Chapitre 18

Continuité

Bernard Bolzano
(1781 – 1848)

Karl Weierstrass
(1815 – 1897)

Bolzano

La notion de fonction continue a mis du temps à émerger. C'est à Bolzano, un prêtre et mathématicien hongrois d'origine italienne, qu'on la doit :

$$f \text{ est continue en } a \overset{\Delta}{\text{ssi}}$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Weierstrass

Attention, l'ensemble des fonctions continues contient des fonctions qui peuvent être très compliquées. Weierstrass (mathématicien allemand qui poursuivit le travail de fondation de l'analyse moderne) construisit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue mais qui n'est nulle part dérivable !

Chapitre 18 : Continuité

I, Continuité

1) Définitions

I est un intervalle tq $\ell(I) > 0$

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$
Soit $a \in I$ (ie f est définie en a)

On dit que f est continue au point a ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

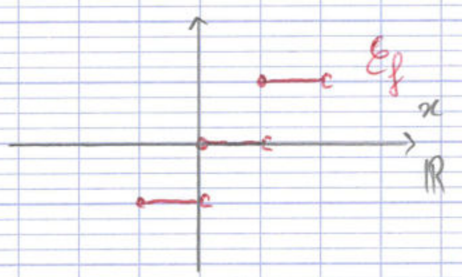
Ie : quand x est très proche de a, $f(x)$ est très poche de $f(a)$

Rq : on notera f C^0 en a
On a f C^0 en $a \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$

$\Leftrightarrow f$ admet une limite en a

Exemple :
Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \lfloor x \rfloor$

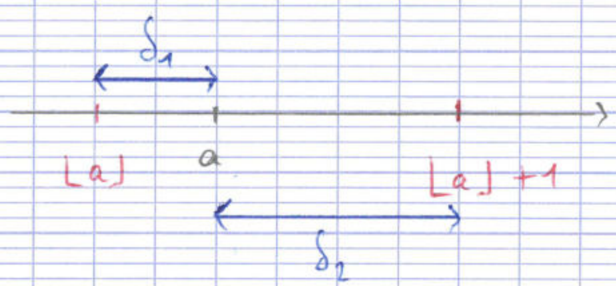
On dessine



Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

- f est c^0 en a
- mieux : $f = f(a)$ au $v(a)$

ie $\exists \delta > 0 : \forall x \in]a-\delta ; a+\delta[, \ f(x) = f(a)$



On pose $\delta := \min\left(a - \lfloor a \rfloor ; \lfloor a \rfloor + 1 - a \right)$

On a $]a-\delta ; a+\delta[\subset \underbrace{\left[\lfloor a \rfloor ; \lfloor a \rfloor + 1 \right]}_{f \text{ est cste sur cet intervalle}}$

. Si $a \in \mathbb{Z}$, on a
$$f(x) \xrightarrow[x \to a^<]{} \lfloor a \rfloor - 1$$
$$f(x) \xrightarrow[x \to a^>]{} \lfloor a \rfloor$$

donc, $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow f$ pas c^0 en a

Def : Soit $f : I \to \mathbb{R}$
On dit que f est continue sur I ssi
$\forall a \in I$, f continue en a

L'ens des f° continues de I dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

Rq : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On a $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
$\Leftrightarrow \forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Rq : On voit que pour être ε-proche de $f(a)$, il suffit d'être δ-proche de a

MAIS : δ a priori dépend de a

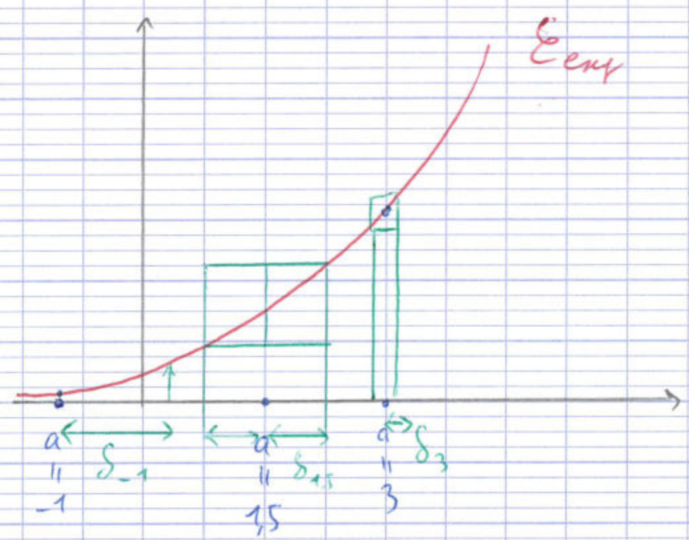
ie . pour certains a, il faut δ extrêmement petit

. pour d'autres a, des δ moyennement petits suffisent

Ex : $f = \exp$

$\varepsilon = 0{,}5$

on note δ_a le meilleur δ dans la déf de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ associée à ε



$$\left(\delta_a(\varepsilon) := \sup \left\{ \underbrace{\begin{matrix} \delta > 0 \\ \text{et } \delta \leq 1 \end{matrix}}_{\delta \in]0,1]} \;\middle|\; \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \right\} \right)$$

On veut $\forall \varepsilon > 0$, $\begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ a \mapsto \delta_a(\varepsilon) \end{matrix}$ soit minorée par un nombre >0

. Si f est dérivable, il suffit que f' bornée

. On veut

$$\forall \varepsilon>0, \underbrace{\bigcap_{a\in I}\left\{\delta>0 \mid \forall x\in I, |x-a|\leq\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|\leq\varepsilon\right\}}_{\neq\emptyset \text{ car } f \ c^0 \text{ en } a} \neq \emptyset$$

<u>Déf</u>: Soit $f : I \to \mathbb{R}$
On dit que f est uniformément continue ssi

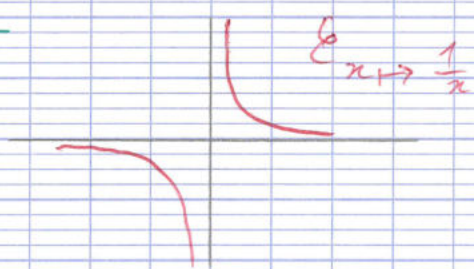
$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \forall a\in I, \left(\forall x\in I, |x-a|\leq\delta \Rightarrow |f(a)-f(x)|\leq\varepsilon\right)$$

Rq : Si Ω est une union disjointe d'intervalles, on définit de même $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$

ex : $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}^*, f$ est c^0 en a

<u>Fait</u> : La continuité est une propriété locale
Soit $f : I\to\mathbb{R}$
Alors : $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall a\in I, f$ est c^0 au $v(a)$
$\Leftrightarrow \forall a\in I, \exists\delta>0 : f_{|I\cap]a-\delta;a+\delta[}$ est c^0

<u>Exemple</u> :



la fct : $\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$
$x\mapsto\frac{1}{x}$
est continue !!

2) Prolongement par continuité

Déf : Soit $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$
Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$
telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x)$ existe et est finie

Alors la fonction $\tilde{f} : I \cup \{a\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{\substack{t \to a \\ \neq}} f(t) & \text{si } x = a \end{cases}$$

est appelée prolongement par continuité de f en a

Fait : Dans cette situation, on a :

1) $\tilde{f}$ est continue en a
2) si $f \in \mathcal{C}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R}) \Rightarrow \tilde{f} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

Exemples :

. $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$

On a $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $\varphi(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} 1$

On prolonge φ en $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $\tilde{\varphi}(0) = 1$
On a $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\tilde{\varphi}|_{\mathbb{R}^*} = \varphi$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$
  Soit $a \in I$
  On définit $\tau_{f,a} : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si $x \in I \setminus \{a\}$, $\tau_{f,a}(x)$ est le taux d'accroissement de f entre x et a

Rq : $\tau_{f,a}(x) = \tau_{f,x}(a)$

Si $\tau_{f,a}$ admet une limite finie en a, on dit f est dérivable en a et $\tau_{f,a}$ peut être prolongé en $\widetilde{\tau_{f,a}} : I \to \mathbb{R}$ qui est continue en a

Cas particulier : Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et si f est dérivable, on a $\widetilde{\tau_{f,a}} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

Bilan :

$\exists \varphi \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) : \forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$

$\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$
avec φ $\mathcal{C}^0$ en a

$\varphi = \widetilde{\tau_{f,a}}$

3) !! Caractérisations séquentielles

Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$
Alors f est $\mathcal{C}^0$ en $a \iff \forall (x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, \left(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a) \right)$

Corollaire

Si $x_n \to a$ et si f est c° en a

$\overset{QR^x}{\Rightarrow}$ $f(x_n) \to f(a)$

Ex : $1 + \frac{1}{n} \to 1$ et $\ln(\cdot)$ est c° en 1 $\Big\}$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \ln(1) = 0$

démo :

$\Rightarrow$ Osq f est c° en a

Soit $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to a$

Mq $f(x_n) \to f(a)$

Soit $\varepsilon > 0$

$\hat{c}$ f est continue en a : soit $\delta > 0$ tq

$\forall x \in I, \ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

On a $\delta > 0$ et $x_n \to a$

Soit donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, \ |x_n - a| \leq \delta$

Soit $n \geq N_0$, on a . $|x_n - a| \leq \delta$

. donc $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

CCL : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

$\Leftarrow$ Mq la contraposée

Mq f pas c° en $a \Rightarrow \exists (x_n)_n \in I^{\mathbb{N}} : \begin{cases} x_n \to a \\ f(x_n) \not\to f(a) \end{cases}$

Osq f non C° en a

donc $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists x_0 \in I : \begin{cases} |x_0 - a| \leq \delta \\ |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon_0 \end{cases}$

On fixe un tel $\varepsilon_0 > 0$

On a $\forall \delta > 0, \exists x_0 \in I : \begin{cases} |x_0 - a| \leq \delta \\ |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon_0 \end{cases}$

On séquentialise cette assertion, en posant quand $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n := \frac{1}{n}$

On obtient $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}^*}$ tq

. $\forall n \geq 1, |x_n - a| \leq \frac{1}{n} \leftarrow \delta$

. $\forall n \geq 1, \left| f(x_n) - f(a) \right| > \varepsilon_0$

Bilan : on a : $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^*} a$

Si on avait $f(x_n) \to f(a)$ en passant à la limite dans $(*)$, on aurait $0 = |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$

Absurde

donc $f(x_n) \not\to f(a)$

4) Image par une f° c° d'une suite CV

Théorème : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$ tq $u_n \to l$

Si f est une fct c° en l $\Rightarrow$ $f(u_n) \to f(l)$

(et $u_n \in \mathcal{D}_f$ APCR)

Application : Soit $f : I \to I$ une fct continue

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Osq $(u_n)_n$ CV et osq $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \in I$

alors $f(l) = l$ où $l := \lim\limits_{n \to \infty} u_n$

démo : . On a $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ f \ C^0 \text{ en } l \\ l \in I \end{array}\right\}$ donc $f(u_n) \to f(l)$

et $(u_{n+1})_n$ extraite de $(u_n)_n$ donc $u_{n+1} \to l$
Par unicité de la limite, $f(l) = l$

5) Caractérisation séquentielle des limites

Prop : $a \in \overline{I}$ où je regarde les limites au voisinage duquel je me place
$f : I \to \mathbb{R}$; $l \in \overline{\mathbb{R}}$

On a : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \iff \forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, (u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to l)$

démo : identique

6) Opérations sur les fonctions continues

Prop : Soient $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors :

1°) $f + \lambda g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
2°) $fg \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
3°) Si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors $\begin{cases} \frac{1}{g} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ \frac{f}{g} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \end{cases}$

4°) $\forall n \in \mathbb{N}, f^n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
⚠ $f^n = f \times \dots \times f$

Rq : Résultat analogue si f et g sont continues en $a \in I$, alors il en est de m̂ pour $f+g$, fg, etc

démo :

1°) Mq $f+\lambda g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

Soit $a \in I$

Mq $f+\lambda g$ est continue en a

Canevas

Mq $\forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$, $u_n \to a \Rightarrow (f+\lambda g)(u_n) \to (f+\lambda g)(a)$

Soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \to a$

ĉ f est c^0 en a, on a $f(u_n) \to f(a)$

de m̂, $g(u_n) \to g(a)$

On sait alors que $f(u_n)+\lambda g(u_n) \to f(a)+\lambda g(a)$ ce qu'on voulait

2°), 3°), 4°) : même technique

Rq : $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre :

- somme $f+g$
- scalarisation λf
- multiplication c'est $(f,g) \mapsto \begin{pmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{pmatrix}$

donc si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ alors on sait évaluer $P(\cdot)$ en f

On obtient $P(f)$ qui est continue

ex : . $\sin \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
. $P = X^2 + 3$
. alors $P(\sin) = \sin^2 + \tilde{3}$

⚠ l'unité de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est $\tilde{1}$

7) Composition

Prop : Soient I, J deux intervalles

Soit $f : I \to J$ et soit $g : J \to \mathbb{R}$

Alors : $\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

la composée de 2 fonctions continues est continue

Prop : Soient $f : I \to \mathbb{R}$
$g : J \to \mathbb{R}$
tq $\forall x \in I, f(x) \in J$ ie $f(I) \subset J$
Soit $a \in I$

alors $\left.\begin{array}{l} f \ C^0 \text{ en } a \\ g \ C^0 \text{ en } f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \ C^0 \text{ en } a$

Schéma :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] & J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ a \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(a) \arrow[r] & (g \circ f)(a) \end{tikzcd}$$

démo à la $\delta - \varepsilon$: cf 13 du chapitre 17

On veut mq $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} g \circ f(a)$

Or $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$ car f est c° en a

et $g(X) \underset{X \to f(a)}{\longrightarrow} g(f(a))$ car g est c° en a

Par composition des limites, on a :

$$g(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} g(f(a))$$

II, Continuité des fonctions usuelles

1) Les fct constantes

Fait : Soit $c \in \mathbb{R}$ alors $\tilde{c} : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto c \end{array}$

est continue

démo : à la $\delta - \varepsilon$

2) L'identité $Id_{\mathbb{R}}$ est c°

Fait : $Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

démo : . $\delta - \varepsilon$ ($\varepsilon := \delta$ convient)
. si $u_n \to a$ alors $Id_{\mathbb{R}}(u_n) \to Id_{\mathbb{R}}(a)$

Rq : 1) I, J deux intervalles
$f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
alors $J \subset I \Rightarrow f|_J \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$

2) Soient I, J intervalles tq $J \subset I$
Soit $f : I \to \mathbb{R}$
alors $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f|_J \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$

3) Les fonctions polynomiales sont continues

Prop : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
Alors : . $\widetilde{P} \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
. $\widetilde{P}|_I \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

ex : la fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 5x^2 - 42x + 7$
est continue

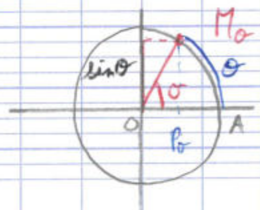
Démo du premier point :
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Mq $\widetilde{P} \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

. On a vu que $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre
. On a gratuitement :
$\forall Q \in \mathbb{R}[X]$ $\quad Q(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

. On a $\widetilde{P} = P(Id_{\mathbb{R}})$ ■

4) Fonctions trigonométriques

Rappel : Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta)$ est l'ordonnée du point $M_\theta \in \mathcal{C}_{trigo}$ dont la mesure angulaire est θ



1) Le plus court chemin entre deux points est la ligne droite

2) donc : la longueur $([AM_\sigma]) \leq$ longueur $(\widehat{AM_\sigma})$

3) ie longueur $([AM_\sigma]) \leq \sigma$

4) On applique Pythagore dans AP_0M_σ rectangle en P_0

5) C'est juste l'inégalité triangulaire
On a longueur $(M_\sigma A) \geq$ longueur $(M_\sigma P_0)$

6) donc $\sin \sigma \leq \sigma$

7) $\forall \sigma \in \mathbb{R}, \ |\sin \sigma| \leq |\sigma|$

Proposition :

$\sin(\cdot)$ est continue en 0

démo : $\mathbb{R}^x$ Si $\forall x, y \in I, \ \underbrace{|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|}_{f \text{ est } C\text{-lipschitzienne}}$

où $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}_+$

Alors f est continue ?

mieux : f est uniformément c^0

Soit $\varepsilon > 0$

Mq $\exists \delta > 0 : \forall x \in]-\delta, \delta[\Rightarrow |\sin(x) - \sin(0)| \leq \varepsilon$

On prend $\delta := \varepsilon$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $|x - 0| \leq \delta$

On a $|x| \leq \delta$

Or $\sin(0) = 0$

On a $|\sin(x) - \sin(0)| = \sin(x) \underset{6)}{\leq} |x| \leq \delta = \varepsilon$

Ainsi, $\sin(\cdot)$ est c° en 0

Lemme 1 : $\sqrt{\cdot}$ est c° en 0

Lemme 2 : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Alors $u_n \to 0 \Rightarrow \sqrt{u_n} \to 0$

On a lemme 2 $\Rightarrow$ lemme 1 par séquentialisation

Démo : Osq $u_n \to 0$,

Mq $\sqrt{u_n} \to 0$

On raisonne par l'absurde

Soit donc $\varepsilon_0 > 0$ tq

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq N : \sqrt{u_{n_0}} \geq \varepsilon_0$$

Mq $u_n \not\to 0$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \geq N$ tq $\sqrt{u_{n_0}} \geq \varepsilon_0$

Or $(\cdot)^2 \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

donc $u_{n_0} \geq \varepsilon_0^2 \geq 0$

Ainsi, $\exists \varepsilon_1 > 0 : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq N : |u_{n_0}| \geq \varepsilon_1$

ABSURDE donc $\sqrt{u_n} \to 0$

$(c'est\ \varepsilon_1 := \varepsilon_0^2)$

Prop : $\cos(\cdot)$ est continue en 0

démo : $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ au $v(0)$
car $\cos(x) \geq 0$ au $v(0)$

et
- $\sin(\cdot)$ c^0 en 0
- donc $\sin^2(\cdot)$ est c^0 en 0
- donc $1-\sin^2(\cdot)$ est c^0 en 0

par opération

- donc $\sqrt{1-\sin^2(\cdot)}$ est c^0 en 0 par composit°

CCL : $\cos(\cdot)$ est c^0 en 0

Lemme !! R^*

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$

Alors

$$f \; c^0 \text{ en } a \iff \underbrace{h \mapsto f(a+h)}_{c^0 \text{ en } 0}$$

Théorème : $\sin \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

démo : Soit $a \in \mathbb{R}$

Mq $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$h \mapsto \sin(a+h)$
est continue en 0

Or, $\forall h \in \mathbb{R}$, $\varphi(h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$

ie $$\varphi = \underbrace{\sin(a) \underbrace{\cos(\cdot)}_{c^0 \text{ en } 0} + \cos(a) \cdot \underbrace{\sin(\cdot)}_{c^0 \text{ en } 0}}_{c^0 \text{ en } 0}$$

Corollaire : $\cos(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

démo : car $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

Corollaire

$$\tan \in \mathcal{C}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \mathbb{R} \right)$$

5) Logarithme

Def : si $x > 0$, on pose

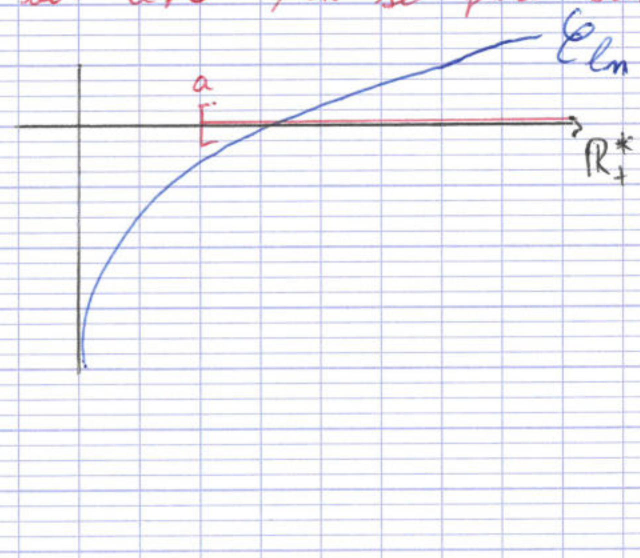
$$\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$$

Prop : $\ln(\cdot)$ est $\mathcal{C}^0$ ie $\ln(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

démo : Soit $x, y > 0$
Osq $x \leq y$

MIEUX : Soit $a > 0$, on se place sur $[a, +\infty[$

Dessin :



Mq $\ln|_{[a,+\infty[} \in \mathcal{E}([a,+\infty[, \mathbb{R})$

$\forall a > 0$, $\ln|_{[a,+\infty[}$ C^0 $\Rightarrow$ $\ln$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$

Def : $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \geq 0$
On dit que f est c-lipschitzienne

ssi $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$

. On dit que f est lipschitzienne ssi
$\exists c \geq 0 : f$ est c-lipschitzienne

Notons $I_a := [a, +\infty[$
Mq $\ln|_{I_a}$ est lip.

Rq : ? Mq f c-lip sur I $\Rightarrow$ f est C^0 sur I $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{c}\right)$

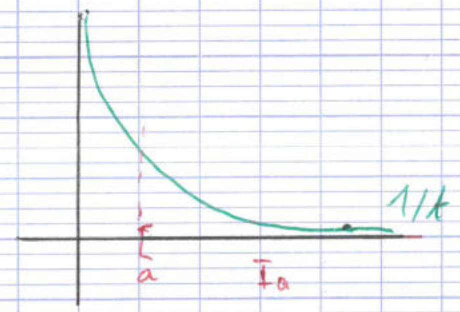
Soit $x, y \in I_a$
Osq $x \leq y$
On veut $|\ln(x) - \ln(y)| \leq c|x-y|$ où c est à déterminer

On a $|\ln(x) - \ln(y)| \underset{\ln(\cdot) \nearrow \text{ car } \frac{1}{\cdot} \geq 0}{=} \ln(y) - \ln(x)$

$= \int_1^y \frac{1}{t}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

$= \int_x^y \frac{1}{t}\,dt$

Or,



$$\forall t \in I_a \ , \ \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{a}$$

donc $\forall t \in \underbrace{[x, y]}_{\subset I_a} \ , \ \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{a}$

car $x, y \in I_a$

Ĉ on intègre ds le bon sens, on a

$$\int_x^y \frac{1}{t}\, dt \leqslant \int_x^y \frac{1}{a}\, dt = \frac{1}{a}(y-x) = \frac{1}{a}|y-x|$$

6) exp est continue

Prop : $\exp \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

démo : . $\ln \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

. exp est la rcp de ln (.)

. thm de la bij. monotone

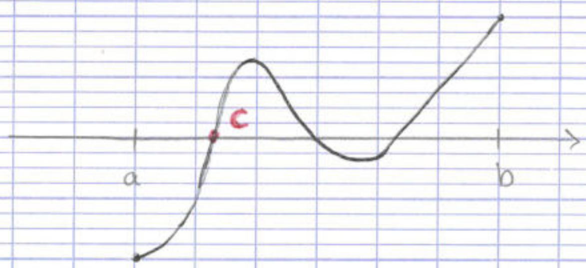
III. Grands théorèmes pour les fonctions continues

1) TVI

a) Lemme

Lemme : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue
Soient $a, b \in I$ tq $a < b$
alors si $\left.\begin{array}{l} f(a) \leq 0 \\ f(b) \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in [a,b] : f(c) = 0$

Dessin



Démo n° 1 :

Osq $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$
Idée : on cherche à définir le 1er zéro de f

On considère $A := \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; \forall t \in [a,x], f(t) < 0 \right\}$

ie on s'intéresse aux "segments initiaux" où f est < 0

1°) A est majorée par b
2°) $b \notin A$ car $f(b) > 0$
3°) $a \in A$ donc $A \neq \emptyset$

On peut donc définir $c := \sup A$

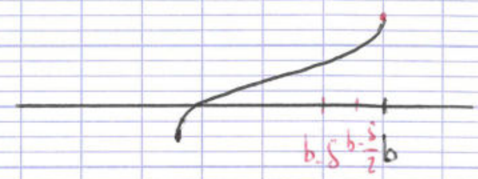
Montrons plusieurs choses sur c

1°) $c < b$

On a $f(b) > 0$ et f C^0 sur $\mathbb{R}^\times$ donc $f > 0$ au $v(b)$

Soit donc $\delta > 0$ tq $\forall t \in I \cap]b-\delta ; b]$, $f(t) > 0$

Mq $b - \frac{\delta}{2}$ majore A



Soit $x \in A$. On a $\forall t \in [a, x]$, $f(t) < 0$
Donc, on ne peut avoir $b - \frac{\delta}{2} \leq x$ car $f\left(b - \frac{\delta}{2}\right) > 0$

donc $x < b - \frac{\delta}{2}$

donc $\sup A$ étant le + petit des majorants, on a

$$c \leq b - \frac{\delta}{2} \quad \text{donc} \quad c < b$$

2°) Mq $f(c) \leq 0$

Astuce : on utilise la caractérisation séquentielle de la borne sup.

ie $\exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \to \sup A$
ie "le sup est atteint à la limite"

On fixe une telle suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } \quad a_n \to c \\ \text{et } f \ c^0 \text{ en } c \end{array}\right\} \ f(a_n) \to f(c)$$

Et $\forall n$, $f(a_n) \leq 0$

En passant à la limite dans l'inégalité large, on a $f(c) \leq 0$

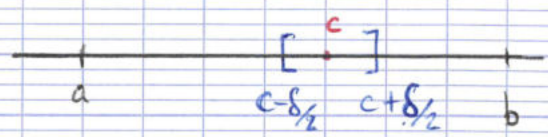
3°) Mq $f(c) \geq 0$

Par l'absurde : sq $f(c) < 0$

Or f c^0 en c

donc $\exists R^x$: $f(t) < 0$ au $v(c)$

Or $c < b$; on a :



Soit $\delta > 0$ tq $\begin{cases} c + \dfrac{\delta}{2} \leq b \\ \forall t \in \left[c - \dfrac{\delta}{2} \,;\, c + \dfrac{\delta}{2}\right], \ f(t) < 0 \end{cases}$

On a $f < 0$ sur $[a, c]$ car $c \in A$

$f < 0$ sur $\left[c ; c + \dfrac{\delta}{2}\right]$

donc $f < 0$ sur $\left[a ; c + \dfrac{\delta}{2}\right]$

absurde : car $c = \sup A$ donc, $f(c) \geq 0$

Bilan : $\underline{f(c) = 0}$

Démo n°2

Osq $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$
On procède par dichotomie

Construisons par récurrence deux suites $(a_n)_n, (b_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}}$
tq : 1°) $\forall n,\ a_n \leq b_n$
2°) $(a_n)_n \nearrow$ et $(b_n)_n \searrow$
3°) $\forall n,\ f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$
4°) $\forall n,\ b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$

. pour $n = 0$ on pose $\begin{cases} a_0 := a \\ b_0 := b \end{cases}$

. hérédité de la construction : Soit $n \geq 0$
Osq qu'on a construit $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_n)$
vérifiant 1°), ..., 4°)

Construisons les termes suivants
On pose $c := \dfrac{a_n + b_n}{2}$

. si $f(c) \geq 0$, on pose $\begin{cases} b_{n+1} := c \\ a_{n+1} := a_n \end{cases}$

On a $b_{n+1} \leq b_n$ et $a_{n+1} \geq a_n$

et $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$

Par construction, 3°) est vrai et 1°) est vrai.

. Si $f(c) \leq 0$, on pose

$$\begin{cases} a_{n+1} := c \\ b_{n+1} := b_n \end{cases}$$

De m̂, on vérifie que 1°), ..., 6°) sont ok

Bilan : on a construit par récurrence, par dichotomie, les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$

D'après le thm sur les suites adjacentes, soit $l \in \mathbb{R}$ tq $a_n \to l$ et $b_n \to l$

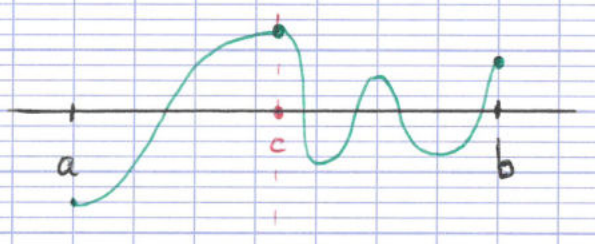
. On a $\forall n, \ a_n \leq l \leq b_n$

. pour $n = 0$, on a $l \in [a, b]$

. on a $\underbrace{f(a_n)}_{\leq 0} \to f(l)$ par continuité de f en l

Par passage à la limite, $f(l) \leq 0$
de m̂, $f(l) \geq 0$ donc $f(l) = 0$

Rq :



Le procédé de construction est unique mais l'objet cherché ne l'est pas

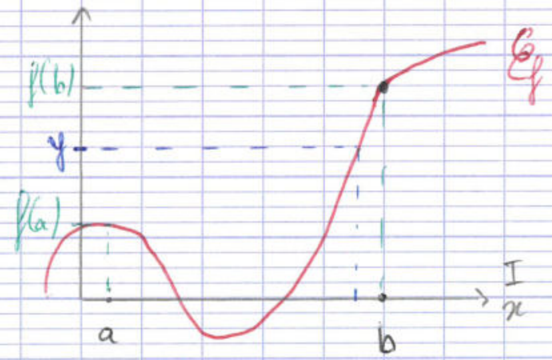
b) Théorème des Valeurs Intermédiaires : version simple

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue
Soient $a, b \in I$ tq $a < b$
Soit $y \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$
alors y est atteint par f

Rq : on s'approche bcp de l'intuition f c° sur $I \Leftrightarrow$
$\mathcal{C}_f$ est dessiné d'un seul trait

Dessin



Rq : . "y est atteint par f" $\Leftrightarrow \exists c \in I : y = f(c)$

. $\exists c \in [a, b] : y = f(c)$

Rq : "y compris entre $f(a)$ et $f(b)$" $\Leftrightarrow$ $f(a) \leq f(b) \Rightarrow y \in [f(a); f(b)]$

et $f(b) \leq f(a) \Rightarrow y \in [f(b); f(a)]$

Rq !! : Dans le TVI, les hypothèses
. f continue
. I est intervalle
sont fondamentales

⚠ $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est continue
$x \mapsto \frac{1}{x}$

. $f(1) = 1$ et $f(-1) = -1$
. 0 compris ent $f(-1)$ et $f(1)$
mais 0 n'est pas atteint par f ie $0 \notin \mathrm{Im}(f)$

Démo du TVI

1°) On a un autre lemme : $\left.\begin{array}{l} f(a) \geq 0 \\ f(b) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in [a,b] : f(c) = 0$

(on applique a) à $-f$)

2°) "y compris entre $f(a)$ et $f(b)$" $\Leftrightarrow$ $f(a)-y$ et $f(b)-y$ sont de signes larges contraires
$\Leftrightarrow (f(a)-y)(f(b)-y) \leq 0$

3°) On considère la f° $f-y$
On a alors $f(a)-y \leq 0$ et $f(b)-y \geq 0$
ou
$f(a)-y \geq 0$ et $f(b)-y \leq 0$

4°) on applique un des deux lemmes

c) TVI plus abstrait

Théorème L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

démo : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ c^0

Soit $J \subset I$ intervalle

Mq $f(J)$ est un intervalle

On utilise le fait que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

Mq $f(J)$ est convexe

ie mq $\forall y_1, y_2 \in f(J)$, $[y_1, y_2] \subset f(J)$

Soient $y_1, y_2 \in f(J)$

Soient donc $x_1, x_2 \in J$ tq $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$

Mq $[y_1, y_2] \subset f(J)$

1er cas : $y_1 > y_2$ alors $[y_1, y_2] = \emptyset$ c'est ok

2e cas : $y_1 \leq y_2$ on applique le TVI à f sur $[x_1, x_2]$

Mq $[y_1, y_2] \subset f(J)$

Soit $t \in [y_1, y_2]$. Mq $t \in f(J)$

on a $t \in [f(x_1), f(x_2)]$

donc t est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$

D'après le TVI, soit $a \in [x_1, x_2]$ tq $t = f(a)$

On a $a \in [x_1, x_2] \subset J$

J intervalle, $x_1, x_2 \in J$

donc $t = f(a) \in f(J)$

2) !! Théorème des bornes atteintes

a) Une f° continue sur un segment y est bornée

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a \leq b$

Théorème :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue
alors f est bornée

démo :

. Mq f est majorée
on applique ensuite ce résultat à $-f$; ainsi, on aura f bornée

On considère "l'ens des segments initiaux de $[a,b]$ où f est majorée"

On pose $A := \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; f \text{ est majorée sur } [a,x] \right\}$

ie "au moins sur $[a,x]$, f n'explose pas"

On a :

1°) $A \neq \emptyset$ car $a \in A$
et $f(a)$ majore f sur $[a,a]$

2°) A est majorée par b

3°) on note donc $c := \sup A$

4°) On veut mq $c = b$

On raisonne par l'absurde
Osq $c < b$

1) Une fct c^0 est localement majorée :

a) on prend $\varepsilon := 1 > 0$
soit donc $\delta > 0$ tq $\forall t \in I \cap]c-\delta, c+\delta[$,
$f(c) - 1 \leq f(t) \leq f(c) + 1$
donc f est bornée sur $I \cap]c-\delta, c+\delta[$

b) Rappel

$g : I \to \mathbb{R}$
$\alpha \in \overline{I}$ tq $g(t) \xrightarrow[t \to \alpha]{} \ell$
$\ell \in \mathbb{R}$

alors g est bornée au $v(\alpha)$
$\hat{c}$ $f(t) \xrightarrow[t \to c]{} f(c)$: c'est ok

Ainsi, soient $\delta > 0$ et $M_1 \in \mathbb{R}$ tq

. $c + \frac{\delta}{2} \leq b$

. $\forall t \in \left[c - \frac{\delta}{2}, c + \frac{\delta}{2}\right]$, $f(t) \leq M_1$

De plus, on a $c - \frac{\delta}{2} \leq c$

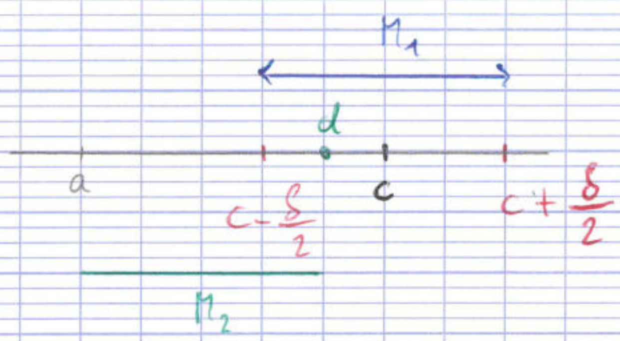
D'après la caractérisation "à la ε" de sup A :

soit $d \in A$ tq $c - \frac{\delta}{2} < d \leq c$

$\hat{C}$ $d \in A$: f est majorée sur $[a ; d]$

Soit donc $M_2 \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in [a, d]$, $f(t) \leq M_2$

Bilan :



On pose $M = \max(M_1, M_2)$

On a $\forall t \in \left[a, c + \frac{\delta}{2}\right]$, $f(t) \leq M$

donc $c + \frac{\delta}{2} \in A$: absurde

CCL : $c = b$

ie f est majorée sur $[a, b]$

Rq : On a fait d'une certaine façon une "récurrence topologique" ou une "induction topologique"

Prop : on se place sur $[a, b]$

Soit $P(x)$ un prédicat de $x \in [a, b]$ tq

1°) $P(a)$ est vrai

2°) $\forall x_0 \in [a, b]$, $P(x_0)$ vraie $\Rightarrow$ $P(x)$ vraie au $\mathcal{V}(x_0)$

3°) "$P(x)$ est fermée"

ie je peux passer à la limite dans $P(x)$

ie $\forall (x_n)_n \in [a, b]^{\mathbb{N}}$

$\forall \ell \in [a, b]$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to \ell \\ \forall n,\ P(x_n) \text{ vraie} \end{array}\right\} \Rightarrow P(\ell) \text{ vraie}$$

alors $\forall x \in [a,b], P(x)$ est vraie

démo : ?

b) Théorème des bornes atteintes !!

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^0

alors f est bornée et atteint ses bornes

1°) $\sup_{t \in [a,b]} f(t)$ et $\inf_{t \in [a,b]} f(t)$ existent

2°) il existe $x_m, x_M \in [a,b]$ tq $f(x_m) = \inf_{t \in [a,b]} f(t)$

et $f(x_M) = \sup_{t \in [a,b]} f(t)$

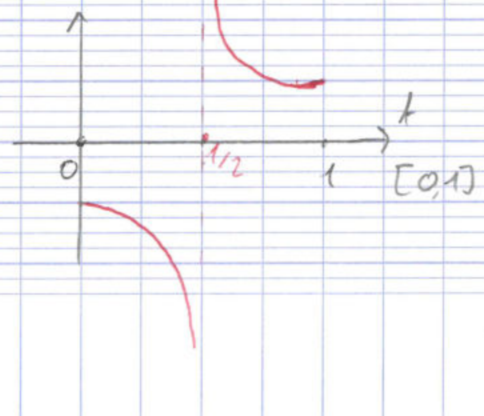
Contre-exemples

. Sur $[0,1]$ mais f pas C^0

On prend $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{t - \frac{1}{2}} & \text{si } t \neq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

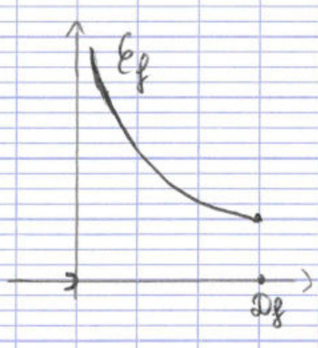
On a $\forall a \neq \frac{1}{2}$, f C^0 en a mais f n'est pas C^0 en $\frac{1}{2}$



• sur $]0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^0(]0,1], \mathbb{R})$

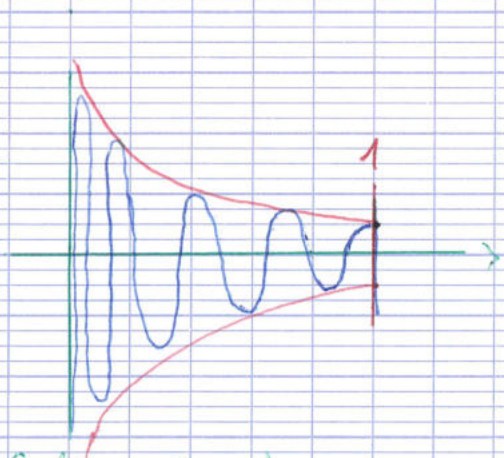
a) on prend $\begin{aligned}]0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{t} \end{aligned}$

Dessin :



b) on prend $\begin{aligned}]0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} \end{aligned}$

Dessin :



donc $v \in \mathcal{C}(]0,1], \mathbb{R})$

mais v n'est ni majorée, ni minorée au $\mathcal{V}(0)$

• sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ avec $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

a) On prend $x \mapsto x^2$ n'est pas majorée

b) ou $x \mapsto x^2 \sin(x)$

Démo

. Mq $\inf_{t\in[a,b]} f(t)$ est atteint

. On note $m := \inf_{t\in[a,b]} f(t)$

. On pose $g := f - m$

. On a $g > 0$ sur $[a,b]$ (strict car on raisonne par l'absurde en supposant l'inf non atteint)

. Je peux être aussi proche de 0 que je veux
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x_n \in [a,b]$ tq $0 < g(x_n) < \frac{1}{n}$

! $\hat{c}$ $g > 0$, on considère $h := \frac{1}{g}$

On a $h \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$
On a $\forall n$, $h(x_n) > n$
donc h n'est pas majorée : absurde

. Pour le sup : pareil

Complément

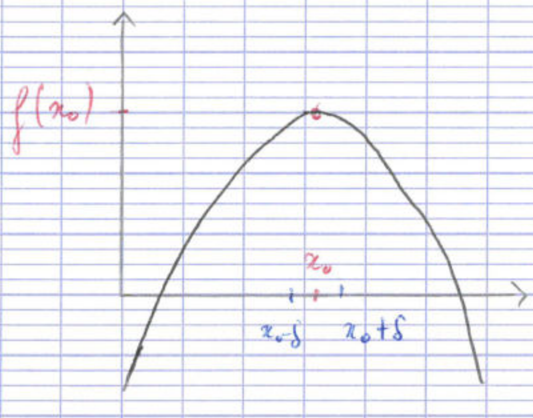
. $P(x)$ un prédicat de $x \in [a,b]$
On note H1 : $P(a)$ est V
H2 : $\forall x_0 \in [a,b]$, $P(x_0)$ est V $\Rightarrow P(x)$ est V $_{\text{sur } \mathcal{V}(x_0)}$
H3 : $P(x)$ est stable par passage à la limite
ie si $(x_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ et $l \in [a,b]$ tq

$$\left.\begin{array}{l} .\ \forall n,\ P(x_n) \text{ est V} \\ .\ x_n \to l \end{array}\right\} \Rightarrow P(l) \text{ est V}$$

? Mq $\forall x \in [a,b]$, $P(x)$ est vraie

On considère $f : I \to \mathbb{R}$ continue
et $P(x)$: " $f(x) > 0$ "

alors $P(x)$ vérifie H_2 ie $f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ au $v(0)$



$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in I \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[, \exists \varepsilon_0 > 0 : f(x) > \varepsilon_0$

(*) vrai mais peu fort

(*) $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in I \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[, f(x) > 0$

car si $a \in \mathbb{R}$, on a $a > 0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : a > \varepsilon_0$

On a mieux :

$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : f(x) \geq \varepsilon_0$ au $v(x_0)$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[, f(x) \geq \varepsilon_0$

. $P(x)$ ne vérifie pas H_3

Contre exemple :

$x_n \to \alpha$
$\forall n \; f(x_n) > 0$ mais
$f(\alpha) > 0$

? Trouver un prédicat $P(x)$ vérifiant H_3 et non H_2

c) Contre-exemples

On cherche des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues bornées mais qui n'atteignent pas leur inf, leur sup

On sait que I ne peut pas être un segment

. $f :]0,1[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto x$

On a f bornée. On a $\sup f = 1$ et $\inf f = 0$.
Ils ne sont pas atteints

. $g : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$

On a $\sup_{[1,+\infty[} g = 1$ et il est atteint en 1

Et, $\inf_{[1,+\infty[} g = 0$, il n'est pas atteint

. $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
On a $\sup_{\mathbb{R}} \arctan = \frac{\pi}{2}$ et il n'est pas atteint

3) Application à $\|\cdot\|_\infty$ (norme infinie)

⚠ $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array}\right\} \not\Rightarrow a - c \leq b - d$ et $\left.\begin{array}{l} 0 < a \leq b \\ 0 < c \leq d \end{array}\right\} \not\Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}$

Ctr-exemples : . $\begin{array}{c} 1 \leq 2 \\ 1 \leq 10 \\ \Downarrow ? \\ 0 \leq -8 \end{array}$. $\left.\begin{array}{l} 1 \leq 2 \\ 0{,}5 \leq 2 \end{array}\right. \overset{?}{\Rightarrow} 2 \leq 1$

Notation

On note $B(I, \mathbb{R})$ l'ens. des fct. bornées de I dans $\mathbb{R}$

Prop : $B(I, \mathbb{R})$ sev $F(I, \mathbb{R})$

Démo : . $\tilde{0}$ est bornée

. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ bornée et $\lambda \in \mathbb{R}$

R^x : f bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in I, |f(x)| \leq M$

Soient donc $M_f, M_g \in \mathbb{R}_+$ tq . $\forall x \in I, |f(x)| \leq M_f$
. $\forall x \in I, |g(x)| \leq M_g$

Mq $f + \lambda g$ est bornée
Soit $x \in I$

$$\mathbb{R}^x : \quad |f(x) + \lambda g(x)| \leq |f(x)| + |\lambda g(x)| = |f(x)| + |\lambda| \cdot |g(x)| \leq M_f + |\lambda| M_g$$

CCL : $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in I, (f + \lambda g)(x) \leq M$

Déf : Soit $f \in B(I, \mathbb{R})$
La norme infinie de f, notée $\|f\|_\infty$ est le réel positif ou nul défini par :

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in I} |f(t)|$$

Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

1) $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

c'est l'inégalité triangulaire pour la norme infinie

2) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

3) $\|f\|_\infty = 0 \iff f = \tilde{0}$

démo :

1) On sait que $\|f\|_\infty$ majore $|f(t)|$ pour tout $t \in I$

En effet, $\|f\|_\infty$ est le sup de ces nombres : c'est un majorant

Réflexes : 1) $\|f\|_\infty$ est une borne de f

2) ie $\forall t \in I$, $|f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$

3) Mieux, $\|f\|_\infty$ est la meilleure borne de f

ie $\forall M \in \mathbb{R}_+, (\forall t \in I, |f(t)| \leqslant M) \Rightarrow \|f\|_\infty \leqslant M$

donc, si $t \in I$, $|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$

$\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

ie $\forall t \in I, \left| f(t) + g(t) \right| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

deux possibilités :

1) Ainsi, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de

$$\left\{ |f(t) + g(t)| \;\middle|\; t \in I \right\}$$

Comme $\sup_I |f+g|$ est le plus petit de ces majorants, on a $\sup_I |f+g| = \|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

2) Par passage au sup

Prop : $A \subset \mathbb{R}$ non vide
$M \in \mathbb{R}$
Alors je passe au sup

$$(\forall a \in A, a \leqslant M) \Rightarrow \sup_{a \in A} A \leqslant M$$

Donc, comme on a :

$$\forall t \in I, |f+g|(t) \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Par passage au sup : $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

2) evo

3) Mq $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = \tilde{0}$

$\Leftarrow$ ok

$\Rightarrow$ Osq $\|f\|_\infty = 0$ donc $\forall t \in I, |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty = 0$

donc $\forall t \in I, f(t) = 0$ ie $f = \tilde{0}$

Déf : Soient $f, g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$
Soit $\varepsilon > 0$
On dit que f et g sont ε- proches pour $\|\cdot\|_\infty$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$$

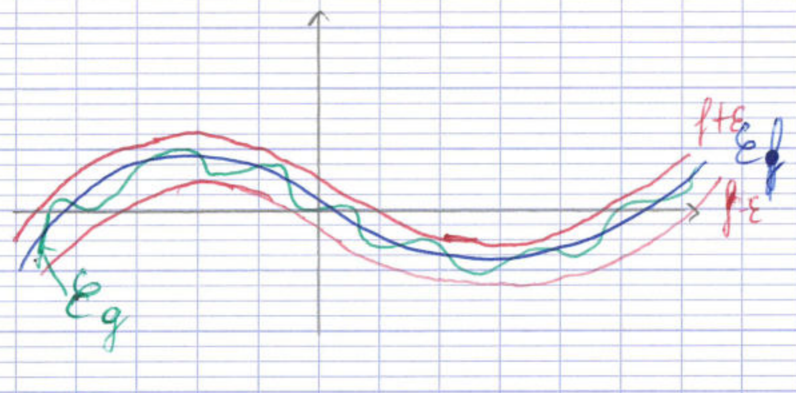
Dessin : Osq $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$

or $\forall t \in I$, $|f(t) - g(t)| \leq \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$

Ainsi, $\forall t \in I$, $f(t)$ ε- proche de $g(t)$

Ie $\forall t \in I$, $f(t) - \varepsilon \leq g(t) \leq f(t) + \varepsilon$

(je prends f comme pivot)



b) Généralisation

Déf : Soit E $\mathbb{R}$- ev
Soit $N : E \to \mathbb{R}_+$
On dit que $N(\cdot)$ est une norme sur E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

1) $\forall x, y \in E$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$
3) $\forall x \in E$, $x = 0_E \iff N(x) = 0$

Tout ce qui a été fait dans les chapitres Suites, Limites et Continuité peut être fait en remplaçant l'espace $\mathbb{R}$ d'arrivée par E ev muni d'une norme.

Rq : $N(\cdot)$ est svt notée $\|\cdot\|$

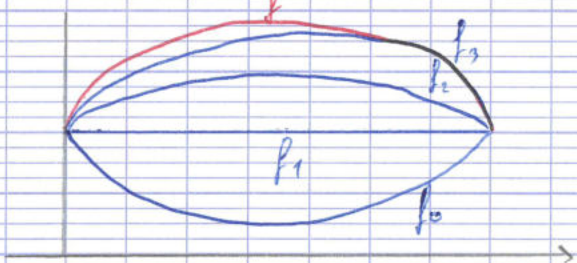
Déf : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-ev normé
Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$
Soit $l \in E$
On dit que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} l \overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, \|x_n - l\| \leq \varepsilon$

c) Convergence uniforme !!

Déf : Soit $(f_n)_n$ une suite de fct définies sur I
Soit $f : I \to \mathbb{R}$
On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I et on note $f_n \xrightarrow[I]{CVU} f \overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$
ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

Dessin :



d) Remarque

On a $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$

4) Théorèmes des fonctions continues injectives

Théorème , I intervalle
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue
Alors f injective $\Rightarrow$ f strictement monotone

cf 22.24

5) Théorème de la bijection monotone

Prop : I intervalle
$f : I \to \mathbb{R}$ continue et strict. croissante
On note $J := f(I)$. Le TVI nous dit que J est un intervalle
Alors f établit une bijection entre I et J

Et 1) $f^{-1} : J \to I$ strict^t croissante
2) $f^{-1} : J \to I$ est continue

démo :
2) Soit $b \in J$ ie soit $b \in f(I)$
Soit donc $a \in I$ tq $b = f(a)$
Mq f^{-1} est c^0 en b
Soit $\varepsilon > 0$
On cherche $\delta > 0$ tq $\forall y \in J \cap]\underset{b}{f(a)} - \delta ; \underset{b}{f(a)} + \delta[$,
$f^{-1}(b) - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(b) + \varepsilon$
ie tq $\forall y \in J \cap]b - \delta ; b + \delta[$, $a - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq a + \varepsilon$

Soit $\delta > 0$

Soit $y \in J \cap]b-\delta ; b+\delta[$

On a $a-\varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant a+\varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$$f(a-\varepsilon) \leqslant y \leqslant f(a+\varepsilon)$$

On se place dans le cas où $I = \mathbb{R}$

Synthèse

Je cherche $\delta > 0$ tq ...

Je sais que $f \nearrow$

Je sais que $f(a-\varepsilon) < f(a) < f(a+\varepsilon)$

donc je sais que $f(a) - f(a-\varepsilon) > 0$

$f(a+\varepsilon) - f(a) > 0$

On pose $\delta := \min\left(f(a) - f(a-\varepsilon) , f(a+\varepsilon) - f(a) \right)$

On a $]b-\delta, b+\delta[\subset]f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon)[$

Soit $y \in]b-\delta ; b+\delta[$

On a $f(a-\varepsilon) < y < f(a+\varepsilon)$

Or $f^{-1} \nearrow\nearrow$

donc $a-\varepsilon < f^{-1}(y) < a+\varepsilon$

IV, Extension à $\mathbb{C}$

Tout ce qui précède s'étend à $\mathbb{C}$ en tant qu'espace d'arrivée.

a) Suites complexes

b) Limites de fonctions complexes

⚠ $\ell \in \mathbb{C}$, on ne peut pas avoir $\ell = \pm\infty$

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{C}$
Soit $a \in \overline{I}$
Soit $\ell \in \mathbb{C}$

On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

3 cas :

. $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, \overbrace{|x-a|}^{\text{valeurs absolues}} \leq \delta \Rightarrow \overbrace{|f(x)-\ell|}^{\text{module}} \leq \varepsilon$

. $a = +\infty$ }
. $a = -\infty$ } → ?

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{C}$
Soit $a \in \overline{I}$
Soit $\ell \in \mathbb{C}$

Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$

c) Continuité

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$
On dit que f est continue en a ssi
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \underset{\forall x \in I}{,} |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

. On note $\mathcal{E}(I, \mathbb{C})$ l'ens. des f° continues de I dans $\mathbb{C}$. C'est un $\mathbb{C}$-ev.

<u>Prop :</u> $f \in \mathcal{E}(I, \mathbb{C}) \iff \begin{cases} Re(f) \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R}) \\ Im(f) \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R}) \end{cases}$