Chapitre 16

Applications linéaires

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^3 \subset \cdots$$

La tour d'inclusion croissante des noyaux itérés

Les applications linéaires sont les applications $f : E \longrightarrow F$ entre espaces vectoriels qui sont « compatibles » avec les deux opérations fondamentales de la structure d'espace vectoriel : l'addition et la scalairisation.

Autrement dit, si E et F sont deux espaces vectoriels (sur $\mathbb{R}$ par exemple), alors une application $f : E \longrightarrow F$ sera appelée application linéaire de E dans F $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

1) $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Les applications linéaires sont très simples ; évidemment, à mesure que les espaces vectoriels se complexifient, elles deviennent de plus en plus dures à appréhender. Il n'en reste pas moins qu'il s'agit de fonctions parmi les plus élémentaires.

Dans ce chapitre, nous en commençons l'étude.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

x

Chapitre 16 : Applications linéaires

Intro :

Les fonctions les plus simples sont les $\tilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto c$

puis les fct linéaires $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbb{R}$

Idée : Au lieu de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on regarde $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$
ie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$
$(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^n$ ie $f_1(x_1, \dots, x_p)$
$f_2(x_1, \dots, x_p)$
$\vdots$
$f_n(x_1, \dots, x_p)$

ou mieux $f : E \to F$ où E, F ev

On commence l'étude de ces applications par les plus simples : applications linéaires

I, Définitions

1) Applications linéaires

Déf : Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev
Soit $f : E \to F$. On dit que f est linéaire ssi

. $\forall x, y \in E$, $f(\underset{\in E}{x} +_E \underset{\in E}{y}) = \overset{\in F}{f(x)} +_F \overset{\in F}{f(y)}$
f est additive
. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda \cdot_E x) = \lambda \cdot_F f(x)$

On note $L(E, F)$ l'ensemble des app. linéaires de E dans F

2) Exemple

a) $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$
$F = \mathbb{R}$

$$I : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)\,dt \end{array}$$

Soient $f, g \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$

On a : $\int_0^1 f+g = \int_0^1 f + \int_0^1 g$

ie $I(f+g) = I(f) + I(g)$

et $\int_0^1 \lambda f = \lambda \int_0^1 f$ ie $I(\lambda f) = \lambda \cdot I(f)$

CCL : $I(\cdot)$ est linéaire ie $I(\cdot) \in L(E, \mathbb{R})$

3) Premières propriétés

<u>Fait</u> : $f \in L(E,F) \Rightarrow f(0_E) = 0_F$

<u>démo</u> : Soit $x_0 \in E$, on $f(0 \cdot x_0) = 0 \cdot f(x_0)$
Or $\forall x \in E,\ 0 \cdot x = 0_E$ et de m̂ dans F
donc $f(0_E) = 0_F$

<u>Fait</u> : Soit $f : E \to F$
alors f est linéaire $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,
$f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

↳ Canevas
Mq f linéaire ie mq $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

4) Autres exemples

- I intervalle, $a \in I$

alors $\text{év}_a : \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$ est linéaire

<u>démo :</u> Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{alors } \bar{\text{év}}_a(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(a)$$
$$= f(a) + (\lambda g)(a)$$
$$= f(a) + \lambda \cdot (g(a))$$
$$= \bar{\text{év}}_a(f) + \lambda \cdot \text{év}_a(g)$$

- $\text{tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est linéaire

ie $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \cdot \text{tr}(B)$

- $a \in \mathbb{R}$, $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto at$ est linéaire

- la transposition est linéaire

$$(\cdot)^T : M_{np}(\mathbb{K}) \to M_{pn}(\mathbb{K}), \quad M \mapsto M^T \quad \text{est linéaire}$$

ie $(\cdot)^T \in L(M_{np}(\mathbb{K}), M_{pn}(\mathbb{K}))$

- On note $E := \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u \xrightarrow{CV} \right\}$

On a E sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors $E \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \lim(u)$ est linéaire

- $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ n'est pas linéaire
  $P \mapsto \text{coeff dom}(P)$

En effet, $\underbrace{\text{coeff dom}(X^2+X-X)}_{=1} \neq \underbrace{\text{coeff dom}(X^2+X)}_{1} - \underbrace{\text{coeff dom}(X)}_{1}$

⚠ Soit $n \geq 0$, $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P = n\}$ n'est pas un ev !

En effet $\deg(0) \neq n$
On regarde plutôt $\mathbb{K}_n[X]$

- $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ est linéaire
  $P \mapsto \text{coeff cst}(P)$

- $a \in \mathbb{R}$, $\text{év}_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$
  $P \mapsto P(a)$

- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev (de dimension 1)
  $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev (de dimension 2)

Notons $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, φ est $\mathbb{R}$-linéaire

En effet si $z, z' \in \mathbb{R}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ ie $\varphi(z+z') = \varphi(z) + \varphi(z')$
- $\overline{\lambda z} = \lambda \cdot \overline{z}$ ie $\varphi(\lambda z) = \lambda \varphi(z)$

⚠ φ n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire
car $\forall x \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(\lambda x) \neq \lambda \varphi(x)$

. $\mathrm{Re}(\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$- linéaires

car $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \cdot \mathrm{Re}(z)$

. $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est linéaire

et $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est linéaire

et si $p \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$

. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas linéaire

et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ ne sont pas linéaires.

. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_n & \mapsto & \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n \end{array}$ est linéaire

. $n, p \geq 1$, $j \in [\![1, p]\!]$

$\begin{array}{cccc} C_j : & M_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & A & \mapsto & C_j(A) \end{array}$ est linéaire

. $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ fixé
dire que $\forall Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(Q+R)P_0 = QP_0 + RP_0$

est contenu dans l'assertion : $\begin{array}{cccc} m_{P_0} : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ & Q & \mapsto & QP_0 \end{array}$

m_{P_0} est linéaire

⚠ $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ n'est pas linéaire
$(P,Q) \mapsto PQ$

de m̂ pour les matrices

. $\lambda_0 \in \mathbb{K}$
$S_\lambda : E \to E$ est linéaire
$x \mapsto \lambda_0 x$
C'est l'homothétie de E de facteur λ_0
c'est $\lambda_0 \cdot Id_E$

. E, F ev alors $P_1 : E \times F \to E$
$(x,y) \mapsto x$

et $P_2 : E \times F \to F$ est linéaire
$(x,y) \mapsto y$

5) AL canoniquement associées à $A \in M_{np}(\mathbb{K})$

Déf : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

alors l'application $u_A : M_{p,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K})$
$X \mapsto AX$
est linéaire et est appellée
applica⊙ linéaire canoniqueᵗ associée à A (ALCA)

6) Classification de $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Prop : les app. lin. de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax$

démo : 1°) $f_a \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ok

2°) Soit $f \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Mq $\exists\, a \in \mathbb{R} : f = f_a$
On raisonne par analyse synthèse

Analyse : Soit $a \in \mathbb{R}$ tq $f = f_a$

alors on a on évalue en $x = 1$

On a $f(1) = f_a(1) = a$
ainsi, $a = f(1)$ Rq : unicité de a

Synthèse :
On pose $a := f(1)$
Mq $f = f_a$, soit $x \in \mathbb{R}$
On a $f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1)$ car f est $\mathbb{R}$-linéaire
ie $f(x) = ax$

7) $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

Prop : les $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ sont les $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto ax + by$

démo:

1°) les $f_{a,b}$ sont linéaires

2°) Soit $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Mq $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : f = f_{a,b}$

Par analyse synthèse:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $f = f_{a,b}$

On évalue en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On obtient $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f_{a,b}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

or $f_{a,b}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a$

de m̂, on trouve $b = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (d'où l'unicité)

Synthèse:

On pose $a := f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $b := f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Mq $f = f_{a,b}$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a:

Rᵡ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

additivité $= f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

scalarisa° $= x\, f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= x \cdot a + y \cdot b = f_{a,b}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

8) Applications linéaires et combinaisons linéaires

Prop : Soient E, F ev
Soit $f : E \to F$ linéaire ie soit $f \in L(E,F)$

Soient $x_1, \dots, x_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$

Alors, on a $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

ie f est compatible aux CL

Rq : F sev E
$x_1, \dots, x_p \in F$ $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$
alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in F$

9) Endomorphismes

morphisme : qui conserve la forme de la structure
endo : à l'intérieur de lui-m̂

Déf : Soit E ev. Soit $f : E \to E$
On dit que f est un endomorphisme de E quand f est linéaire
Ie un endomorphisme f est un élément $f \in L(E,E)$
L'ens des endomorphismes de E est noté $L(E)$

10) Formes linéaires

Déf : Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'ens. des formes linéaires est noté $E^* := L(E, \mathbb{K})$

Exemples :

- $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)\,dt \end{array}$
- $\begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & m_{1,1} \end{array}$

formes linéaires

- Les coordonnées sont des formes linéaires
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$
  Soit $i \in [\![1, n]\!]$
  On note P_i la i-ième coordonnée

$$P_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & x_i \end{array}$$

Alors $P_i \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ est une forme linéaire

- Exemples d'endomorphisme :

$$D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$ est bien définie

et D est linéaire : c'est un endomorphisme
ie $D \in L(\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}))$

$(\cdot)^T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme

E ev, $Id_E : E \to E$. On a $Id_E \in L(E)$

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$$ n'est absolument pas linéaire

1°) $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un ev

2°) En effet, $O_n \notin GL_n(\mathbb{R})$

3°) $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable par somme

$I_n \in GL_n(\mathbb{R})$, $-I_n \in GL_n(\mathbb{R})$

mais $I_n - I_n \notin GL_n(\mathbb{R})$

4°) Pour $n = 1$, qui est $GL_n(\mathbb{R})$?

c'est $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$

donc $i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x}$

A-t-on $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ FAUX

5°) Mais $GL_n(\mathbb{R})$ est stable par produit
et $\forall M, N \in GL_n(\mathbb{R})$, $i(MN) = i(N) \cdot i(M)$ ⚠

. !! Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors $u_A : M_{n,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K})$
$X \mapsto AX$

est un endomorphisme, ie $u_A \in L(M_{n,1}(\mathbb{K}))$

11) $L(\mathbb{R}^2)$

Quelques exemples : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

sont des endomorphismes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$

alors $u_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un endo de $\mathbb{R}^2$

Notons $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

alors $u_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

Prop : (Classification des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$)

Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ sont les u_A avec $A \in M_2(\mathbb{R})$

Ie : 1°) $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$, $u_A \in L(\mathbb{R}^2)$

2°) $\forall f \in L(\mathbb{R}^2)$, $\exists!\, A \in M_2(\mathbb{R}) : f = u_A$

démo :

Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$

On peut écrire "$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$" ie on pose $f_1 := P_1 \circ f$

$f_2 := P_2 \circ f$

Ex : si $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ -10x - \frac{y}{2} \end{pmatrix} \end{matrix}$

alors, on a $f_1 : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & 3x + 2y \end{matrix}$

On a : f_1 et f_2 sont linéaires

Ie : $f_1, f_2 \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

D'après 7), soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tq $f_1 = f_{a,b}$ et $f_2 = f_{c,d}$

On vérifie que $f = u_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$

Unicité : en fait, on a $a = (p_1 \circ f)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$$b = (p_1 \circ f)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

etc.

12) Généralisation : classification de $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $u_A : \begin{array}{rcl} M_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$

Prop : Les applications linéaires $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ sont les u_A avec $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

II, Opérations sur les applications linéaires

1) Structure d'espace vectoriel

Rappel : Si X ensemble $\neq \emptyset$ et si F ev alors $\mathcal{F}(X, F)$ peut être muni d'une structure d'ev :

. si $f, g : X \to F$, on définit $f + g : \begin{array}{rcl} X & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) +_F g(x) \end{array}$

. de m̂, on sait définir λf

Fait : Soient E, F ev
Alors $L(E,F)$ sev $\overbrace{\mathcal{F}(E,F)}^{ev}$

démo : On veut mq $\forall f, g \in L(E,F), \forall \lambda \in \mathbb{K}$,
$f + \lambda g \in L(E,F)$

Soient $f, g \in L(E,F)$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$
Mq $f + \lambda g$ est linéaire

Canevas de preuve pour mq une applicaO linéaire
Notons $\varphi := f + \lambda g$
Mq $\varphi \in L(E,F)$
Soient $x, y \in E$
Soit $\mu \in \mathbb{K}$
Mq $\varphi(x + \mu y) = \varphi(x) + \mu \varphi(y)$
On a $\varphi(x + \mu y) = (f + \lambda g)(x + \mu y)$

déf de $f + \lambda g$ $\quad = f(x + \mu y) + \lambda \cdot g(x + \mu y)$

f est linéaire
g

$= f(x) + \mu f(y) + \lambda g(x) + \lambda \mu g(y)$

$= f(x) + \lambda g(x) + \mu \big(f(y) + \lambda g(y) \big)$

$= (f + \lambda g)(x) + \mu (f + \lambda g)(y)$

déf de $f + \lambda g$ $\quad = \varphi(x) + \mu \cdot \varphi(y)$

donc φ est linéaire
ie $\varphi \in L(E,F)$

CCL : $\left. \begin{array}{l} f, g \in L(E,F) \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow f + \lambda g \in L(E,F)$

donc $L(E,F)$ sev $\mathcal{F}(E,F)$

Corollaire : $L(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev

Complément

1) En pale, notez les temps à chaque fin de question.

1. 8h5
2. 8h15
3. 8h25

Cela permet :

- de connaître son rythme et de réagir
  - 30' sur la n question, il faut accélérer
  - 7', je peux encore continuer à chercher

2) Optimisez la rédaction : mettez l'essentiel ie les mots-clés
3) Garder son espace organisé
4) Parcourir le sujet en début de pale
5) S'entrainer en pale blanche est une très bonne préparation

2) Composition

Fait : E, F, G ev

On se place dans le diagramme $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

Alors $\left.\begin{array}{l} f \in L(E,F) \\ g \in L(F,G) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \in L(E,G)$

démo :

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

On a
$$\begin{aligned}
(g\circ f)(x+\lambda y) &= g\big(f(x+\lambda y)\big) \\
\underset{f \in L(E,F)}{} &= g\big(f(x) + \lambda f(y)\big) \\
\underset{g \in L(F,G)}{} &= g(f(x)) + \lambda\, g(f(y)) \\
&= (g\circ f)(x) + \lambda\, (g\circ f)(y)
\end{aligned}$$

3) Diagrammes

. Un diagramme d'ev est la donnée de plusieurs ev reliés par des applications linéaires

. Il est commutatif ssi tous les chemins reliant même origine et même but sont égaux

Exemples : .
$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, bend left=60, "g\circ f"] \arrow[dr, bend right=60, "f\circ g"'] & E \arrow[d, "g"] \\
E \arrow[r, "f"'] & E
\end{tikzcd}$$
est un diagramme. ie E est un ev et $f, g \in L(E)$

Il est commutatif ssi $f\circ g = g\circ f$ ie ssi f et g commutent

- $$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[X] \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ P \arrow[r, mapsto] & P \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathbb{R} \\ g \arrow[r, mapsto] & g(0) \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \xrightarrow{D} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \xrightarrow{D} \dots$

avec $D(f) = f'$

- $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "u_A"] \arrow[rr, bend right, "u_{BA}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "u_B"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$ est commutatif

Fait : $u_B \circ u_A = u_{BA}$

démo : Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

Alors $(u_B \circ u_A)(X) = u_B(u_A(X)) = u_B(AX) = B(AX) = (BA)X$
$= u_{BA}(X)$

4) Cas des endomorphismes

a) On dispose d'une loi de composition interne sur $L(E)$

ie :

Fait : $f, g \in L(E) \Rightarrow g \circ f \in L(E)$

On définit pour $f \in L(E)$: $f^1 := f$
$f^{n+1} := f \circ f^n$ si $n \geqslant 1$
$f^0 := \mathrm{Id}_E$

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n \in L(E)$

Rq : On a la correspondance informelle

a) $E \xrightarrow{f} F$ linéaire $\leftrightarrow$ $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ avec

$p \leftrightarrow E$
$n \leftrightarrow F$

En effet, si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on doit associer à A une applica° linéaire : $u_A : M_{p,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K})$
$X \mapsto AX$

b) $E \xrightarrow{f} E$ linéaire $\leftrightarrow$ $A \in M_n(\mathbb{K})$
ie $f \in L(E)$

b) Déf : Soient $f, g \in L(E)$
On dit que f et g commutent ssi $g \circ f = f \circ g$

c) Calculs dans $L(E)$

Si $f, g \in L(E)$, on note $gf := g \circ f$
Ceci est compatible avec la relation $f^n = \underbrace{ff \dots f}_{n \text{ fois}}$

Ainsi dans $L(E)$ je dispose de trois opérations :
- fg si $f, g \in L(E)$
- $f + g$ si $f, g \in L(E)$
- λf si $f \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Rq : On dit que $L(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (= $\mathbb{K}$-ev + une loi multiplicative)
- $M_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre
- $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative

Concrètement, cela veut dire qu'on peut faire tous les calculs usuels en "mode non commutatif" sauf l'inversion

Ex : Si $f, g, h, u \in L(E)$

Alors les expressions suivantes sont autorisées et sont des endomorphismes

$$fg + hu \quad , \quad (f+g)(h+u) \quad , \quad f^5 + 42\, huhu - \frac{3}{2} + ug$$

Ex : $n \geq 1$

$A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$

alors : $(u_A + u_B)(u_C - 4u_D) = u_{(A+B)(C-4D)}$

d) Polynômes dans une $\mathbb{K}$-algèbre

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre (ie $+, \cdot, \times$)

Soit $a \in A$, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k, \lambda_k \in \mathbb{K}$ avec $\lambda_n \neq 0$ (osq $P \neq 0$)

Déf : L'évaluation de P en a est :

$$P(a) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{\in \mathbb{K}} \cdot a^k \in A$$

Rq : . a^0 est le 1 de la $\mathbb{K}$-algèbre

. si $P = 0$, on pose $P(a) := 0_A$

Soit $a \in A$

On note $\text{év}_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$

$P \mapsto P(a)$

Prop : év_a est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre

7_e a) $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \ (P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$

b) $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \ (PQ)(a) = P(a) \times_A Q(a)$

<u>Démo</u> : b) $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \ ; \ Q = \sum_{l=0}^{n} \mu_l X^l$

On a $PQ = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \mu_l X^l\right)$

$= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant l \leqslant n}} \lambda_k \mu_l X^{k+l}$

donc $(PQ)(a) = \sum_{k,l} \lambda_k \mu_l a^{k+l}$

Puis $P(a) Q(a) = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \mu_l a^l\right)$

$= \sum_{k,l} \lambda_k \mu_l a^{k+l}$

e) Polynômes d'endomorphismes

E ev ; $u \in L(E)$; $P \in \mathbb{K}[X]$

On dispose de $P(u)$

On a si $Q \in \mathbb{K}[X]$ $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$

⚠ $P(u+v)$ cela a un sens.

Ce n'est pas $P(u) + P(v)$ cf $P = X^2$

<u>Fait</u> : $f, g \in L(E)$ alors $(f+g)^2 = f^2 + fg + gf + g^2$

Exemples :

$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ On a $D \in L(E)$

$D : E \to E$

$f \mapsto f'$

$P := 3X^2 - 2X + 1$

Alors. 1°) $P(D) = 3D^2 - 2D + Id_E$

2°) On a $P(D) \in L(E)$ ie $P(D) : E \to E$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

On a $P(D)(f) = (3D^2 - 2D + Id_E)(f)$

$= 3D^2(f) - 2D(f) + Id_E(f)$

$= 3D(D(f)) - 2f' + f$

$= 3f'' - 2f' + f$

? Explorer la situation avec $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$S : E \to E$

$(u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$

On a $S \in L(E)$

Calculer $P(S)((u_n)_n)$ pour $(u_n)_n \in E$

f) formules

Prop : (Newton) on développe

E ev ; $f, g \in L(E)$ tq $fg = gf$ ie f, g commutent

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$

Prop : (Bernoulli) on factorise

E ev ; $f, g \in L(E)$ commutent

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}$

Corollaire : E ev ; $f \in L(E)$; $n \in \mathbb{N}$

$$f^n - Id_E = (f - Id) \sum_{k=0}^{n-1} f^k$$

Rq : si $n \in 2\mathbb{Z}+1$, on a des formules pour $f^n + g^n$ et $f^n + Id_E$

5) Commutation

E ev, $f, g \in L(E)$

Prop : Si f et g commutent alors toute puissance de f commute avec toute puissance de g

ie $fg = gf \Rightarrow \forall k, l \in \mathbb{N}$, $f^k g^l = g^l f^k$

Démo :

Lemme : $\forall h \in L(E)$, $hf = fh \Rightarrow \forall k$, $hf^k = f^k h$

démo du lemme :
Soit $h \in L(E)$. Osq $hf = fh$
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P(k)$: " $hf^k = f^k h$ "

. $P(0)$ est vraie car $f^0 = Id_E$

. Mq $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k h = h f^k$. On multiplie à gauche par f.

On a
$$
\begin{aligned}
f \cdot f^k h &= f^{k+1} h \\
P(k) \rightarrow &= f\, h f^k \\
f, h \text{ commutent} \rightarrow &= h f f^k \\
&= h f^{k+1}
\end{aligned}
$$

Soient $f, g \in L(E)$ tq $fg = gf$
Soit $k \in \mathbb{N}$
Le lemme avec $h \leftarrow g$, $f \leftarrow f$ donne $f^k g = g f^k$

Soit $l \in \mathbb{N}$.
Le lemme avec $h \leftarrow f^k$, $f \leftarrow g$, $k \leftarrow l$
On obtient $f^k g^l = g^l f^k$

<u>Prop</u> : E ev ; $f \in L(E)$
Toute CL d'endo qui commutent avec f commute avec f

Ie :
$$
\left.\begin{array}{l} g_1, g_2 \in L(E) \\ \lambda \in \mathbb{K} \\ f g_1 = g_1 f \\ f g_2 = g_2 f \end{array}\right\} \Rightarrow f(g_1 + \lambda g_2) = (g_1 + \lambda g_2) f
$$

Ie, en notant $\mathcal{C}(f) := \{ h \in L(E) \mid fh = hf \}$

On a $\mathcal{C}(f)$ sev $L(E)$

démo : ok

<u>Corollaire</u> : E ev ; $f, g \in L(E)$ qui commutent
Alors tout polynôme en f commute avec g

$$fg = gf \Rightarrow \forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(f)g = gP(f)$$

démo : ok

<u>Corollaire</u> :

$$fg = gf \Rightarrow \forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ P(f)Q(g) = Q(g)P(f)$$

<u>Fait</u> : . $Id_E \in \mathcal{C}(f)$
. $Vect(Id_E) \subset \mathcal{C}(f)$
. les homothéties λId_E commutent avec tlm

<u>Fait</u> : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\mathcal{C}(\lambda Id_E) = L(E)$

<u>Exo</u> : Soit $f \in L(E)$ qui commute avec tlm
Mq f est une homothétie
Ie $\forall f \in L(E),\ \left(\mathcal{C}(f) = L(E) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : f = \lambda Id_E \right)$

III. Noyau et image

1) Préliminaire

Situation : $E \xrightarrow{f} F$ $\quad f \in L(E,F)$

E' /sev E

<u>Fait :</u> $f[E']$ sev F

<u>démo :</u>

Mq $\forall y_1, y_2 \in f[E'], \forall \lambda \in \mathbb{K}, y_1 + \lambda y_2 \in f[E']$

On a choisi les lettres y_1 et y_2 car on est dans F

Soient $y_1, y_2 \in f[E']$, $\lambda \in \mathbb{K}$

R^x reformulation $y \in f[E']$

Soient donc $x_1, x_2 \in E'$ tq $y_1 = f(x_1)$
$y_2 = f(x_2)$

On a $y_1 + \lambda y_2 = f(x_1) + \lambda f(x_2) = f(x_1 + \lambda x_2)$
car $f \in L(E,F)$

Or, E' sev E et $x_1, x_2 \in E'$ donc $x_1 + \lambda x_2 \in E'$
donc $f(x_1 + \lambda x_2) \in f[E']$
ie $y_1 + \lambda y_2 \in f[E']$

On a $0_E \in E'$. donc $f(0_E) \in f[E']$
donc $0_F \in f[E']$

Rq : $f[E']$ est aussi noté $f(E')$

b) Deuxième situation

$$E \xrightarrow{f} F \underset{\text{ser}}{\supset} F' \qquad \begin{array}{l} E, F \text{ ev} \\ f \in L(E,F) \end{array}$$

<u>Fait</u> : $f^{\langle -1 \rangle}[F']$ sev E

Rq : injectif + simple que surjectif
$f^{\langle -1 \rangle}(.)$ + simple que $f[.]$
$\mathrm{Ker}(f)$ + simple que $\mathrm{Im}(f)$

<u>Démo</u> :
1) Soient $x_1, x_2 \in f^{\langle -1 \rangle}[F']$
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

Le réflexe de reformulation de $f^{\langle -1 \rangle}[B]$

On a $f(x_1) \in F'$ et $f(x_2) \in F'$
Or F' sev F donc $f(x_1) + \lambda f(x_2) \in F'$

Or $f(x_1) + \lambda f(x_2) = f(x_1 + \lambda x_2)$
donc $f(x_1 + \lambda x_2) \in F'$

ie $x_1 + \lambda x_2 \in f^{\langle -1 \rangle}[F']$

2) On a $f(0_E) = 0_F \in F'$ donc $0_E \in f^{\langle -1 \rangle}[F']$

Rq : $f^{\langle -1 \rangle}[F']$ est aussi noté $f^{-1}(F')$ même si $f^{-1} \nexists$ pas

2) Image d'une Ap. Lin !!

Déf: Soit $f \in L(E,F)$

L'image de f noté $Im(f)$ est le sev de F défini par

$$Im(f) := f(E)$$

Exemples:

- $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
  $P \mapsto \tilde{P}$

  $Im(\varphi)$ est l'ensemble des fct polynomiales

- $I : \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
  $f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$

  $Im(I(\cdot))$ est un sev de $\mathbb{R}$
  $Im(I(\cdot))$ est l'ens des valeurs possibles pour $\int_0^1 f$ lorsque f parcourt $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$
  On a $Im(I) = \mathbb{R}$

Prop: $E \xrightarrow{f} F$
Soit $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$ une famille génératrice de E
Alors $Im(f) = Vect(f(x_1),\dots,f(x_p))$

Démo: On a $Im(f)$ sev F
et $\forall i$, $f(x_i) \in Im(f)$
donc $Vect(f(x_1),\dots,f(x_p)) \subset Im(f)$

- Rcpt, soit $y \in \mathrm{Im}(f)$
  Soit donc $x \in E$ tq $y = f(x)$
  Or $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice dans E
  Soit donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq
  $$x = \sum \lambda_i x_i$$

On a $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

donc $f(x) \in \mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_p))$

Rq : En g^{al}, on a si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ (pas forcément génératrice)

On a $f\left(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(x_1), \dots, f(x_p)\right)$.

ie $f\left(\sum_{i=1}^{p} \mathbb{K}\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{K}\, f(x_i)$

Généralisation

$F_1, \dots, F_p$ sev E

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} f(F_i)$$

3) $\mathrm{Im}(\cdot)$ et composition

Prop : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

alors $\mathrm{Im}(g \circ f) = (g \circ f)E = g(f(E)) = g(\mathrm{Im}(f))$

4) Image des formes linéaires

a) Structure de sev de $\mathbb{K}$

Fait : Les sev de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$

Démo :

Soit F sev $\mathbb{K}$ avec $F \neq \{0\}$

Soit donc $a \in F$ avec $a \neq 0$

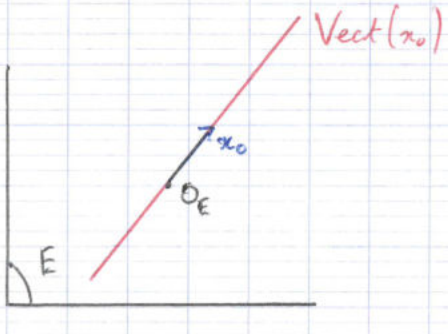
Mq $F = \mathbb{K}$

Soit $x \in \mathbb{K}$, on écrit $x = a \times \frac{x}{a}$ et on note $\lambda = \frac{x}{a}$

On a $\left.\begin{array}{l} a \in F \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}\right\}$ donc $\lambda a \in F$ ie $x \in F$

Remarque : De m̂, soit E ev, soit $x_0 \in E$ non nul alors $\mathrm{Vect}(x_0)$ possède deux sev : $\{0_E\}$ et $\mathrm{Vect}(x_0)$

Dessin :



Prop : Soit $f : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire, alors on a l'alternative suivante :

- f est nulle
- f est surjective

démo : Osq f non nulle ie $f \neq 0$ (ie $f \neq 0_{L(E,\mathbb{K})}$)

donc $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$
Or $\mathrm{Im}(f)$ sev $(\mathbb{K})$
donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$
donc f est surjective

5) $\mathrm{Im}(\cdot)$ et surjectivité

Prop : $E \to F$

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F$$

Exemple : trace est surjective car $\mathrm{tr}(\cdot) \in L(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ et $\neq 0$

Corollaire :

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$
Soit $f \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$
alors $p > n \implies f$ n'est pas surjective

Démo : Osq $p > n$
On raisonne par l'absurde. Osq f surjective

On sait que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est génératrice dans $\mathbb{K}^n$

Or $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^p$

Ainsi, $\mathrm{Vect}(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n)) = \mathbb{K}^p$

Ie $(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n))$ est génératrice de $\mathbb{K}^p$. Absurde.

6) Noyau

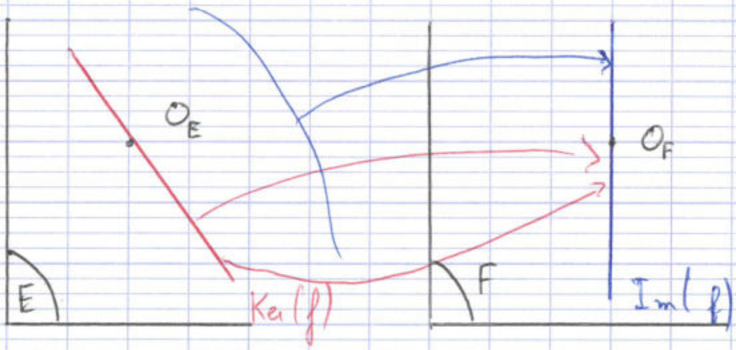
Déf : $E \xrightarrow{f} F$

le noyau de f noté $\mathrm{Ker}(f)$ est le sev de E défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) := \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) = 0_F \right\}$$

$$\text{ie } \mathrm{Ker}(f) := f^{\langle -1 \rangle}\left[\{0_F\}\right]$$

Dessin



Exemple : . $E = \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\qquad P = 3X^2 - 2X + 5$

$D : f \longmapsto f'$

alors $\mathrm{Ker}(P(D)) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1°)\ f \in \mathcal{E}^{\infty} \\ 2°)\ 3f'' - 2f' + 5f = \tilde{0} \end{array} \right\}$

On note $(E)\ 3y'' - 2y' + 5y = 0$

On a $\mathrm{Ker}(P(D)) = \mathcal{S}_{(E)}$ sev $\mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- On note $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Calculons $\mathrm{Ker}(u_A)$

On a $u_A : M_{2,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{2,1}(\mathbb{K})$
$X \longmapsto AX$

Modèle de rédaction

Soit $X \in M_{2,1}(\mathbb{K})$. On écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

On a $X \in \mathrm{Ker}(u_A) \Leftrightarrow u_A(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

reformulation de l'appartenance au noyau

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

On $A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

donc $u_A(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Bilan : $\mathrm{Ker}(u_A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

7) Injectivité et noyau

Prop : $E \xrightarrow{f} F$

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Démo :

$\Rightarrow$ Osq f injective

déjà, on a toujours $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$

En effet : . $\mathrm{Ker}(f)$ sev E

. ou $f(0_E) = 0_F$ ie $\mathcal{L}R^x$: $0_E \in \mathrm{Ker} f$

Mq $\mathrm{Ker} f \subset \{0_E\}$

Soit $x \in \mathrm{Ker} f$

On a $f(x) = 0_F$ ie $f(x) = f(0_E)$

Or f est injective, donc $x = 0_E$

$\Leftarrow$ Osq $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$

Mq f injective

Soient $x, y \in E$

$\mathcal{L}R^x$ linéaire

On a $f(x) = f(y) \iff f(x-y) = 0_F$

$\iff x - y \in \mathrm{Ker} f$

$\iff x - y \in \{0_E\}$

$\iff x = y$

IV, Isomorphismes

Iso = même , morphisme = transformation

Idée : un isomorphisme $f : E \to F$, noté $E \simeq F$, est une AL qui rend les ev E et F complètement analogues
On dit alors que E et F sont isomorphes

Exemple : $\mathbb{K}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{K})$ sont isomorphes

1) Fait fondamental

Prop : Soit $f : E \to F$ une app. linéaire qu'on suppose bijective
Alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi linéaire

démo : Soient $x, y \in F$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$
Mq $f^{-1}(x + \lambda y) = f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)$
Or f est injective, donc on calcule les images par f de ces éléments
On note $a := f^{-1}(x + \lambda y)$
$b := f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)$

On a $f(a) = x + \lambda y$

et $f(b) = f\left(f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)\right) = f(f^{-1}(x)) + \lambda f(f^{-1}(y))$
$= x + \lambda y$

Ainsi $f(a) = f(b)$
Ĉ f inj, on a $a = b$ ie $f^{-1}(x + \lambda y) = f^{-1}(x) + \lambda f^{-1}(y)$

Rq : on a déjà vu un résultat de ce type pour les ensembles ordonnés

Prop : $(E, \leq_E)$ et $(F, \leq_F)$ deux ens. ordonnés
Soit $f : E \to F$ ↗
Alors : f bijective $\Rightarrow f^{-1} : F \to E$ ↗

2) Définition

Déf : Soit $f : E \to F$
On dit que f est un isomorphisme ssi
$$\exists\, g \in L(F,E) : \begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$$

Rq : on a une lci sur $L(E)$: $L(E) \times L(E) \to L(E)$
$(f,g) \to f \circ g$
cette loi est associative, possède un neutre Id_E
Dans ce cas, on a : f inversible dans $L(E) \Leftrightarrow f$ isomorphisme

Idée : $f : E \to F$ iso $\Rightarrow f$ transporte parfaitement la structure de E sur F

Ex : On a $\mathbb{Z} = \{ \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

On invente $\tilde{\mathbb{Z}} = \{ \dots, -\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \dots \}$

Alors $\mathbb{Z}$ et $\tilde{\mathbb{Z}}$ sont isomorphes (en tant que groupes commutatifs). C'est la m̂ structure mais avec des noms différents

Fait : Soit $f \in L(E,F)$. Alors :

$$f \text{ iso} \iff f \text{ bijective}$$

démo : (reformulation du 1))

($\Rightarrow$) Osq f iso. Donc $\exists g \in \mathcal{F}(F,E) : \begin{cases} g \circ f : Id_E \\ f \circ g : Id_F \end{cases}$

donc f bij

($\Leftarrow$) Osq f bij. D'après 1), $f^{-1} \in L(F,E)$
De plus, $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$

donc $\exists g \in L(F,E) : \begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$

3) Automorphismes

Déf : Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme

On dit f est un automorphisme $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ f isomorphisme

Ie : automorphisme = iso + endomorphisme
$E^{\circlearrowleft} \simeq$ $\quad E \xrightarrow{\sim} F \quad E^{\circlearrowleft}$

L'ens des automorphismes de E est noté $GL(E)$ et est appelé groupe linéaire de E

Fait : Soit $f \in L(E)$
Alors $f \in GL(E) \iff f$ inversible dans $(L(E), \circ, Id_E)$

Rq : Si $(X, \cdot, e_x)$ est un ens. muni d'une lci associative et possédant un neutre (ie $(X, \cdot, e_x)$ est un monoïde unitaire). Alors, l'ens des éléments inversibles de X, noté X^* est un groupe.
En effet : . $e_X \in X^*$
. $x, y \in X^* \Rightarrow xy \in X^*$
. $x \in X^* \Rightarrow x^{-1} \in X^*$

Prop : ($GL(E)$ est un groupe)
1) $Id_E \in GL(E)$
2) $f, g \in GL(E) \Rightarrow g \circ f \in GL(E)$
Dans ce cas, on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
3) $f \in GL(E) \Rightarrow f^{-1} \in GL(E)$

4) Exemples

. Id_E est un automorphisme de E

. $u_A : M_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$
$X \longmapsto AX$
alors u_A isomorphisme $\Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$

!!
démo : ($\Rightarrow$) Osq u_A isomorphisme donc u_A inj.
Ie $\operatorname{Ker}(u_A) = \{0_{n,1}\}$
ie $\{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\} = \{0_{n,1}\}$
On retrouve la caractérisation par les systèmes de Cramer des matrices inversibles. donc $A \in GL_n(\mathbb{K})$

($\Leftarrow$) Osq $A \in GL_n(\mathbb{K})$
Mq $u_A \in GL(M_{n,1}(\mathbb{K}))$ ie on veut mq u_A possède une AL réciproque

Bilan : On **cherche** $q : M_{n,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ linéaire

$$\text{tq} \begin{cases} q \circ u_A = Id_{M_{n,1}(\mathbb{K})} \\ u_A \circ q = Id_{M_{n,1}(\mathbb{K})} \end{cases}$$

Réponse : $u_{A^{-1}}$ convient

Méthode : pour prouver que qqch est bij, on peut trouver directe^t sa réciproque

$$\left(\begin{array}{l} \text{cf } u_A \circ u_B = u_{AB} \\ \text{donc } u_A \circ u_{A^{-1}} = u_{I_n} = Id_{M_{n,1}}(\mathbb{K}) \end{array} \right)$$

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^6 & \longrightarrow & S_3(\mathbb{K}) \\ (a,b,c,d,e,f) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \end{array}$$

1°) Φ est linéaire

2°) Φ est surjective

ie $\forall M \in S_3(\mathbb{K})$, M symétrique $\Rightarrow$ "$M = \Phi(\text{qqch})$"

$$\Rightarrow \exists (a, \dots, f) \in \mathbb{K}^6 : \Phi\big((a, \dots, f)\big) = M$$

$$\Rightarrow M = \Phi\big((m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{12}, m_{13}, m_{23})\big)$$

3°) Φ est injective — On calcule $\text{Ker}(\Phi)$

Soit $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{K}^6$ tq $\Phi\big((a,b,c,d,e,f)\big) = O_3$

On a donc $\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $a = b = \dots = f = 0$

Donc $\operatorname{Ker} \Phi = \{0_{\mathbb{K}^6}\}$ donc Φ est injective

. Exemple remarquable = exo !!

Soient E ev
Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$
On note $\varphi : \mathbb{K}^p \to E$
$(x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

alors : 1°) φ est linéaire ie $\varphi \in L(\mathbb{K}^p, E)$
2°) φ injective $\Leftrightarrow (x_i)_i$ libre
3°) φ surjective $\Leftrightarrow (x_i)_i$ génératrice dans E
4°) φ iso $\Leftrightarrow (x_i)_i$ base

V, Définition d'une application linéaire dans une base

1) Deux AL égales sur une base sont égales partout

Prop : E, F ev $(x_1, \dots, x_p)$ base de E ; $f, g \in L(E,F)$

alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f(x_i) = g(x_i) \Rightarrow f = g$

Démo : Obq $\forall i$, $f(x_i) = g(x_i)$
Soit $x \in E$, mq $f(x) = g(x)$

Ĉ $(x_i)_i$ est génératrice dans E, je peux décomposer x dans $(x_i)_i$
Soit donc $(\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^p$ tq $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ R^x : utilise ① de la base

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Or, $\forall i$, $f(x_i) = g(x_i)$ $\displaystyle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g(x_i)$

$$= g\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right)$$

$$= g(x)$$

Principe : J'ai besoin uniquement de connaître mon appli linéaire sur une base pour la connaître entièrement

2) Principe réciproque

Principe : E, F ev . $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une base de E

Pour définir une AL $f : E \to F$, il me suffit de décréter les images de $(x_1, \dots, x_p)$ par f

Exemples : modèle de rédaction

- On pose $E := \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \exp)$
  Alors
  - $(\cos, \sin, \exp)$ est génératrice dans E (affirmé direct)
  - $(\cos, \sin, \exp)$ est libre

    Soit $\lambda, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$ tq $\lambda \cos + \mu \sin + \sigma \exp = \tilde{0}$ $(*)$

    On a $(*)''$: $-\lambda \cos - \mu \sin + \sigma \exp = \tilde{0}$

    donc $(*) + (*)''$: $2\sigma \exp = \tilde{0}$ donc $\sigma = 0$

    donc $\lambda \cos + \mu \sin = \tilde{0}$

    or $(\sin, \cos)$ est libre donc $\lambda = \mu = 0$

    donc $(\cos, \sin, \exp)$ base de E

Autorisé :

$\hat{C}$ (cos, sin, exp) base de E, soit $f : E \to \mathbb{R}$ l'AL définie par

$$f(\cos) = 3$$
$$f(\sin) = \sqrt{2}$$
$$f(\exp) = 42$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$
  Soient $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$
  Soit $\varphi : \mathbb{R}_N[X] \to \mathbb{R}$ l'AL défini par :

  n+1 coeff

$$\varphi(1) = a_0$$
$$\varphi(X) = a_1$$
$$\varphi(X^N) = a_N$$

En effet, $(1, X, X^2, \dots X^N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$

Prop : E, F ev, $(x_1, \dots, x_p)$ base de E

$$\forall (y_1, \dots, y_p) \in F^p, \exists! f \in L(E,F) : \forall i \in [\![1,p]\!], f(x_i) = y_i$$

Démo :

- Unicité : C'est la prop précédente
- Existence : Soit $(y_1, \dots, y_p) \in F^p$
  On veut définir $f : E \to F$
  Soit $x \in E$
  On décompose x dans la base $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$

Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

On pose $f(x) := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$

On a donc défini

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ \underbrace{x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i}_{\text{cette écriture est unique}} & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i \end{array}$$

On vérifie que:

- f est bien définie
- f est linéaire

On a bien $\forall i$, $f(x_i) = y_i$

Rq : On sait que $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array}$

est bijective. Donc on dispose de $\Phi^{-1} : E \to \mathbb{K}^p$
donc on a " $\Phi^{-1}(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ " les coordonnées de x dans $(x_1, \dots, x_p)$
donc " $\forall i$, $p_i \circ \Phi^{-1}(x) = \lambda_i$ "

On pose $f = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{p_i \circ \Phi^{-1}}_{E \to \mathbb{K}} \cdot y_i$

Prop : E, F ; $(x_1, \dots, x_p)$ base

Alors : $\Psi : \begin{array}{rcl} L(E, F) & \longrightarrow & F^p \\ f & \longmapsto & (f(x_1), \dots, f(x_p)) \end{array}$

1°) est bijective
2°) est linéaire
3°) est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev

démo : 1°) injectivité cf 1)

En effet, $\Psi(f) = \Psi(g) \iff f$ et g coïncident sur la base

surjectivité = 2)

2°) Ψ est linéaire

ie $\forall f, g \in L(E,F)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\Psi(f + \lambda g) = \Psi(f) + \lambda \Psi(g)$$

3°) A

4°) Définiθ d'une AL sur une somme directe

Principe : E, E' ev ; F, G sev E tq $F \oplus G = E$

alors pour définir $f \in L(E, E')$, il suffit de définir

$g : F \to E'$ linéaires
$h : G \to E'$

et de décréter que $\begin{cases} f = g \text{ sur } F \\ f = h \text{ sur } G \end{cases}$

Prop : $E = F + G$; $f, g \in L(E, E')$

$$\left.\begin{aligned} f|_F &= g|_F \\ f|_G &= g|_G \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = g$$

démo : ?

Prop : $E = F \oplus G$
Soit $g \in L(F, E')$
Soit $h \in L(G, E')$

Alors $\exists ! f \in L(E, E') : \begin{cases} f|_F = g \\ f|_G = h \end{cases}$

Prop : Bilan $E = F \oplus G$

$$\psi : \begin{array}{ccc} L(E, E') & \to & L(F, E') \times L(G, E') \\ f & \mapsto & (f|_F, f|_G) \end{array}$$

ψ est un isomorphisme

VI. Applications linéaires et familles

Prop : $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ **base de** E
$f \in L(E, F)$

Alors :
1) f injective $\Leftrightarrow (f(x_1), \dots, f(x_p))$ libre

2) f surjective $\Leftrightarrow (f(x_1), \dots, f(x_p))$ génératrice de F

3) f bijective $\Leftrightarrow (f(x_1), \dots, f(x_p))$ base de F

Démo :

1) $\Rightarrow$ Oq f inj. Mq $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ libre

Canevas Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) = 0_F$

Mq $\forall i, \lambda_i = 0$

On a $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = 0_F = f(0_E)$

Č f inj, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$

Or $(x_i)_i$ est une base. Donc $\forall i, \lambda_i = 0$

$\Leftarrow$ Oq $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ libre

Mq f est injective   R^x : On calcule $\operatorname{Ker}(f)$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$

R^x : on décompose x dans la base

Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

On a $\underbrace{f(x) = 0_F}_{x \in \operatorname{Ker} f} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

Č $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ est libre : $\forall i, \lambda_i = 0$

donc $x = 0$ donc f est injective

2) ? !! cno important

3) ok

? lié au V

Soit $\Phi : M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow L(M_{p,1}(\mathbb{K}), M_{n,1}(\mathbb{K}))$ ie $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

$A \longmapsto u_A$

Mq Φ est un isomorphisme

Correction de l'exercice :

1°) Φ est linéaire

Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Mq $u_{A+\lambda B} = u_{A+\lambda B}$

Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

Mq $u_{A+\lambda B}(X) = u_A(X) + \lambda u_B(X)$

C'est vrai car $(A+\lambda B)X = AX + \lambda(BX)$

2°) Mq Φ est injective

Q R* On calcule $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ tq $u_A = 0$

On a donc $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, $u_A(X) = 0_{n,1}$

Q On particularise en $X = \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_p$

On a $A\mathcal{E}_j = 0_{n,1}$ si $j \in [\![1, p]\!]$

Ie : $\forall j$, $C_j(A) = 0_{n,1}$

donc $A = 0_{n,p}$

CCL : Φ est injective

3°) Mq Φ est surjective

Soit $f \in \mathcal{L}(M_{p,1}(\mathbb{K}), M_{n,1}(\mathbb{K}))$

On cherche A tq $f = u_A$

Analyse :

Supposons qu'on ait trouvé un tel A

On a $u_A = f$

ie on a $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, $u_A(X) = f(X)$

En particulier, on a $\forall j$, $u_A(\mathcal{E}_j) = f(\mathcal{E}_j)$

Donc, on a $\forall j$, $C_j(A) = f(\mathcal{E}_j)$

Synthèse :

On pose $A := \left(f(\mathcal{E}_1) \mid f(\mathcal{E}_2) \mid \dots \mid f(\mathcal{E}_p) \right) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Alors $u_A(\cdot)$ et $f(\cdot)$ coïncident sur $(E_j)_{1\leq j\leq p}$: on a bien
$\forall j, u_A(E_j) = f(E_j)$
CCL : $u_A = f$

2) Caractérisation des automorphismes de $\mathbb{K}^n$

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ie $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$
Alors, f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective

Démo :

- Csq f injective
D'après 1) : $(f(E_1), f(E_2), \dots, f(E_p))$ est libre
Or dans $\mathbb{K}^n$, une famille libre de bonne taille est une base (II, 4), c))
D'après 1), on a donc : f isomorphisme

- De m̂ : f surjective $\Rightarrow$ f bijective
car une famille génératrice de bonne taille est une base

Rq : On a : résultat de dénombrement

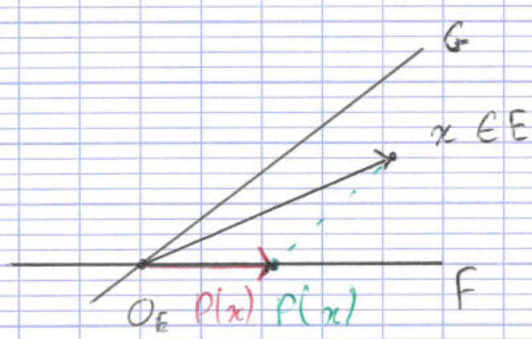
Prop : Soit E un ensemble fini
Soit $f : E \to E$
Alors f bij $\iff$ f inj $\iff$ f surj

VII. Projecteurs et symétries

1) Définition

Déf : Soit E ev, soient F, G sev E tq $E = F \oplus G$

Dessin :



les flèches sont facultatives

Le projecteur de E, sur F, parallèlement à G est l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{aligned} E &\to E \\ x &\mapsto x_F \qquad \text{où } x = x_F + x_G \end{aligned}$$

Rq : le projecteur sur F, parallèlement à G est l'unique endo p de E vérifiant :

$$p|_F : \begin{aligned} F &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned} \qquad p|_G : \begin{aligned} G &\to E \\ x &\mapsto 0_E \end{aligned}$$

Fait : $E = F \oplus G$

Notons p le proj sur F $/\!/^{t}$ à G

alors 1°) $\forall x \in F, p(x) = x$

2°) $\forall x \in G, p(x) = 0$

démo :

1°) Soit $x \in F$
On le décompose selon $E = F \oplus G$
On a $x = x_{\in F} + 0_{\in G}$
donc $p(x) = x$

R^x : $p(\cdot)$ sélectionne la composante dans F

2°) De même, si $x \in G$, on a $x = 0_{\in F} + x_{\in G}$

donc $p(x) = 0_E$

Exemple : $M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})$

Notons p le proj de $M_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ //^{t} à $A_n(\mathbb{R})$
On a $\forall M \quad p(M) = \dfrac{M+M^T}{2}$

2) Propriétés des projecteurs

R^x très intéressant
On a $\forall x \in F, \, p(x) = x$
(ie tous les éléments de F sont des points fixes de $p(\cdot)$)

Ie on a : $\forall x \in F, \; p(x) - x = 0_E$
ie $\forall x \in F, \; (p - Id_E)(x) = 0_E$

ie $F \subset Ker\,(p - Id_E)$

Fait : Soient E ev et $f \in L(E)$ alors

$$\{\text{points fixes de } f(\cdot)\} = Ker\,(f - Id_E)$$

Proposition :

$E = F \oplus G$

Notons p le proj sur F $//^t$ à G. Alors :

1°) $Ker(p) = G$

2°) $Im(p) = Ker(p - Id_E) = F$

3°) $p \circ p = p$

démo :

1°) On vient de voir que $G \subset Ker(p)$

Soit $x \in Ker(p)$. On écrit $x = x_F + x_G$

avec $\begin{cases} x_F \in F \\ x_G \in G \end{cases}$

Par déf de p, on a $p(x) = x_F$

Ici, $p(x) = 0_E$, donc $x = x_G$, donc $x \in G$

2°) Mq $Im(p) = Ker(p - Id_E)$ par double-inclusion

. Mq $Im(p) \subset Ker(p - Id_E)$

Soit $y \in Im(p)$. Soit donc $x \in E$ tq $y = p(x)$

On écrit $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$

On a $y = p(x) = x_F \in F$

Or, on a vu que $F \subset Ker(p - Id_E)$

Bilan : $Im(p) \subset F \subset Ker(p - Id_E)$ (*)

. Mq $Ker(p - Id_E) \subset Im(p)$

Soit $x \in Ker(p - Id_E)$

On a $p(x) = x$ ie $x = p(x)$

donc $x \in Im(p)$

D'après (*), on a bien $F = Im(p) = Ker(p - Id_E)$

3°) Mq $p \circ p = p$

Soit $x \in E$ qu'on écrit $x = x_F + x_G$ avec $\begin{cases} x_F \in F \\ x_G \in G \end{cases}$

On a $p(x) = x_F$

donc $p(x) \in F$

Or F est composé unique^t de points fixes

donc $p(p(x)) = p(x)$

ie $p \circ p = p$ Rq : $p^2 = p$

3) Caractérisation des projecteurs !!

Proposition : Soit $p \in L(E)$ tq $p^2 = p$
alors "p est un projecteur"

Plus précisément,

1°) $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$ QR*

2°) p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ $//^t$ à $\mathrm{Ker}(p)$

Démo :

1°) . Mq $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont en somme directe

Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p)$

Soit donc $x \in E$ tq $y = p(x)$

On a $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$

De plus, $y \in \mathrm{Ker}(p)$ donc $p(y) = 0_E$

Ie $y = 0_E$

2°) Mq $Ker(p) + Im(p) = E$

R° analyse synthèse

Soit $x \in E$

On cherche $x_k \in Ker(p)$ et $qqch \in E$ tq

$$x = x_k + p(qqch)$$

donc $p(x) = 0 + p^2(qqch)$

Or $p^2 = p$

donc $p(x) = p(qqch)$

Bilan : $p(qqch) = p(x)$, x_k est connu

Synthèse :

On pose $x_k := x - p(x)$

On a $x = x_k + p(x)$

Mq $x_k \in Ker(p)$

$p(x_k) = p(x) - p^2(x) = 0$ car $p^2 = p$

3°) On note q le projecteur sur $Im(p)$ $//^t$ à $Ker(p)$

Mq $p = q$

Deux preuves

1/ On a $E = Ker(p) \oplus Im(p)$

Or, deux AL qui coincident sur chacun des facteurs d'une somme directe sont égales

. sur $Ker(p)$

. p est nul

. q est nul cf 2) (on a $Ker(q)$ = l'espace $//^t$ auquel on projette $\to Ker(p)$)

ie $\forall x \in Ker(p)$, $p(x) = q(x)$ $(= 0_E)$

. sur $\mathrm{Im}(p)$

. q vaut "l'identité" sur $\mathrm{Im}(p)$

cf 2) l'espace sur lequel on projette est uniquement composé de pts fixes

. pour p

Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$ Soit donc $x \in E$ tq $y = p(x)$

On a $p(y) = p(p(x)) = p^2(x) = p(x) = y$

Bilan : $\forall y \in \mathrm{Im}(p), p(y) = q(y) \; (= y)$

CCL : $p = q$

2/ Autre preuve

Soit $x \in E$

$\hat{C}$ $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, soit $\begin{cases} qqch \in E \\ x_k \in \mathrm{Ker}(p) \end{cases}$

tq $x = \overbrace{x_k}^{\in \mathrm{Ker}(p)} + p(qqch) \in \mathrm{Im}(p)$: sélectionné par $q(.)$

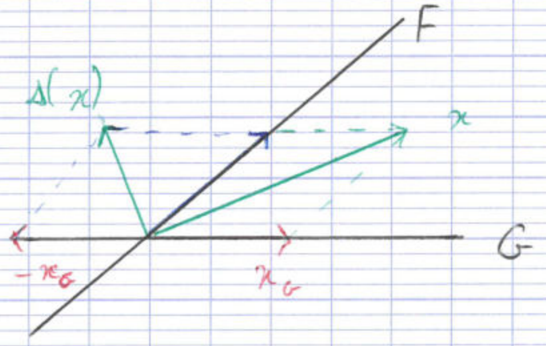
Mq $p(x) = q(x)$

On a $p(x) = p(x_k + p(qqch)) = p^2(qqch) = p(qqch)$

et $q(x) = p(qqch)$

4) Symétries

<u>Déf</u> : $E = F \oplus G$



La symétrie d'axe F $\parallel^t$ à G est
l'endomorphisme $s \in L(E)$ définie par :

$$s : E \to E$$
$$x \mapsto x_F - x_G \quad \text{où } x = x_F + x_G$$

Propriétés :

1°) $F = \mathrm{Ker}\,(s - Id_E)$
2°) $G = \mathrm{Ker}\,(s + Id_E)$
3°) $s \circ s = Id_E$

démo : ?

Prop :
Soit $s \in L(E)$ tq $s^2 = Id_E$
Alors " s est symétrie "

1°) $\mathrm{Ker}\,(s - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + Id_E) = E$

2°) s est symétrie d'axe $\mathrm{Ker}\,(s - Id_E)$ $\parallel^t$ $\mathrm{Ker}\,(s + Id_E)$

démo : exo ?