calcul habile

$$\text{ici, } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc, } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ie } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

démo du fait

$\Rightarrow$ Csq $(x_1, \dots, x_p)$ libre et génératrice

Soit $x \in E$

$\hat{C}(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$

donc l'existence est ok. Faisons un tel p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$

unicité: Soit $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in K^p$ tq $x = \sum_{i=1}^p \mu_i x_i$

$$\text{On a } \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^p \mu_i x_i$$

$$\textcircled{\mathbb{R}^p} \text{ donc } \sum_{i=1}^p (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0_E$$

Or, $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ libre

donc $\forall i, \lambda_i - \mu_i = 0$ ■ unicité

$$\Leftarrow \text{Csq } \forall x \in E, \exists ! (\lambda_i)_i \in K^p : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

$(x_i)_i$ gén de E : ok

$(x_i)_i$ libre:

$$\text{Soit } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p \text{ tq } \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$$

$$\text{Mq } \forall i, \lambda_i = 0$$

On a $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^p 0 \cdot x_i$

Par unicité : $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0)$

c) dans $\mathbb{K}^n$

Théorème :

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{K}^n)^p$

alors : $(x_1, \dots, x_p)$ base $\Rightarrow p = n$

Je , dans $\mathbb{K}^n$, toutes les bases "ont la même taille"
à savoir n .

Théorème

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$ une famille de "la bonne taille"

Alors : $(x_1, \dots, x_n)$ libre $\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ génératrice
 $\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ base

d) Exemples

• $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $M_{n,n}(\mathbb{K})$

• $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
(elle est de taille $n+1$)

• $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ ^{$[1,n] \times [1,p]$} est une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$
cette famille a $n \times p$ éléments

Rq: $GL_3(\mathbb{R})$ est dense dans $M_3(\mathbb{R})$

Exemple: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ base de $M_2(\mathbb{R})$
c'est la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$

Rq: Les bases ne sont pas uniques

Fait: $(e_1, \dots, e_p)$ base de E

$$\Rightarrow \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p, (\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_p e_p) \text{ base de } E$$

III, Sous-espaces vectoriels

1) Définition

Def: Soit E un K -ev

Soit $F \subseteq E$

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E

ssi

1) $0_E \in F$

2) F est stable par $+$ ie $\forall (x, y) \in F^2, x+y \in F$

3) F est stable par scalairisation ie $\forall x \in F, \forall \lambda \in K, \lambda x \in F$

F est une partie de E qui respecte la structure de E

Rq: on peut remplacer 1) par 1') $F \neq \emptyset$

1' $\Rightarrow$ 1) car si $x_0 \in F$ alors $-x_0 \in F$ et $x_0 + (-x_0) \in F$

Fait : Si E est un K -ev et si $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de E alors, F est un K -ev

Notation : On écrit $F \text{ sev } E$

2) Caractérisation

Prop : Soient E ev et $F \subseteq E$

$$\text{On a } F \text{ sev } E \Leftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda \in K, x + \lambda y \in F \end{cases}$$

Rq : proposition utilisée en pratique

3) Exemples

- $\mathbb{Z}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}$
En effet $\mathbb{Z}$ n'est pas $\mathbb{R}$ -scalairisation
stalle par
- $M_{n,p}(K)$ n'est pas un sev de $M_{n,p}(K)$ si $p > 1$
On n'a pas l'inclusion $\subseteq$
- $S_n(\mathbb{R})$ sev $M_n(\mathbb{R})$
- $T_n(\mathbb{R})$ sev $M_n(\mathbb{R})$

$$\text{Ex : } T_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a, b, \dots, f \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{base de } T_3(\mathbb{R}) : \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

6 éléments

On écrit $\dim T_3(\mathbb{R}) = 6$

(?) $\dim T_n^{(p)}(K) =$

$\mathcal{E}^1(I, \mathbb{R}) \underset{\text{ser}}{\subset} \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \underset{\text{ser}}{\subset} \mathcal{E}(I, \mathbb{R}) \underset{\text{ser}}{\subset} \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

$N \in \mathbb{N}^* : K_N[X] \underset{\text{ser}}{\subset} K[X]$

Les solutions d'un système homogène forment un ev

Soit $A \in M_{np}(K) \iff \begin{cases} n \text{ équations} \\ p \text{ inconnues} \end{cases}$

Notons $\mathcal{P}_A := \{X \in M_{p,1}(K) \mid AX = 0_{n,1}\}$

Alors $\mathcal{P}_A \underset{\text{ser}}{\subset} M_{p,1}(K)$

$X, Y \in M_{p,1}(K); \lambda \in K, A(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY = 0_{n,1}$

$n = 1$ ie 1 équation 2 inconnues
 $p = 2$

On a une $\mathcal{P}_A \underset{\text{ser}}{\subset} M_{2,1}(\mathbb{R})$ ie $\mathbb{R}^2$

ex: $2x - 5y = 0$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}$

Dessin: $\mathcal{P}_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 5y = 0\}$

ie $\mathcal{P}_A : y = \frac{2}{5}x$: c'est une droite



$$\bullet \quad \begin{aligned} n &= 1 \\ p &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{en : } 2x - 5y + 8z = 0$$

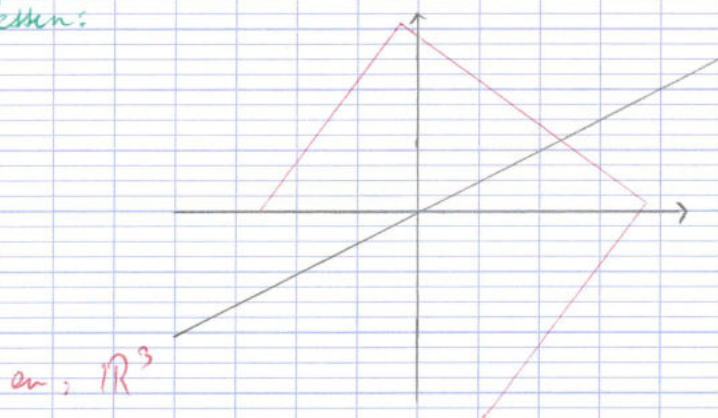
$$\vec{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{On a } M \in \mathcal{Y}_A \Leftrightarrow \vec{OM} \cdot \vec{v} = 0$$

Ainsi, $\mathcal{Y}_A$ est le plan orthogonal à $\vec{v}$

Dessin:



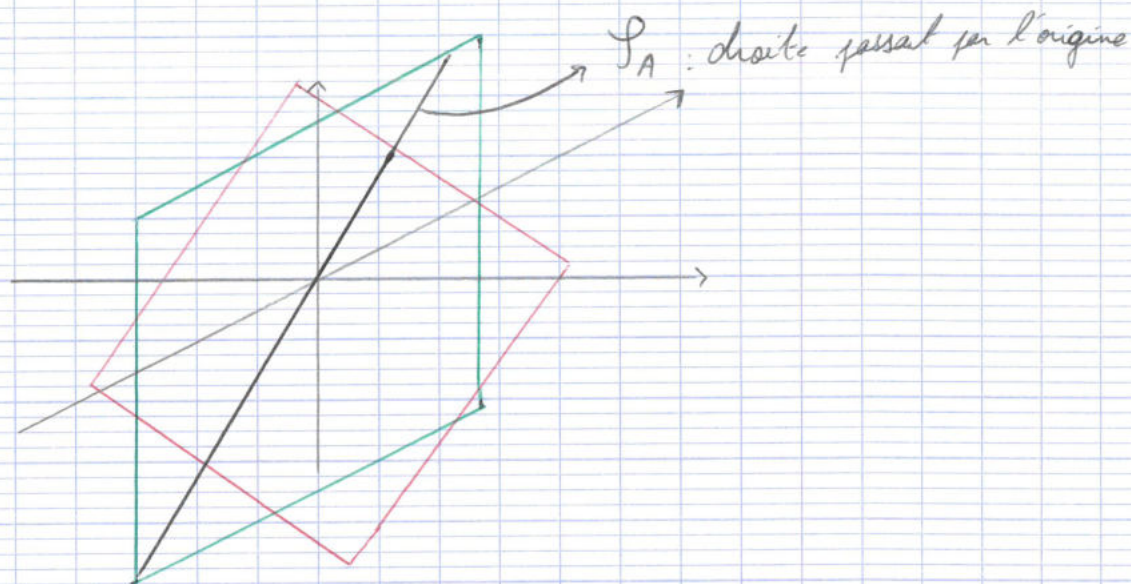
$$\bullet \quad \begin{aligned} n &= 2 \\ p &= 3 \end{aligned} \quad \text{en : } \begin{cases} 2x - 5y + 8z = 0 & (1) \\ x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_{(1)} \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_{(2)}$$

$$\text{CCL : } \mathcal{Y}_A = \mathcal{Y}_{(1)} \cap \mathcal{Y}_{(2)}$$

Ici : $\mathcal{P}_A$ est donc une $\cap$ de 2 plans de l'espace



• En général, on considère (E) $\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p = 0 \end{cases}$

On note $\mathcal{P}_1 := \left\{ X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \mid a_1 x_1 + \dots + a_p x_p = 0 \right\}$

et de même $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_{(E)}$

On a : $\mathcal{P}_{(E)} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

• $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ ser $\mathbb{R}^p$

Si $(a_1, \dots, a_p) \neq (0, \dots, 0)$ alors : " $\mathcal{P}_1$ ser $\mathbb{R}^p$ avec 1 dimension au moins"

Si $(a_1, \dots, a_p) = (0, \dots, 0)$ alors $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^p$.

En effet : $\forall x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}, 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_p = 0$

On a $\mathcal{P}_{(E)} = \left\{ X \in \mathcal{P}_1 \mid b_1 x_1 + \dots + b_p x_p = 0 \right\}$

ainsi, $\mathcal{S}_{(E)}$ peut être vu comme l'ens. des solutions d'une équation dans $\mathcal{S}_1$.
 En général, " $\mathcal{S}_{(E)}$ " est ser de $\mathcal{S}_1$ avec 1 dimension en moins

En général, si $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_A$ ser $\mathbb{R}^p$ avec une chute de dimension valant n

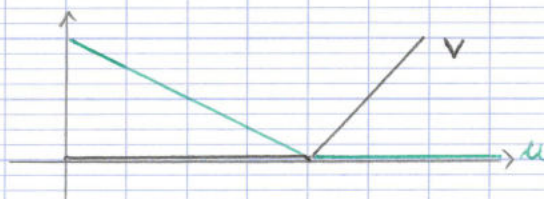
b) Exemples avec des suites

On se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- $\left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \xrightarrow{CV} \right\}$ ser
- $\left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ constante} \right\}$ ser
- $\Delta \left\{ u \mid u \nearrow \right\}$ n'est pas un ser

En effet $(n)_n \nearrow$ mais $(-1) \cdot (n)_n$ n'est pas $\nearrow$

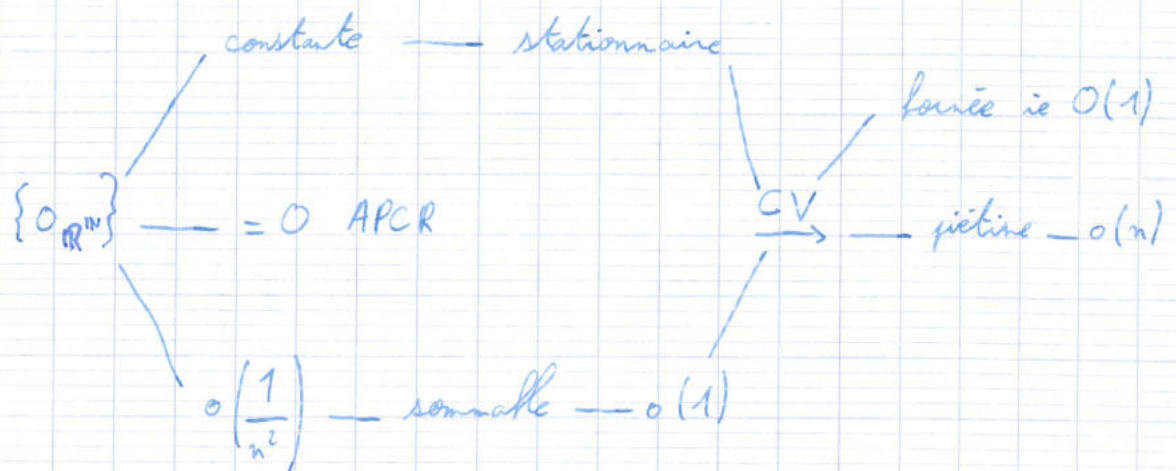
- $\Delta \left\{ u \mid u \text{ monotone} \right\}$ n'est pas un ser de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
 car la somme de deux suites monotones n'est pas nécessairement monotone



- $\left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ bornée} \right\}$
- $\left\{ u \text{ sommable} \right\}$

- $\{(0)_{n \in \mathbb{N}}\}$ ser
- $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \rightarrow 0\}$ ser $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ noté $o(1)$
- $(?) \{u \mid u \text{ monotone APCR}\}$ ser ?
- $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)\}$
- si $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors $\{u \mid u = o(w)\}$ ser
- $\{u \text{ stationnaire}\} := \{\text{constante APCR}\}$
- $\{u \mid u = 0 \text{ APCR}\}$
- $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+1} - u_n \rightarrow 0\}$

Inclusion entre ces ev



c) Suites récurrentes

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

On note $E := \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n\}$

Alors E sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

En effet, si $u, v \in E$ alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + v_{n+2} = a(u_{n+1} + v_{n+1}) + b(u_n + v_n)$$

Fait : Soient $u, v, w \in E$. Alors (u, v, w) liée

Démo : On note $X_1 := \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$; $X_2 := \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $X_3 := \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}$

Alors $\mathbb{R}^3 : (X_1, X_2, X_3)$ est liée

car c'est une famille de $\mathbb{R}^2$ à 3 éléments

Soit donc $\lambda, \mu, \sigma \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tq $\lambda X_1 + \mu X_2 + \sigma X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mq $\lambda \cdot u + \mu \cdot v + \sigma \cdot w = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ par récurrence d'ordre 2

$n = 0, 1$. On a $\lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc ok

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\begin{cases} \lambda u_n + \mu v_n + \sigma w_n = 0 & (1) \\ \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} + \sigma w_{n+1} = 0 & (2) \end{cases}$

$$a(2) + b(1) : \lambda \underbrace{(a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n)}_{u_{n+2}} + \mu \underbrace{(a \cdot v_{n+1} + b v_n)}_{v_{n+2}} + \sigma \underbrace{(a w_{n+1} + b w_n)}_{w_{n+2}} = 0$$

car $u, v, w \in E$

Notons $P := X^2 - aX - b$

Osq P possède 2 racines $\neq$ ^{tes}, réelles, α et β

Alors : $(\alpha^n)_n$ et $(\beta^n)_n \in E$

Théorème : La famille $((\alpha^n)_n, (\beta^n)_n) \in E^2$ est une base de E

Démon : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n$
ie soit $u \in E$

Alors : $\exists ! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cdot \alpha^n + \mu \cdot \beta^n$
(cf thm de structure des suites récurrentes d'ordre 2)

ie $\exists ! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : u = \lambda \cdot (\alpha^n)_n + \mu \cdot (\beta^n)_n$

d) Espaces de fonctions

Tout ce qui précède est transposable aux fonctions

$\cdot \left\{ f \in \mathcal{E}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$ ser de $\mathcal{E}^0([0, 1], \mathbb{R})$

$\cdot \left\{ f \mid f(0) = f(1) \right\}$ ser

démon : f, g tq $\begin{cases} f(0) = f(1) \\ g(0) = g(1) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$; alors $(f + \lambda g)(0) = (f + \lambda g)(1)$

$\cdot \left\{ f \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}$ ser

$\cdot \left\{ f \in \mathcal{E}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ fixé

$$\text{On note } E_{a,b} := \left\{ f \in \mathcal{E}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + a f' + b f = \tilde{0} \right\}$$

alors $E_{a,b}$ ser $\mathcal{E}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

ie l'le CL de sol^0 de l'ED est encore solution de l'ED

$f, g \text{ sol}^0, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{alors } (f + \lambda g)'' = f'' + \lambda g'' = -(a f' + b f) - \lambda (a g' + b g)$$

$$\text{donc : } (f + \lambda g)'' + a(f + \lambda g)' + b(f + \lambda g) = \tilde{0}$$

Théorème : On connaît une base explicite de $E_{a,b}$

par ex. si $X^2 + aX + b$ a 2 racines $\neq$ ^{tes} $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

alors : $(t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto e^{\beta t})$ base de $E_{a,b}$

4) Propriétés

Fait : Soit E ev

1) $\{0_E\}$ ser de E

2) E ser E

Proposition : Soit E ev

Soient F, G ser E

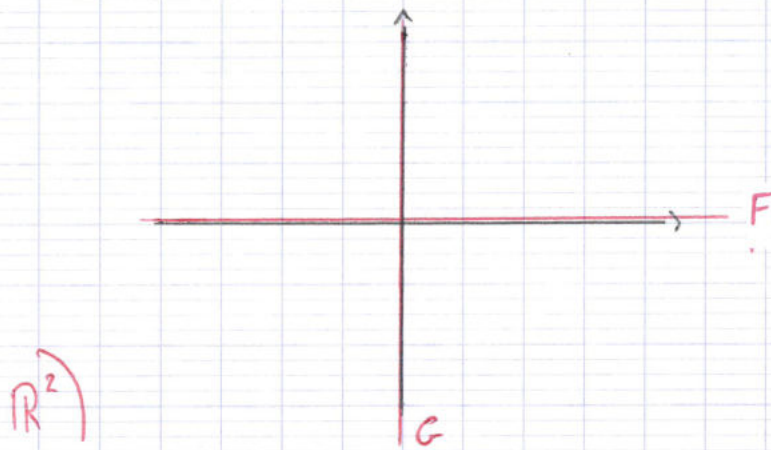
alors $F \cap G$ ser E

Remarque !!

On n'écrit jamais $F \cup G$
car $F \cup G$ n'est pas un ev en général

Je, F, G sev $E \nRightarrow F \cup G$ sev E

Un exemple minimal



$$\text{ie } F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad G := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

F et G sev de E

Fait : $F \cup G$ sev e

démo: On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$, or $F \subset F \cup G$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \cup G$, de même $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in G \subset F \cup G$

$$\text{A-t-on } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \cup G$$

NON car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin G$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F \cup G$
Ainsi, $F \cup G$ n'est pas stable par somme

• En général, quand on a le mauvais réflexe
 $F \cup G$, c'est qu'il faut plutôt considérer
 $\underline{F+G}$ (cf + lin)

démo 1

Soient F, G sev E

Soient $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in K$

On a: $\left. \begin{array}{l} x, y \in F \\ \lambda \in K \end{array} \right\}$ donc $x + \lambda y \in F$ car F sev E

De même, $x + \lambda y \in G$

CCL: $x + \lambda y \in F \cap G$
 de plus, $0_E \in F \cap G$

Généralisation

E ev

$(F_i)_{i \in I}$ famille de sev E

alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ sev E

5) Somme de sev

Définition: E ev. Soient F, G sev E

Alors, la somme de F et G , notée $F+G$ est le
 sev de E défini par

$$F+G := \{x+y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}$$

démo: M_q $F+G$ ser E

Soient $x, y \in F+G$, $\lambda \in K$

On écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$, $x_G \in G$

$y = y_F + y_G$ avec $y_F \in F$, $y_G \in G$

On a $x + \lambda y = (x_F + \lambda y_F) + (x_G + \lambda y_G)$

Or, $\left. \begin{array}{l} x_F, y_F \in F \\ F \text{ ser } E \end{array} \right\} \text{ donc } x_F + \lambda y_F \in F$

de $\hat{m}$ $x_G + \lambda y_G \in G$
ainsi, $x + \lambda y \in F+G$

et $O_{F+G} = O_E + O_F$

Généralisation

E ser ; $p \in \mathbb{N}$ tq $p \geq 2$

$F_1, F_2, \dots, F_p$ ser E

alors, on définit $F_1 + F_2 + \dots + F_p$; c'est

$$F_1 + \dots + F_p := \left\{ x_1 + \dots + x_p \mid \begin{array}{l} x_1 \in F_1 \\ x_2 \in F_2 \\ \vdots \\ x_p \in F_p \end{array} \right\}$$

Fait: F, G ser E et H ser E

1) $F + G = G + F$

2) $F + (G + H) = (F + G) + H$

3) F ser $F+G$ et G ser $F+G$
ie $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$

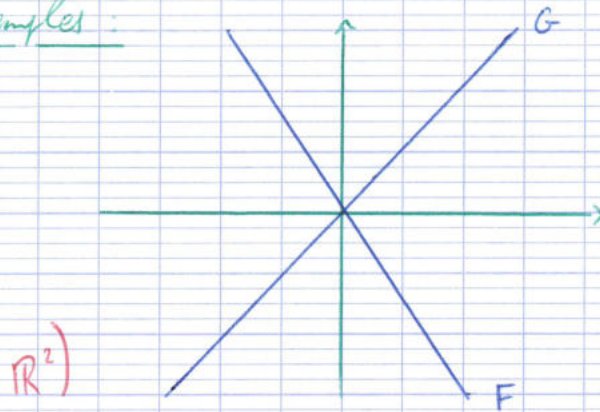
4) $F \subset G \Rightarrow F+G = G$

$$5) F + \{0_E\} = F \quad \text{et} \quad \{0_E\} + F = F$$

$$6) F + E = E$$

démo: de

Exemples:



$$\text{On a } F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

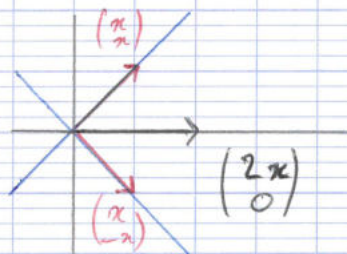
droite - dim = 1 - un paramètre

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

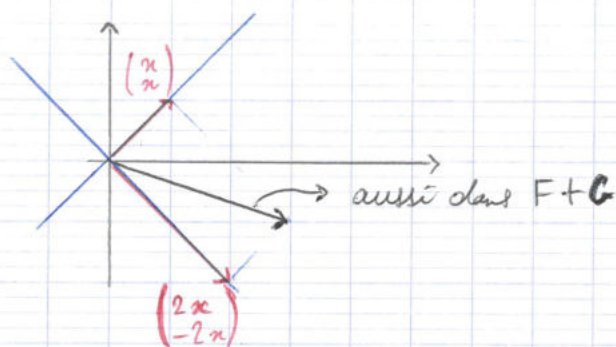
On a F, G sur $\mathbb{R}^2$
alors $F + G$?

- On sait
- a) $F \subset F + G$
 - b) $G \subset F + G$
 - c) $F + G \subset \mathbb{R}^2$

Δ FAUX $F + G = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$



MAIS : on peut aussi faire :



Réponse : $F+G = \mathbb{R}^2$

2 démos :

1) démo par connaissance

On sait que

théorème de classification des sev de $\mathbb{R}^2$

Soit F sev $\mathbb{R}^2$

Alors, on a

$$F = \left\{ 0_{\mathbb{R}^2} \right\} \text{ ou } F = \mathbb{R}^2$$

ou F est une droite du plan passant par l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$

On, $F+G$ sev $\mathbb{R}^2$

et $\begin{matrix} F \\ \searrow \\ F+G \\ \swarrow \\ G \end{matrix}$ sev

Le seul sev de $\mathbb{R}^2$ possible est $\mathbb{R}^2$

2) Mq $F+G = \mathbb{R}^2$ par double-inclusion

. On a $F+G \subset \mathbb{R}^2$. c'est évident

. Rq^t , mq $\mathbb{R}^2 \subset F+G$, soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

On raisonne par analyse-synthèse

Soit donc $(x_F, x_G) \in F \times G$ tq $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x_F + x_G$

On écrit $x_F = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

et $x_G = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$

"litanie des donc"

On a donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\text{donc } \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ -\alpha + \beta = b \end{cases}$$

donc, en sommant : $2\beta = a + b$ donc $\beta = \frac{a+b}{2}$

$$\text{donc } \alpha = a - \beta = \frac{a-b}{2}$$

Réciproquement, posons $\alpha := \frac{a-b}{2}$ et $\beta := \frac{a+b}{2}$

$$\text{et } x_F := \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \text{ et } x_G := \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

On a bien

$$1^\circ) (x_F, x_G) \in F \times G$$

$$2^\circ) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x_F + x_G$$

$$\text{CCL: } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in F + G$$

② Soient F, G 2 droites du plan non $\parallel$,
alors $F + G = \mathbb{R}^2$

$$⑦ \quad M_q \quad \underset{\substack{\text{ser} \\ M_n(\mathbb{R})}}{S_n(\mathbb{R})} + \underset{\substack{\text{ser} \\ M_n(\mathbb{R})}}{A_n(\mathbb{R})} = M_n(\mathbb{R})$$

ie $M_q \quad \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \exists (S, A) \in S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R}) : M = S + A$

6) Sous-espaces vectoriels engendrés

a) Définition

Déf: E ev

Soit $A \subset E$ une partie de E

Le ser de E engendré par A , noté $\text{Vect } A$, est défini par

$$\text{Vect}(A) := \left\{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ a_1, \dots, a_n \in A \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$$

Le $\text{Vect}(A)$ est l'ens. des CL fabriqués avec des éléments de A

Fait: $\text{Vect}(A)$ ser E

Notation: Si A est fini et que $A = \{x_1, \dots, x_p\}$

alors, on note aussi $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ au lieu de $\text{Vect}(\{x_1, \dots, x_p\})$

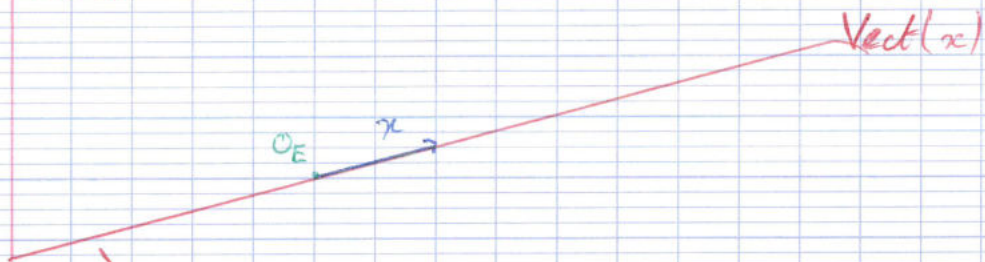
Exemples:

E ev

soit $x \in E \setminus \{0_E\}$

alors $\text{Vect}(x)$ est appelée la droite de E dirigée par x

Dessin

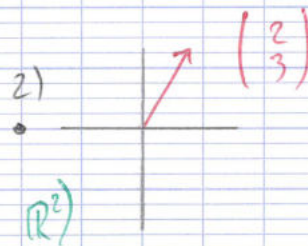
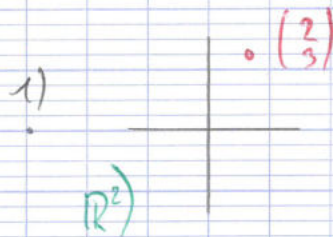


E)

$$\text{On a } \text{Vect}(x) = \left\{ \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

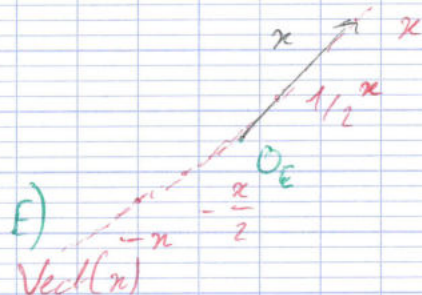
Rq: On a 2 conventions possibles pour dessiner dans un EV

ex: représentons $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



On dessine :

- x avec le rep 0 2)
- si $\lambda \in \mathbb{K}$, on dessine λx avec le rep 0 1)
- $\text{Vect}(x)$ est l'ens des λx



- Dans $\mathbb{R}^2$, $\text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la droite du plan dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ie



On a $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\textcircled{R^X} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Ainsi : } \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fait : E ev, $p \in \mathbb{N}^*$
 $x_1, \dots, x_p \in E$

$$\text{Alors : } \text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1) + \dots + \text{Vect}(x_p)$$

Rq : On écrit aussi $\sum_{i=1}^p F_i$ pour $F_1 + \dots + F_p$

démo : Soit i_0 . On a $\text{Vect}(x_{i_0}) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$

$$\text{En effet : } \text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

Ainsi, $\forall i, \text{Vect}(x_i) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$

$$\left. \begin{array}{l} F_1 \text{ ser } E \\ \vdots \\ F_p \text{ ser } E \end{array} \right\} F_1 + \dots + F_p \text{ ser } E$$

. On a donc : $\text{Vect}(x_1) + \dots + \text{Vect}(x_p) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$

Réciproquement, soit $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$

Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq

$$x = \underbrace{\lambda_1 x_1}_{\in \text{Vect}(x_1)} + \dots + \underbrace{\lambda_p x_p}_{\in \text{Vect}(x_p)}$$

Donc, $x \in \text{Vect}(x_1) + \dots + \text{Vect}(x_p)$

$$\text{Bilan: } \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = F + G = \mathbb{R}^2$$

Rq : Généralisons :

$$\bullet A, B \subseteq E \Rightarrow \text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect } A + \text{Vect } B$$

$$\bullet (A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{P}(E)^n \Rightarrow \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Vect}(A_i)$$

b) Caractérisation de Vect(A)

Prop: $E \text{ ev}, A \subseteq E$

alors $\text{Vect}(A)$ est le + petit sev de E contenant A

Démo : Il ou doit montrer

$$1^\circ) \text{Vect}(A) \text{ sev } E \text{ et } A \subseteq \text{Vect}(A)$$

$$2^\circ) \text{ Si } F \text{ sev } E \text{ tq } A \subseteq F \text{ alors } \text{Vect}(A) \subseteq F \\ \text{ce qui est vrai car } F \text{ est stable par CL}$$

$$\text{Rq: On peut donc écrire: } \text{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev } E \\ A \subseteq F}} F$$

$$1^\circ) \text{ Mq } \text{Vect}(A) \text{ sev } E$$

Soient $x, y \in \text{Vect}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Reformulation : Soient donc $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in A$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\text{tq } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$$

De $m, m \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_n \in A$, $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tq

$$y = \sum_{j=1}^m \mu_j k_j$$

On a $x + \lambda y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overset{EA}{(a_i)} + \lambda \sum_{j=1}^m \mu_j \overset{EA}{(k_j)}$

C'est encore une CL d'élé^t de A

Ainsi : $x + \lambda y \in \text{Vect } A$

CCL: $\text{Vect } A \text{ ser } E$

2°) $A \subset \text{Vect } A$

En effet, soit $a \in A$. On a bien $a = \sum_{i=1}^1 1 \cdot a$

donc a est une CL d'éléments de A. $a \in \text{Vect}(A)$

3°) Soit $F \text{ ser } E$ tq ACF Mq "Vect A est + petit que F"

Rq: On note $\mathcal{F} := \left\{ F \in \mathcal{P}(E) \mid \begin{array}{l} F \text{ ser } E \\ ACF \end{array} \right\}$

On munit $\mathcal{F}$ d'une relation d'ordre: l'inclusion

On a $\text{Vect}(A) \in \mathcal{F}$
 $E \in \mathcal{F}$

$\forall F \in \mathcal{F}, \text{Vect } A \ll F$
 $\uparrow \text{ie } \text{Vect } ACF$

Mq $\text{Vect } A \subset F$

Soit $x \in \text{Vect } A$

Reformulation: soit $n \in \mathbb{N}$, soient $a_1, \dots, a_n \in A$
 et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tq $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$

On a $\left. \begin{array}{l} \forall i, a_i \in F \\ \forall i, \lambda_i \in K \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Coeur de} \\ \text{la preuve} \end{array} \text{ donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in F$

Je $x \in F$. On a mg Vect ACF

c) Lien avec les familles génératrices

Fait : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.
On a $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice $\Leftrightarrow \text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = E$

Rq:

- $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
- Une famille est tjrs génératrice dans l'espace qu'elle engendre
- $F \text{ sev } E \Rightarrow \text{Vect } F = F$

d) Exemples:

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $P_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^i$

On a $P_i = \widetilde{x^i}$

Alors : $\text{Vect}(P_i)_{i \in \mathbb{N}} = \text{Vect}(\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\})$
est l'ensemble des fonctions polynomiales

• Vect (cos, sin)

$$E' \text{ est } \left\{ \lambda \cos + \mu \sin \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

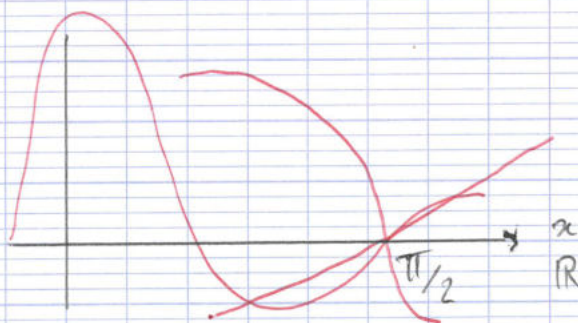
$$\text{Faît : Vect}(\cos, \sin) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto A \cos(t + \varphi) \end{array} \mid \begin{array}{l} A \in \mathbb{R} \\ \varphi \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Rq: Vect (cos) est une droite vectorielle

$$\text{Notons } F := \left\{ f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \right\}$$

On a $F \text{ sev } \mathcal{E}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Dessin:



$$\text{On a bien : } \forall f, g \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Rq: $A \in \mathbb{R}$ fixée

$$F_A := \left\{ f \mid \forall a \in A, f(a) = 0 \right\} \text{ sev } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\text{On a } \cos \in F_{\{\frac{\pi}{2}\}}$$

$$\text{On a } \cos \in F_{\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

• Fait : $A \subset B \Rightarrow \text{Vect } A \subset \text{Vect } B$

démo :

On sait que $\forall C \in \mathcal{P}(E)$, $C \subset \text{Vect}(C)$

donc $A \subset B \subset \text{Vect}(B)$

En particulier : $A \subset \text{Vect}(B)$

donc $\text{Vect } B$ est un sev E qui contient A

Or $\text{Vect } A$ est le + petit sev de E contenant A

Donc $\text{Vect } A \subset \text{Vect } B$

Bilan : $\cos \in F_{\{\pi/2\}}$

donc $\text{Vect}(\cos) \subset \text{Vect}(F_{\{\pi/2\}}) = F_{\{\pi/2\}}$

Or $\sin(\pi/2) \neq 0$ donc $\sin \notin F_{\{\pi/2\}}$

donc $\text{Vect}(\cos, \sin) \neq \text{Vect}(\cos)$

car $\text{Vect}(\cos, \sin) \not\subset F_{\{\pi/2\}}$

• $T > 0$
 $\left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ T-périodique} \right\}$ sev $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ noté Per_T

On a donc $\text{Per}_T \cap \mathcal{E}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sev $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Fait: $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ périodique}\}$

n'est pas un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Démon: Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on note $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \left\{ \frac{x}{a} \right\}$

partie fractionnaire de $\frac{x}{a}$

alors f_a est a -périodique

si $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$f_a(a+x) = \left\{ \frac{a+x}{a} \right\} = \left\{ \frac{x}{a} + 1 \right\} = f_a(x)$$

Or, $\{ \cdot \}$ est 1-périodique

¶ $f_1 + f_{\sqrt{2}}$ n'est pas périodique

On raisonne par l'absurde. Soit $T > 0$ tq
 $f_1 + f_{\sqrt{2}}$ est T -périodique

On note $f := f_1 + f_{\sqrt{2}}$

$$\text{On a } f(T) = f(0) = 0 = \overbrace{\{T\}}^{>0} + \overbrace{\left\{\frac{T}{\sqrt{2}}\right\}}^{>0}$$

$$\text{On a donc } \{T\} = 0 = \left\{\frac{T}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}, \{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$\text{donc } T \in \mathbb{N}^* \text{ et } \frac{T}{\sqrt{2}} \in \mathbb{N}^* \text{ (car } T > 0)$$

donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: absurde

c) Résolution d'équation

Il s'agit d'une compétence de base
On note

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

$$\text{On note } E := \left\{ X \in M_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors E est un $M_{4,1}(\mathbb{R})$

Soit $X \in M_{4,1}(\mathbb{R})$, on écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ où $x, y, z, t \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } X \in E \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + 2t = 0 \\ 2x + y + z + 3t = 0 \\ 3x + y + 2z + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a } A_{\text{VL}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \text{ est proportionnelle à } L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{array}$$

$$\sim_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

E est l'échelonée réduite de A

Inconnues principales : x, y
paramètres : z, t

$$\text{donc } X \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - t \\ y = z - t \\ z, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On écrit :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} -z - t \\ z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ou } E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\uparrow$
 $z=1$
autres param : 0

$\uparrow$
 $t=1$
autres param : 0

En effet, (*) se réécrit :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} -z - t \\ z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid t, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Notation: E ev, $x \in E$
 $\text{Vect}(x)$ est aussi noté Kx .

Conclusion: on a

$$E = K \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV.!! Sommes directes

1) Cas de deux sous-espaces

a) Définition

Déf: E ev F, G sev E

On dit que F et G sont en somme directe ssi
 les éléments de $F+G$ s'écrivent d'une façon unique
 $x_F + x_G$

ie $\forall (x_F, y_F) \in F^2, \forall (x_G, y_G) \in G^2$

$$x_F + x_G = y_F + y_G \Rightarrow \begin{cases} x_F = y_F \\ x_G = y_G \end{cases}$$

b) Caractérisation

Prop: F, G sev E

Alors F et G sont en somme directe

$$F \cap G = \begin{matrix} \Downarrow \\ \Uparrow \end{matrix} \{0_E\}$$

Rq: Δ cette caractérisation est unique^t valable pour deux sev

démo: $\Downarrow$ Orsq F et G sont en somme directe
Mq $F \cap G = \{0_E\}$

Soit $x \in F \cap G$

$$\text{On écrit } x = \underset{EF}{x} + 0_G = 0_F + \underset{EG}{x}$$

Par unicité de la décomposition dans $F+G$
On a nécessairement,

$$\begin{cases} x = 0_F \\ 0_G = x \end{cases}$$

$$\text{donc } x = 0_E \text{ (on a } 0_F = 0_G = 0_E)$$

$$\text{donc } F \cap G \subset \{0_E\}$$

De plus, $F \cap G$ sev E donc $\{0_E\} \subset F \cap G$

$$\text{CCL : on a } F \cap G = \{0_E\}$$

$\Uparrow$ Orsq $F \cap G = \{0_E\}$. Mq F et G sont en somme directe.
Soient $x_F, x'_F \in F$ et $x_G, x'_G \in G$ tels que
 $x_F + x_G = x'_F + x'_G$ (*)

$$\text{Mq } x_F = x'_F \text{ et } x_G = x'_G$$

Ex Rq: Par analyse métamathématique, on va plutôt
montrer que $x_F - x'_F = 0_E$
de m pour x_G, x'_G

$$(*) \text{ s'écrit } x_F - x'_F = x'_G - x_G$$

On a $x_F - x'_F \in F$ et $x'_G - x_G \in G$
car F, G sev

$$\text{Or, } x_F - x'_F = x'_G - x_G \\ \text{donc } x_F - x'_F \in F \cap G = \{0_E\} \quad \text{par hyp.}$$

$$\text{donc } x_F = x'_F \quad \text{donc } x_G = x'_G$$

Exemple: $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

$$G = \left\{ f \in E \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}$$

$$H = \left\{ f \in E \mid f \text{ cste} \right\}$$

$$K := \text{Vect}(e_1)$$

Déjà, on a $H = \text{Vect}(\tilde{1})$

On a H en somme directe avec F

En effet, $\left(f \text{ est et } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right) \Rightarrow f = \tilde{0}$

rappel : $\int_a^b \lambda dt = \lambda \times l[a, b] = \lambda(b-a)$

G et H sont en somme directe

K est en somme directe avec F, G et H

¶ K est en somme directe avec F

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\int_0^1 \lambda e^t dt = 0$

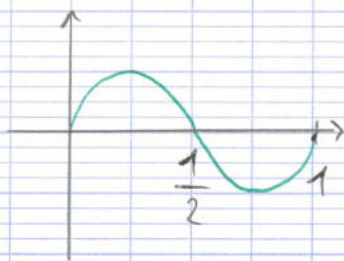
$$\text{On, } \int_0^1 \lambda e^t dt = \lambda [e^t]_0^1 = \lambda \underbrace{(e-1)}_{\neq 0}$$

donc $\lambda = 0$

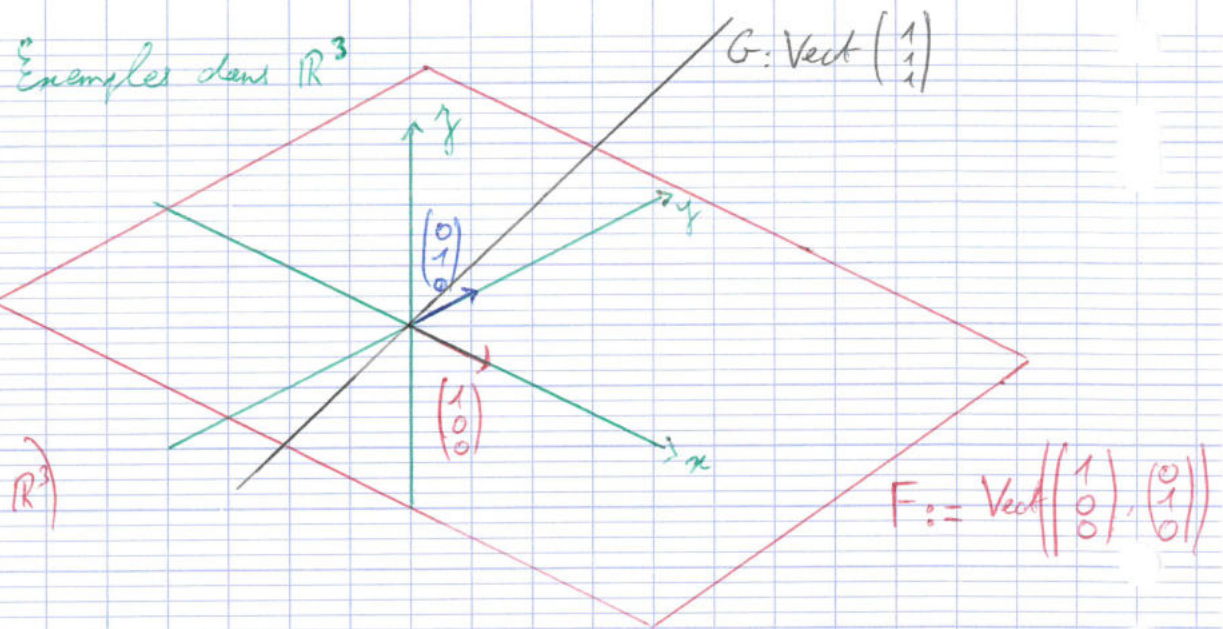
F et G ne sont pas en somme directe

Il suffit de trouver $f \neq \tilde{0}$ tq $f(0) = f(1) = 0$
et $\int_0^1 f(t) dt = 0$

On prend

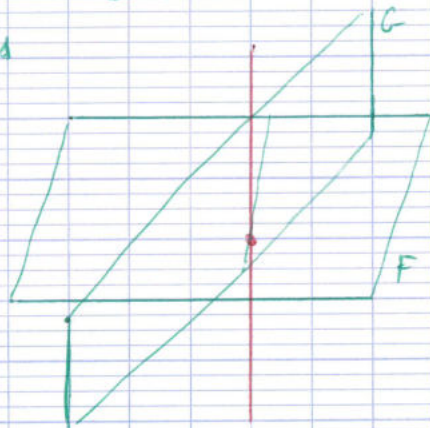


$$\text{ie } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(2\pi x)$$



F et G sont en somme directe

Mais



F et G ne sont pas en somme directe

Fait : E ev

F, G pas en somme directe $\Rightarrow F \cap G$ contient une droite

démo : Orsq F, G pas en Σ directe. Soit donc $x_0 \in F \cap G$
avec $x_0 \neq 0_E$

On a $\text{Vect}(x_0) \subset F \cap G$ car $F \cap G$ sev E

2) Cas général

Déf: E ev, $p \in \mathbb{N}^*$
 $F_1, \dots, F_p$ sev de E

On dit que $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont en somme directe Δ ssi

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p \\ \forall (y_1, y_2, \dots, y_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p \end{aligned}$$

$$x_1 + \dots + x_p = y_1 + \dots + y_p \Rightarrow \forall i, x_i = y_i$$

ie la décomposition dans $F_1 + \dots + F_p$ est unique

$$\begin{aligned} \text{ie } F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p &\rightarrow F_1 + F_2 + \dots + F_p \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) &\mapsto x_1 + x_2 + \dots + x_p \\ &\text{est injective} \end{aligned}$$

Prop: $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe



$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E \\ \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0_E \end{aligned}$$

Lémo: $(\Downarrow)$ Cq $\exists$ décomposition unique

$$\text{donc } x_1 + \dots + x_p = 0_E \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_p = 0_{E_1} + 0_{E_2} + \dots + 0_{E_p}$$

$$\Rightarrow \forall i, x_i = 0_E$$

② Usq décompo unique de 0_E

Soit $x \in F_1 + F_2 + \dots + F_p$ qu'on écrit

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \dots + x_p \\ &= y_1 + \dots + y_p \end{aligned}$$

$$\text{On a } (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \dots + (x_p - y_p) = 0_E$$

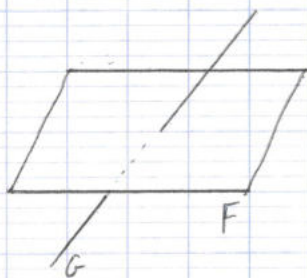
3)!! Supplémentaire

a) Définition

Def : Soit E ev et soit F sev E

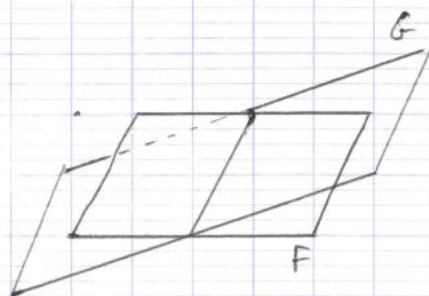
Soit G sev E , G est un supplémentaire de F dans E
ssi $F + G = E$ et F et G sont en somme directe

Dessin



$$F + G = E$$

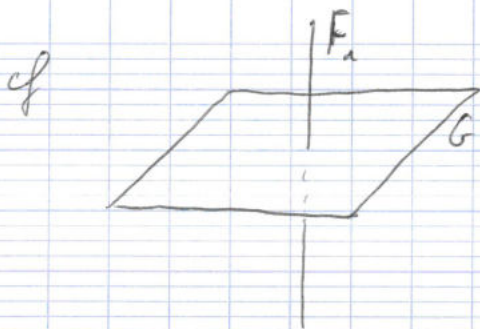
ou



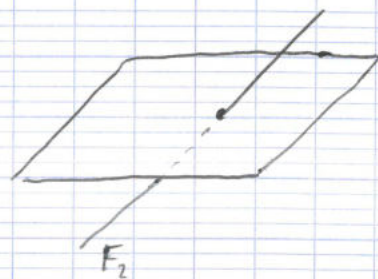
$$F + G = E$$

On note alors : $E = F \oplus G$

Remarque !! : Il n'y a pas unicité du supplémentaire



et



Remarque ! : on a toujours l'existence d'un supplémentaire

Exemples

• $E = \mathcal{C}^0([0,1] \rightarrow \mathbb{R})$

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$$

$$G = \left\{ f \in E \mid f \text{ constante} \right\} = \text{Vect}(\tilde{f})$$

On a : $E = F \oplus G$

$$E = F \oplus \text{Vect}(\tilde{f})$$

De même : $E = F \oplus \text{Vect}(\exp)$

• On note $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

et $G_1 := \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\xrightarrow{\vec{e}_x} \quad \xrightarrow{\vec{e}_y}$

$$G_2 := \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

1°) On a $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

2°) On a $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ et $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$

3°) Mq F et G_1 sont en somme directe

$\mathbb{R}^3$, on calcule $F \cap G_1$

Fait $X \in F \cap G_1$

Soit donc $z \in \mathbb{R}$ tq $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ car $X \in G_1$

Si $X \in F$, on a $z = 0$
donc $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $F \cap G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ie F et G_1 sont en somme directe

4°) Mq la somme $F + G_1$ est plane
ie mq $F + G_1 = \mathbb{R}^3$

On raisonne par double-inclusion

$F + G_1 \subset \mathbb{R}^3$: c'est automatique

Fait: Ecv

F, G, H ser E

$$\left. \begin{array}{l} F \subset H \\ G \subset H \end{array} \right\} \Rightarrow F + G \subset H$$

Mq $\mathbb{R}^3 \subset F + G_1$

Soit $X \in \mathbb{R}^3$ qu'on écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in F \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in G_1$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F + G_1$$

$$\text{Bilan : } F \oplus G_1 = \mathbb{R}^3$$

ie la somme est pleine et directe

$$6^\circ) \text{ Mq } G_2 \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Soit } X \in G_2 \cap F$$

$$\hat{=} X \in G_2, \text{ on écrit } X = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$

$$\hat{=} X \in F, \text{ on a } z = 0 \quad \text{donc } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc la Σ est directe

$$7^\circ) \text{ Mq elle est pleine}$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \text{ on force à apparaître } \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z + (x-z) \\ z + (y-z) \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix} \in F \quad \text{et } \begin{pmatrix} y \\ z \\ z \end{pmatrix} \in G_2$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F + G_2$$

donc la somme est pleine

$$8^\circ) \text{ Bilan : } F \oplus G_2 = \mathbb{R}^3$$

$$\text{Ainsi en général } \left. \begin{array}{l} F \oplus G_1 = E \\ F \oplus G_2 = E \end{array} \right\} \Rightarrow F \oplus G_1 = F \oplus G_2$$

$$\Rightarrow G_1 = G_2$$

Exemple

$$E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$F = \{ f \in E \mid f \text{ paire} \}$$

$$G = \{ f \in E \mid f \text{ impaire} \}$$

- On a F, G sev E
- Mq F et G sont en somme directe

$$\text{ie mq } F \cap G = \{ \vec{0} \}$$

Tout $f \in E$ tq f est paire et impaire

$$\text{Tout } x \in \mathbb{R} \text{ , on a } f(-x) = -f(x)$$

$$= f(x)$$

$$\text{donc } f(x) = -f(x)$$

$$\text{donc } 2f(x) = 0 \quad \text{donc } f(x) = 0$$

donc $F \cap G = \{0\}$

donc F et G sont en Σ directe

Mq la Σ est pleine

ie Mq $\forall f \in E, \exists q, k \in F \times G : f = q + k$

fait au chap. 1

CCL : $E = F \oplus G$

4) Bases et sommes directes

Prop : E ev ; $p \in \mathbb{N}^*$; $(e_1, \dots, e_p)$ famille libre

alors si $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p)$ sont en somme directe

démo : soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$

Mq $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \cap \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p) = \{0_E\}$

Soit $x \in \text{Vect}(\dots) \cap \text{Vect}(\dots)$

On a $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

Soit donc $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ tq $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$

de m, soient $\mu_{k+1}, \dots, \mu_p \in K$ tq $x = \sum_{i=k+1}^p \mu_i e_i$

On, $x - x = 0_E$

ie $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i - \sum_{i=k+1}^p \mu_i x_i = 0_E$

On $(e_1, \dots, e_p)$ est libre

donc $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_i = 0$

$\forall i \in \llbracket k+1, p \rrbracket, \mu_i = 0$

donc $x = 0_E$

donc $\text{Vect}(\dots) \cap \text{Vect}(\dots) = \{0_E\}$

ie $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p)$ sont en somme directe

Généralisation

Soit $l \in \mathbb{N}^*$ et soit $(I_j)_{j \in \llbracket 1, l \rrbracket} \in \mathcal{P}(\llbracket 1, p \rrbracket)^l$ tq

$$\bullet \bigcup_{j=1}^l I_j = \llbracket 1, p \rrbracket \quad (\text{hypothèse surpluse})$$

$$\bullet \forall j_1, j_2 \in \llbracket 1, l \rrbracket, I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset$$

Alors les sev $F_j = \text{Vect}((e_i)_{i \in I_j})$ sont en somme directe pour $j \in \llbracket 1, l \rrbracket$

Prop: E ev, F, G sev tq $F+G=E$

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille génératrice de F
soit $(y_1, \dots, y_q)$ une famille génératrice de G

Alors $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ est une famille génératrice de E

Prop: E ev, F, G sev E tq F et G sont en somme directe

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in F^p$ une famille liée

Soit $(y_1, \dots, y_q) \in G^q$

alors $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ est liée

Prop: E ev, F, G sev E tq $F \oplus G = E$

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ base de F

Soit $(y_1, \dots, y_q)$ base de G

Alors $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ est une base de E

Généralisations : (?)

