Chapitre 17 : Limites et comparaisons

1) Si $f : I \to \mathbb{R}$, on va définir $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

ℓ peut être pris dans $\overline{\mathbb{R}}$

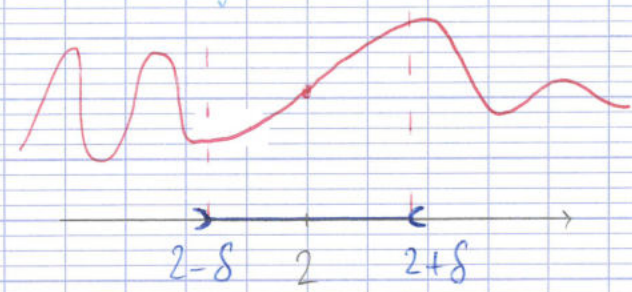
a peut être pris dans $\overline{I}$

Ex : $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$

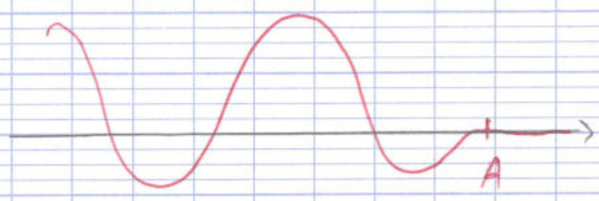
On a $0 \in \overline{]0, +\infty[}$
$+\infty \in \overline{]0, +\infty[}$

on a $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $f \xrightarrow[0]{} +\infty$

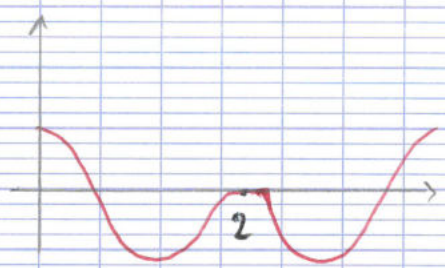
2) Dessinons $f \nearrow$ au $v(2)$



Dessinons $f = 0$ au $v(+\infty)$
ie $f = 0$ à partir d'un certain réel



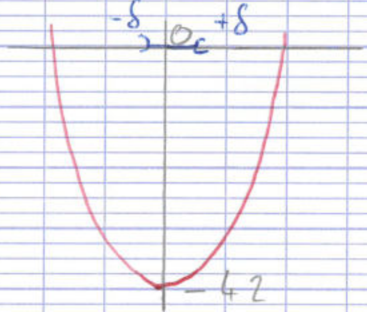
⚠ $f = 0$ au $v(2)$ $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $f(2) = 0$



On a $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f = 0$ au $v(2) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(2) = 0$

Rcpq fausse

3) Dessinons $x^2 - 42$



" $x \mapsto x^2 - 42$ n'est pas monotone au $v(0)$ "

on a non ($x \mapsto x^2 - 42$ est monotone au $v(0)$)

4) f. 4

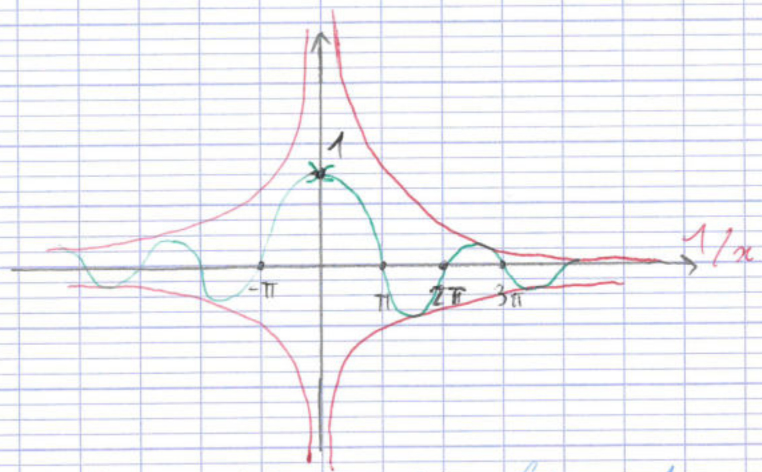
5) $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$

$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$

6) Dessinons $\frac{\sin(x)}{x}$

On a $\frac{\sin(x)}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 1$ (taux d'accroissement)



On module $\sin(x)$ par l'amplitude $\frac{1}{x}$

On a $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$

On a $f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 1$

donc on prolonge f en $\tilde{f}$ en posant $\tilde{f}(0) = 1$

ie $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

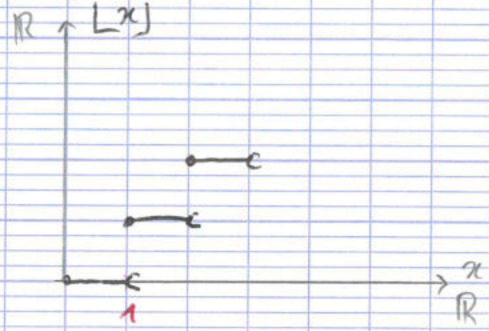
On dit qu'on a prolongé f par continuité en 0.

7) Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et si $a \in I$ ie si f est déf en a

$\forall \varepsilon > 0$, $|f(a) - l| \leq \varepsilon$ donc $l = f(a)$

car $x := f(a)$ vérifie 1°) $x \in I$
2°) $|x - a| \leq \delta$

8) Exemple de la partie entière



On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \lfloor x \rfloor = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \lfloor x \rfloor = 0$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ ssi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

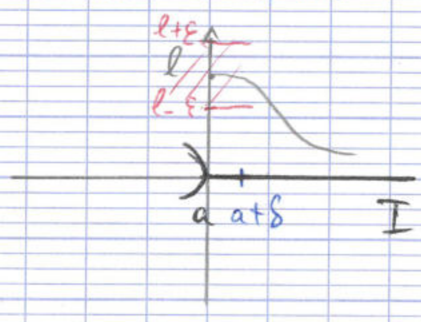
10) On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$

⚠ on ne définit pas $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$

On dira à la place 1°) $\dfrac{1}{x} \to 0$

2°) $\dfrac{1}{x} > 0$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

11) Soit $f : I \to \mathbb{R}$
Soit $a \in \bar{I}$
Soit $l \in \mathbb{R}$ limite finie tq $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$
Mq f est bornée au $\mathcal{V}(a)$
1°) Osq $a \in \mathbb{R}$



On pose $\varepsilon := 1 > 0$
Soit donc $\delta > 0$ tq
$$\forall x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

? " $|f(x)| \leq \dots$ "

inégalité triangulaire renversée:
$$\text{On a } |f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On a $\forall x \in I \cap]a-\delta ; a+\delta[, \ |f(x)| \leq |\ell| + |f(x) - \ell| \leq \underbrace{|\ell| + \varepsilon}_{= |\ell|+1}$

donc $\exists \delta > 0 : f|_{I \cap]a-\delta ; a+\delta[}$ bornée

Ie f est bornée au $v(a)$

2°) $a = \pm\infty$

12) Oq $f(x) \underset{x \to a}{\to} \ell_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\to} \ell_2$

Mq $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$

démo: Soit $\varepsilon > 0$
$\bar{c}$ $f \underset{a}{\to} \ell_1$, soit $\delta_1 > 0$ tq $\forall x \in I, |x-a| \leq \delta_1$
$$\Rightarrow \ell_1 - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell_1 + \varepsilon$$
$\bar{c}$ $g \underset{x}{\to} \ell_2$, soit $\delta_2 > 0$ tq $\forall x \in I, |x-a| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon$

On pose $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. on a $\delta > 0$
Soit $x \in I$ tq $|x-a| < \delta$
On a $|x-a| < \delta_1$ donc $\ell_1 - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell_1 + \varepsilon$

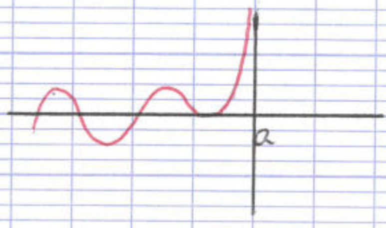
. $|x-a| \leq \delta_2$ donc $l_2 - \varepsilon \leq g(x) \leq l_2 + \varepsilon$

d'où $(l_1+l_2) - 2\varepsilon \leq f(x)+g(x) \leq (l_1+l_2)+2\varepsilon$

13) $\left.\begin{array}{l} f : I \to J \\ g : J \to \mathbb{R} \\ x \in \overline{I} \\ b \in \overline{J} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ \\ g(X) \xrightarrow[X\to b]{} l \end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$

démo : 3 cas pour a, 3 cas pour b, 3 cas pour l

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$



Mq $g\circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

ie $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in I$, $|x-a| \leq \delta \Rightarrow g(f(x)) > A$

Soit $A \in \mathbb{R}$

On sait que $g(X) \xrightarrow[X\to b]{} +\infty$.

(*)

Soit donc $\forall X \in J$, $\boxed{|X-b| \leq \delta} \Rightarrow g(X) > A$ 1)

Or $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ et $\delta > 0$

Soit donc $\delta' > 0$ tq $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \delta' \Rightarrow |f(x)-b| \leq \delta$

Soit $x \in I$ tq $|x-a| \leq \delta'$, on a $|f(x)-b| \leq \delta$

on utilise dans (*)

On pose $X := f(x)$

On a 1°) $X \in J$ car $f : I \to J$

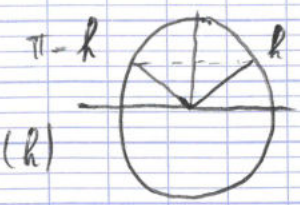
2°) $|X-b| \leq \delta$

donc d'après 1), on a $g(X) \geq A$ ie $g(f(x)) \geq A$

Ainsi, on a $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta' > 0 : \forall x \in I, |x-a| \leq \delta'$
$\Rightarrow g \circ f(x) \geq A$

Compétence pratique

14) !! Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\pi - x}}$



QR*

On pose " $x = \pi - h$ "
On définit $g(h) = \dfrac{\sin(\pi - h)}{\sqrt{\pi - (\pi - h)}}$ $= \sin(h)$

$= \dfrac{\sin h}{\sqrt{h}}$

$= \underbrace{\sqrt{h}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}^{h \to 0} \cdot \dfrac{\sin h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$

Bilan : $g(h) \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$

ie $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\pi - x}} \xrightarrow[\substack{x \to \pi \\ <}]{} 0$

15) $u_n \to +\infty$
Alors $\ln(u_n) = o(u_n)$

démo : On a $\dfrac{\ln(X)}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$

et $u_n \to +\infty$

donc par composition des limites :

$$\frac{\ln(u_n)}{u_n} \xrightarrow[u_n \to \infty]{} 0$$

ie $\ln(u_n) = o(u_n)$

16) $\cos(\cdot)$ n'a pas de limite en $+\infty$

On raisonne par l'absurde. Oq $\exists\, l \in \mathbb{R} : \cos(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$

Fixons un tel l

. Zéros de $\cos(\cdot)$

$\forall x$, $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $x_n := \frac{\pi}{2} + n\pi$

on a $x_n \to +\infty$

ie par composition des limites, $\cos(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$

donc $l = 0$

. Uns de $\cos(\cdot)$

$\forall x$, $\cos(x) = 1 \iff x \equiv 0\ (2\pi)$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $y_n = 0 + n\,2\pi$

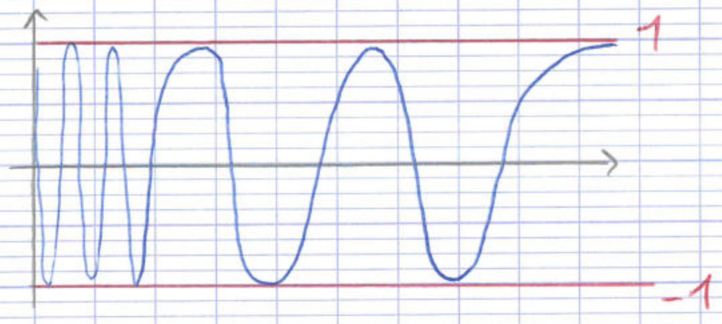
On a $\forall n$, $\cos(y_n) = 1$ et $y_n \to +\infty$

Par composition des limites, $\cos(y_n) \to l$

donc $l = 1$: absurde

Rq : ? Cas d'une fct T-périodique quelconque

. Mq $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$ n'a pas de limite en 0^+



On raisonne par l'absurde

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tq $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \ell$

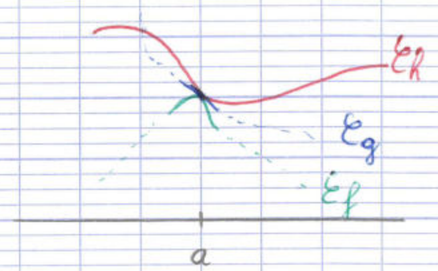
Or $\dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc par composition, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

Or, pour $x > 0$: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \cos\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \cos(x)$

donc $\cos(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$: absurde d'après la démo précédente

17) ⚠ Ce qui suit est incorrect



- $f \leq g \leq h$ au $\mathcal{V}(a)$
- $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$
- $h \underset{a}{\longrightarrow} \ell$

La ccl du thm des gendarmes n'est pas : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

Mais : " $g(\cdot)$ admet une limite en a qui vaut ℓ "

donc $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell$

18) Rétropassage à la limite

Orq $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$; $a \in \bar{I}$, $M \in \mathbb{R}$

alors , $f(x) \geq M$ au $v(a) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) \geq M$

En contraposant, on a : (*) $\lim\limits_{x \to a} f(x) < M \Rightarrow$ non $\left(f(x) \geq M \text{ au } v(a) \right)$

⚠ ce n'est pas pareil que
$f(x) < M$ au $v(a)$

Contre-exemple : $\cos(\cdot)$ au $v(+\infty)$

. A-t-on $\cos(x) \geq 0$ au $v(+\infty)$

NON

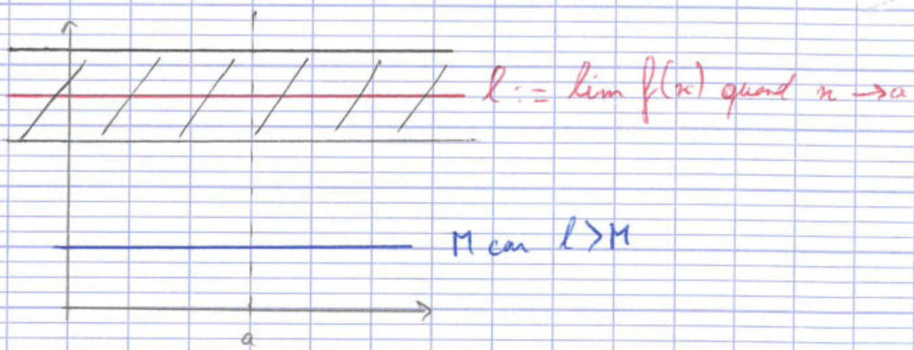
. donc on a non $(\cos(x) \geq 0$ au $v(+\infty))$ qui est vraie

. mais $\cos(x) < 0$ au $v(+\infty)$ est FAUX

On peut faire les mieux que (*)

Prop : on a

. $\lim\limits_{x \to a} f(x) > M \Rightarrow f(x) > M$ au $v(a)$



démo : On pose $\varepsilon := \frac{\ell - M}{2} > 0$

Soit donc $\delta > 0$ (cas $a \in \mathbb{R}$)

tq $\left.\begin{array}{l} x \in I \\ |x-a| \leqslant \delta \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

$x \in I \cap [a-\delta ; a+\delta]$

$\Rightarrow f(x) \geqslant \ell - \varepsilon$

je garde juste une des $\leqslant$

$= M + \varepsilon > M$

astuce : pas besoin de calcul, on peut faire sur le dessin

b) on a bcp mieux :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) > M \Rightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0 : f(x) \geqslant M + \varepsilon_0$ au $v(a)$

19) Mq $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 0$

R^x : 1) on majore $|f(x)| \leqslant$

2) mieux on majore par qqch qui tend vers 0

3) ie $|f(x)| \leqslant \dots \leqslant \varepsilon(x)$

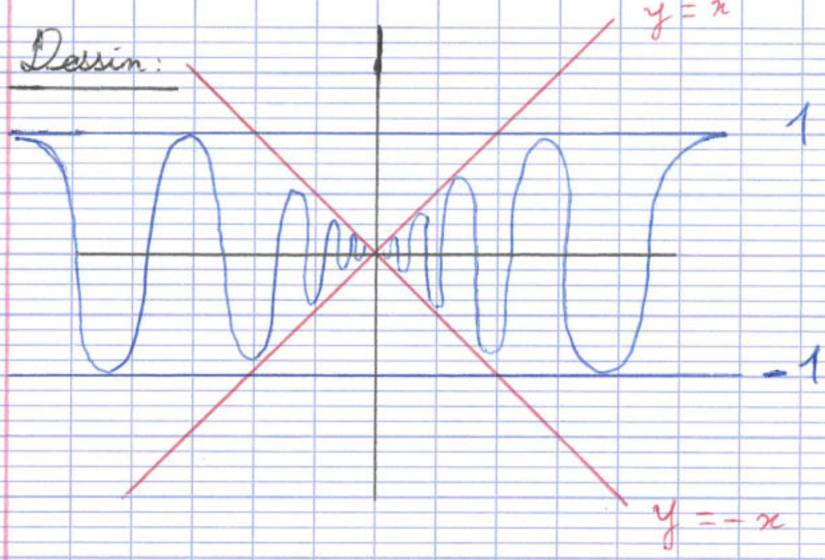
avec $\varepsilon(x)$ "simple" et $\varepsilon(x) \to 0$

Soit $x \neq 0$

On a $\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant |x|$ car $|\sin| \leqslant 1$

Or $x \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ donc $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 0$

Dessin :



Calcul des limites en $\pm\infty$

. R^x : on a $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

En effet, on a $\sin(h) \underset{h\to 0}{\sim} h$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim 1$ ie $x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

. En $-\infty$

!! $x \mapsto x$ est impaire

$x \mapsto \frac{1}{x}$ impaire

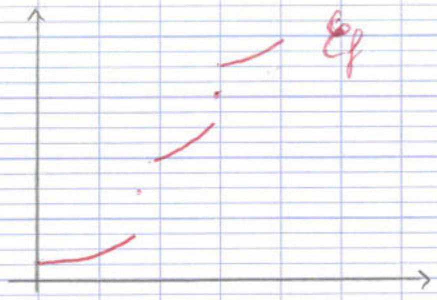
$\sin(\cdot)$ impaire

$\left.\right\}$ $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ impaire

⚠ impair × impair = pair

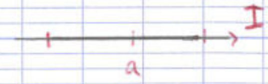
donc $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ paire

20) Théorème de la limite monotone



f est croissante

. si $a \in \mathring{I}$, on peut dessiner

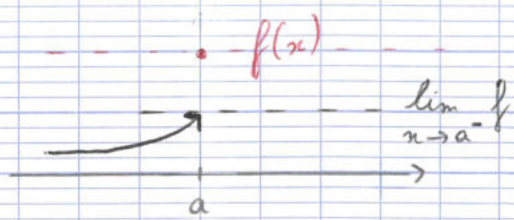


On a : $\exists \delta > 0 :]a-\delta ; a+\delta[\subset I$

(ct : $I = [0,1]$ et $a = 0$
on n'a pas $\exists \delta > 0 :]a-\delta ; a+\delta[\subset I$
si $a \in \mathring{I}$: c'est ok)

Bilan : si $a \in \mathring{I}$, on peut tester si $\lim\limits_{a^-} f$ et $\lim\limits_{a^+} f$ $\exists$

Mq $\lim\limits_{a^-} f$ existe



On considère $l := \sup \left\{ f(x) \;\middle|\; \begin{matrix} x \in I \\ x < a \end{matrix} \right\}$

Existence ?

. c'est $\neq \emptyset$
on a $\exists x < a : x \in I$ (car $a \in \mathring{I}$)

. c'est majoré
En effet, si $x \in I$ tq $x < a$ alors $x \leq a$
et donc $f(x) \leq f(a)$

Bilan : ℓ existe et $\ell \leq f(a)$

Mq $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell$

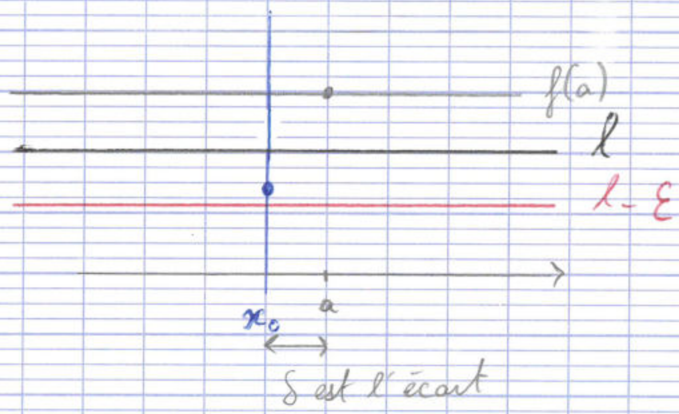
Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tq (...)

On utilise la caractérisation à la $\varepsilon > 0$ du sup

$$\exists\, x_0 \in I : \begin{cases} x_0 < a \\ \ell - \varepsilon < f(x_0) \leq \ell \end{cases}$$

On fixe un tel x_0

Dessin :



On pose $\delta := a - x_0 > 0$

Soit $x \in I$ tq

1°) $|x - a| \leq \delta$

2°) $x < a$

On a $x \in [x_0 ; a[$

Ie $x_0 \leq x < a$

Ĉ $f \nearrow$: $\ell - \varepsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq f(a)$

Mais par déf de ℓ, on a aussi $f(x) \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$

. De m̂ : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim\limits_{a^+} f}$

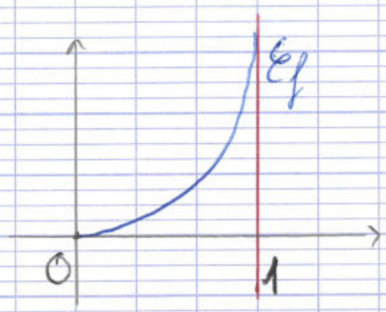
Cas $a \in \bar{I}$ et $a \in I$

Ex : $I =]0,1[$

$a = 1$

dans ce cas si $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ $\nearrow$

alors $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe



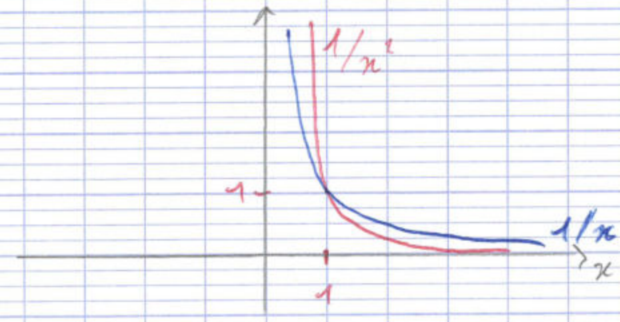
ici $f \xrightarrow[1^-]{} +\infty$

21) On a $\frac{x^2}{5} + 2x + \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{5}$

et $\frac{x^2}{5} + 2x + \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$

et $\frac{x^2}{5} + 2x + \frac{1}{x} \underset{1}{\sim} \frac{16}{5}$

22)



. On a $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ donc $\frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$

. On a $x^2 \underset{0}{=} o(x)$

donc $\frac{1}{x} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

23) Exo : Trouver un équivalent de $\ln(x)$ en 1

💡 Méthode !! : On pose $x := 1+h$
on se ramène à un problème en 0

On pose $g(h) = \ln(1+h)$
on a $g(h) \sim h$

Par composition, $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$

24) $$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ \psi(h) \underset{h\to b}{\longrightarrow} a \end{array}\right\} f(\psi(h)) \underset{h\to b}{\sim} g(\psi(h))$$

Exemple : On a $e^x \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x - x^2$

1°) on a $2x \to +\infty$ donc $e^{2x} \underset{+\infty}{\sim} e^{2x} - 4x^2$

2°) $\frac{1}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$

CCL : $e^{\frac{1}{h}} \underset{h\to 0^+}{\sim} e^{\frac{1}{h}} - \frac{1}{h^2}$

25) Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x - \sqrt{1+x} - \frac{1}{1+x}}{x}$

C'est une FI : On a $2e^x \to 2$; $\sqrt{1+x} \to 1$
$\frac{1}{1+x} \to 1$

$\mathbb{Q}R^x$ DL

On écrit : $2e^x - \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{1+x}$

$= 2\left(1 + x + o(x)\right) - \left(1 + \dfrac{x}{2} + o(x)\right) - \left(1 - x + o(x)\right)$

$= 2x - \dfrac{x}{2} + x + o(x)$

$= \dfrac{5}{2} x + o(x)$

Bilan : $2e^x - \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{1+x} \sim \dfrac{5}{2} x$

et $\dfrac{2e^x + \sqrt{1+x} - \frac{1}{1+x}}{x} \xrightarrow[0]{} \dfrac{5}{2}$

26) On a $2n^2 = o(2^n)$

donc $2n^2 \leq 2^n$ APCR

ie : $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 , 2n^2 \leq 2^n$

Fait : $f, g > 0$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{2} \leq g(x)$ au $v(+\infty)$

$\left. f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \right\} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{2} \leq g(x)$ au $v(a)$