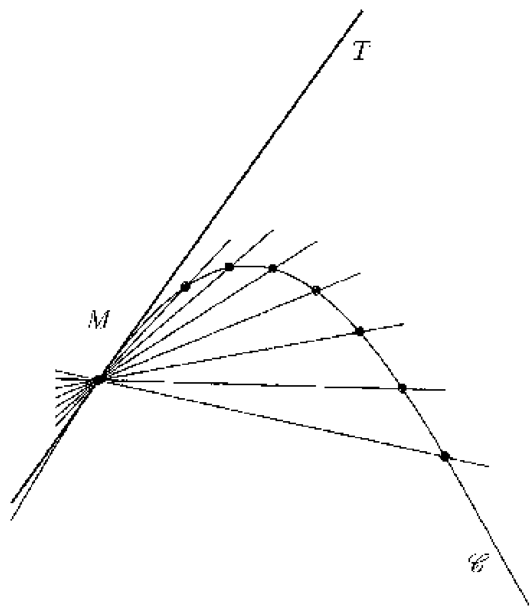
Chapitre 19

Dérivation



La tangente T à $\mathscr{C}$ au point M est « la limite »
des cordes passant par M et par un point se rapprochant de M.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on a défini $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues. L'étape suivante, qu'on va accomplir dans ce chapitre, est de définir et étudier les fonctions dérivables $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dont l'ensemble est noté $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.

On peut alors définir

$$\begin{aligned} \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}) &:= \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \\ \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) &:= \Big\{ f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R}) \mid f' \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \Big\} \\ \forall i \geqslant 1, \quad \mathscr{C}^i(I,\mathbb{R}) &:= \Big\{ f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R}) \mid f' \in \mathscr{C}^{i-1}(I,\mathbb{R}) \Big\} \end{aligned}$$

et enfin

$$\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^i(I,\mathbb{R}).$$

On a la tour d'inclusions d'espaces vectoriels

$$\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathscr{C}^i(I,\mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}(I,\mathbb{R}).$$

Chapitre 19 : Dérivation

Dans ce chapitre, I est un intervalle tq $\ell(I) > 0$

Complément

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue
$t \mapsto e^{it}$

démo On a $\mathrm{Re}(\varphi) = \cos(\cdot)$
$\mathrm{Im}(\varphi) = \sin(\cdot)$

Or, on a mq $\cos, \sin \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
donc φ est continue, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

I, Dérivabilité, dérivée

1) Taux d'accroissement

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$
Soit $a \in I$, soit $x \in I \setminus \{a\}$
Le taux d'accroissement de f entre a et x est :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

On note $\tau_{f,a} : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2) Equation de la corde

$f : I \to \mathbb{R}$; $a \in I$; $x_0 \in I \setminus \{a\}$; $A := \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$; $M := \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$

Alors $\tau_{f,a}(x_0)$ est la pente de (AM)

L'équation de (AM) s'écrit :

$$y = \tau_{f,a}(x_0)\ x + B$$

Mais il est plus judicieux de considérer $(x-a)$ plutôt que x.

Donc, une équation de (AM) peut s'écrire

$$y = \tau_{f,a}(x_0)\ (x-a) + B' \qquad (*)$$

Ĉ $A \in (AM)$, qd on remplace x par x_A (ie a) et y par y_A (ie $f(a)$) $(*)$ est satisfaisante

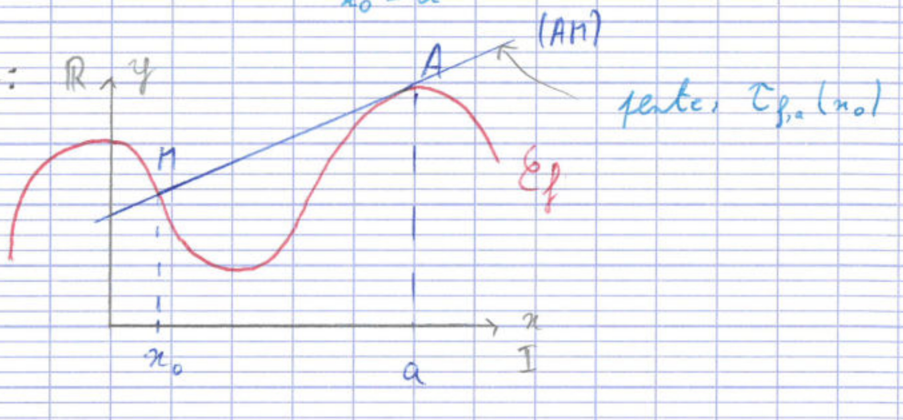
CCL : $B' = f(a)$

<u>Fait</u> : L'équation réduite de (AM) est

$$y = \tau_{f,a}(x_0)\ (x-a) + f(a)$$

$$\text{ie } y = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}(x-a) + f(a)$$

Dessin :



Rq : ⚠ $D_{\tau_{f,a}} = I \setminus \{a\}$

3) Dérivabilité

$f : I \to \mathbb{R}$
$a \in I$

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes

D1 : $\tau_{f,a}$ admet une limite finie en a

D2 : Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ tq

. $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

. $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \ell(x-a) + \varepsilon(x)\cdot(x-a)$

D3 : Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tq
. $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$
. φ est continue en a

Rq : . D1 signifie que les droites (AM) viennent se stabiliser autour d'une droite limite quand M tend vers A

. D2 peut s'écrire en posant $x = a + h$
$x \to a \Leftrightarrow h \to 0$

$$f(a+h) = f(a) + \ell \cdot h + h \cdot \varepsilon_2(h)$$

avec $\varepsilon_2(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ si $a + h \in I$

ie $f(a+h) = f(a) + \ell \cdot h + o(h)$

D3 : Osq $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$
avec $\varphi : I \to \mathbb{R}$ si $x \in I$
alors si $x \neq a$, on a $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

D3 signifie que $\tau_{f,a}(\cdot)$ est prolongeable par continuité en a

Dans le cas où ces assertions sont vraies, on a :

$$\ell = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\tau_{f,a}(x)} = \varphi(a)$$

démo : D1 $\Rightarrow$ D2
Osq $\exists \ell \in \mathbb{R} : \tau_{f,a}(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \ell$

Fixons ce $\ell \in \mathbb{R}$. Mq $\exists\, \varepsilon(\cdot) : I \to \mathbb{R} : \forall x,\ f(x) = f(a) + \ell(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$

Analyse : Supposons qu'on ait trouvé un tel $\varepsilon(\cdot)$

On a alors $\forall x \neq a$, $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell$

Synthèse : On pose

$$\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

On a $\forall x \neq a$, $f(x) = f(a) + \ell(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$

En $x = a$: ok

Mq $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

On a $\cdot\, \varepsilon(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} 0$ car $\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \ell$

$\cdot\, \varepsilon(a) = 0$

donc $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

. D2 $\Rightarrow$ D3

Osq D2. On se donne une fct $\varepsilon(\cdot)$ qui convient.

On a :

$\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + \ell(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$

qu'on écrit $\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + (x-a)\underbrace{(\ell + \varepsilon(x))}_{\to \varphi(x)}$

Mq φ est c^0 en a

On a $\varepsilon \xrightarrow[a]{} 0$

donc $\ell + \varepsilon(\cdot) \xrightarrow[a]{} \ell$

ie $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

Or, $\varphi(a) = \ell + \varepsilon(a) = \ell$

donc $\varphi(x) \to \varphi(a)$: φ est c^0 en a

. D3 $\Rightarrow$ D1 : Osq D3

On fixe $\varphi(\cdot)$ correspondante

On a $\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + (x-a)\varphi(x)$

Donc $\forall x \neq a,\ \tau_{f,a}(x) = \varphi(x)$

Osq, $\varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \varphi(a)$

donc $\varphi(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \varphi(a)$

ie $\tau_{f,a}(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \varphi(a)$

Déf : On dit que f est dérivable en a ssi l'une de ces assertions D1, D2 ou D3 est satisfaite.

Dans ce cas, le nombre réel $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \tau_{f,a}(x) = l = \varphi(a)$

est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$

Rq : On a $\sqrt{1+h} \underset{h \to 0}{=} 1 + \frac{h}{2} + o(h)$ $(*)$

c'est la réécriture de D3 sous le changement de variables $x = 1 + h$

par $\begin{cases} f = \sqrt{\cdot} \\ a = 1 \end{cases}$

Ainsi $(*) \Leftrightarrow \sqrt{\cdot}$ est dérivable en 1 et que son nb dérivé vaut $\frac{1}{2}$.

De m, pour $\sin(\cdot)$, $\exp(\cdot)$, $(1+\cdot)^{\alpha}$ et $\ln(1+\cdot)$

4) Équation de la tangente

Déf : Quand f est dérivable en a, on appelle tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $(a, f(a))$, ie au pt d'abcisse a, la droite d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

On pourra la noter $T_{f,a}$

5) Exemples

a) $\sqrt{\cdot}$ en 0^+

Ici, $I = \mathbb{R}_+$ et $a = 0$, on considère $f = \sqrt{\cdot}$

Si $x > 0$, on a $\tau_{\sqrt{\cdot},0}(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Or $\sqrt{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

et $\forall x > 0, \sqrt{x} > 0$. Donc, on a $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} +\infty$

Ainsi $\tau_{\sqrt{\cdot},0}(x) \underset{\substack{x \to 0^+ \\ >}}{\longrightarrow} +\infty$

La pente de la corde entre $O_{\mathbb{R}^2}$ et $M = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{x} \end{pmatrix}$ tend vers $+\infty$ quand $x \to 0^+$

On dit que $\mathcal{C}_{\sqrt{\cdot}}$ admet une tangente verticale d'éq $x = 0$ en $O_{\mathbb{R}^2}$

b) $\sqrt{\cdot}$ en $a>0$

Soit $a>0$, soit $x \neq a$, on a :

$$\tau_{\sqrt{\cdot},a}(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

$$= \frac{x-a}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x-a)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

On a $\sqrt{x} \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \sqrt{a}$ car $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\sqrt{x}+\sqrt{a} \longrightarrow 2\sqrt{a} > 0$ car $a>0$

donc $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Bilan : $\tau_{\sqrt{\cdot},a}(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Proposition

1) $\sqrt{\cdot}$ est dérivable en $a>0$
2) Son nombre dérivé y vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

3) $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0

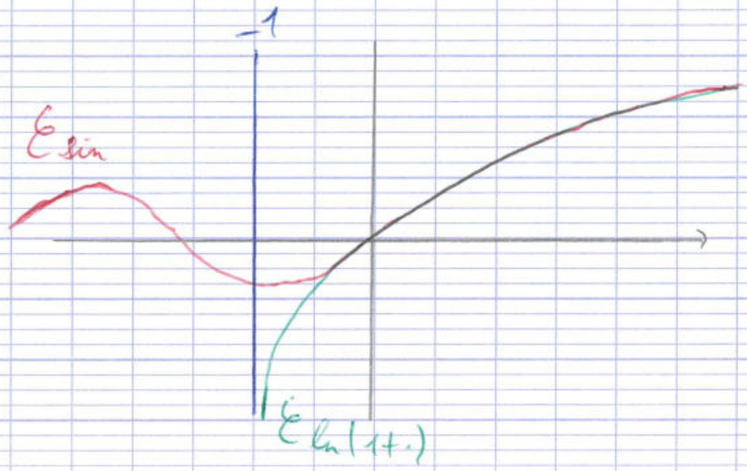
Rq : on a $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{a}} \underset{\substack{a \to 0 \\ >}}{\longrightarrow} +\infty$

c) Recollement dérivable

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dessin



On admet que $\forall a \neq 0$, f est dérivable en a

Mq f est dérivable en 0

On dit qu'on a récolté les deux fonctions de façon dérivable.

Calculons

. Si $x > 0$:

car $f(\cdot) = \ln(1+\cdot)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\tau_{f,0}(x) = \tau_{\ln(1+\cdot),0}(x) \xrightarrow[x \to 0^{>}]{} 1 \quad \text{car } \ln(1+\cdot)' = \frac{1}{1+\cdot}$$

. Si $x < 0$:

car $f = \sin$ sur $\mathbb{R}_-^*$

$$\tau_{f,0}(x) = \tau_{\sin,0}(x) \xrightarrow[x \to 0^{<}]{} 1$$

CCL : $\tau_{f,0} \xrightarrow[0^-]{} 1$ et $\tau_{f,0} \xrightarrow[0^+]{} 1$

Ainsi : $\tau_{f,0}(x) \xrightarrow[x \to 0, \neq]{} 1$

donc f est dérivable en 0.

6) Fonction dérivée

<u>Déf</u> : on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ f est dérivable en tout point de I

. On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ens. des fonctions dérivables sur I

. Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, on note $f' : I \to \mathbb{R}$ la fonction :

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$a \mapsto \text{le nombre dérivé de } f \text{ en } a$$

f' est la (fct) dérivée de f

7) Une fct dérivable est continue

<u>Lemme</u> : Soit $f : I \to \mathbb{R}$
soit $a \in I$

f dérivable en $a \Rightarrow f$ c^0 en a

<u>démo</u> : on utilise D3

Qsq f dérivable en a
Soit donc $\varphi(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ tq :
. $\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$
. φ est continue en a

Or, $x \mapsto x - a$ est c^0 en a
Par opération sur les fct c^0 en a : f est c^0 en a

Proposition : $\mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

Une fct dérivable sur I est continue sur I

II. Opérations sur les dérivées

1) Opérations algébriques

Prop : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$
Soit $a \in I$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$
Osq f et g sont dérivables en a
Alors :

1) $f+g$ est dérivable en a
et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2) λf est dérivable en a
et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$

3) fg est dérivable en a
et $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + g'(a)\,f(a)$

4) Osq $g(a) \neq 0$
a) $\frac{1}{g}(x) \neq 0$ au $\mathcal{V}(a)$
b) $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$
c) $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$

Démo

1) 2) avec D1

Soit $x \neq a$. On a

$$\tau_{(f+g),a}(x) = \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a}$$
$$= \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x-a}$$
$$= \underbrace{\tau_{f,a}(x)}_{\to f'(a)} + \underbrace{\tau_{g,a}(x)}_{\to g'(a)} \quad \to f'(a) + g'(a)$$

De m̂, $\tau_{\lambda f, a}(x) = \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a}$

$$= \lambda \, \tau_{f,a}(x)$$

Rq : en effet, $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ev avec X quelconque

$$\tau_{\cdot,a} \left\{ \begin{array}{ccc} \overset{\text{ev}}{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})} & \longrightarrow & \overset{\text{ev}}{\mathcal{F}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})} \\ f & \longmapsto & \tau_{f,a} \end{array} \right.$$

est linéaire

3) On utilise D3

Soient φ_1, φ_2 C^0 en a tq $\forall x \in I$, $\begin{cases} f(x) = f(a) + \varphi_1(x)(x-a) \\ g(x) = g(a) + \varphi_2(x)(x-a) \end{cases}$

Soit $x \in I$, on a :

$$f(x)g(x) = \big(f(a) + \varphi_1(x)(x-a)\big)\big(g(a) + \varphi_2(x)(x-a)\big)$$

$$f(x)g(x) = f(a)g(a) + f(a)\varphi_2(x)(x-a) + g(a)\varphi_1(x)(x-a) + \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)(x-a)^2$$

$$= f(a)g(a) + (x-a)\underbrace{\left[f(a)\varphi_2(x) + g(a)\varphi_1(x) + \varphi_1(x)\varphi_2(x)(x-a)\right]}_{\varphi(x)}$$

donc par opé sur les f° c° en a, on a φ est c° en a

Ainsi, fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = \varphi(a)$

or $\varphi(a) = f(a)\underbrace{\varphi_2(a)}_{g'(a)} + g(a)\underbrace{\varphi_1(a)}_{f'(a)} + \underbrace{\varphi_1(a)\varphi_2(a)(a-a)}_{=0}$

d'où $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$

4) Osq $g(a) \neq 0$

a) ĉ g est dérivable en a, elle est c° en a

On a $g(a) \neq 0$

P. ex : $g(a) > 0$

mais alors, on a $g(x) > 0$ au $v(a)$

En particulier : $g(x) \neq 0$ au $v(a)$

De m̂ si $g(a) < 0$

Bilan : $\frac{1}{g}$ est déf au $v(a)$

b) on utilise D1

Soit $x \neq a$, on a $\tau_{\frac{1}{g},a}(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a}$

et x suffisa^t proche de a

R^x $\hat{m}$ déno :

$$= \frac{\dfrac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x)}}{x - a}$$

$$= \frac{1}{g(a)g(x)} \times \frac{g(a) - g(x)}{x - a}$$

$$= -\frac{1}{g(x)g(a)} \times \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{g(x)g(a)} \times \underbrace{\tau_{g,a}(x)}_{\to\, g'(a) \text{ par déf}}}$$

$$\xrightarrow[x \to a]{} -\frac{1}{g(a)^2} \text{ par opérations}$$

donc $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a

et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g(a)^2}$

c) $\left.\begin{array}{l}\text{produit } fg \\ \text{inverse } \dfrac{1}{g}\end{array}\right\}$ quotient $\dfrac{f}{g}$

Corollaire

1) $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev
(et un sev de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$)

2) $\Phi : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
$\qquad f \longmapsto f'$
est linéaire

2) Composition

Prop : On considère la situation

$$a \in I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad \text{où } I, J \text{ intervalles de } \mathbb{R}$$

Alors : $\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable en } a \\ g \text{ dérivable en } a \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ est dérivable en a

Dans ce cas, on a $(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$

Démo : on note $b := f(a)$

Rq : avec D_1, c'est plus compliqué que ça semble l'être

On utilise D3 :
Soit donc $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $\psi : J \to \mathbb{R}$
tq $\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\varphi(x)$
et $\forall y \in J, g(y) = g(b) + (y-b)\psi(y)$ $(*)$
avec φ c^0 en a et ψ c^0 en b
Soit $a \in I$. On a, en remplaçant y par $f(x)$ dans $(*)$

$$g(f(x)) = g(b) + (f(x)-a)\psi(f(x))$$
$$= (g \circ f)(a) + (x-a)\varphi(x) \cdot \psi(f(x))$$

On a : a) φ est c^0 en a

b) $\left.\begin{array}{l} f \ c^0 \text{ en } a \\ \psi \ c^0 \text{ en } b = f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \psi \circ f \ c^0$ en a

car f dérivable en a

On pose, pour $x \in I$; $\theta(x) := \varphi(x) \cdot \psi(f(x))$
On a $\theta : I \to \mathbb{R}$ et θ c^0 en a d'après a) et b)

On a $\forall x \in I, (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (x-a)\sigma(x)$
donc $g \circ f$ est dérivable en a

Et $(g \circ f)'(a) = \sigma(a) = \underbrace{\varphi(a)}_{f'(a)} \underbrace{\psi(f(a))}_{g'(f(a))}$

3) Dérivation de la réciproque

Prop : Soient I, J intervalles et soit $f : I \to J$ une bijection continue
Soit $a \in I$. On suppose f dérivable en a
Alors : 1) f^{-1} est dérivable en $f(a) \iff f'(a) \neq 0$
On a alors : $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$

2) Si on note $b := f(a)$; on a alors

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Démo :

$\Rightarrow$ Osq f^{-1} dérivable en $f(a)$
On a $f \circ f^{-1} = Id_J$
En appliquant 2), on obtient au point $b = f(a)$:

$$(f^{-1})'(b) \cdot f'(f^{-1}(b)) = 1$$

ie $(f^{-1})'(b) \cdot f'(a) = 1$
donc $f'(a) \neq 0$ et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$
$= \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

($\Leftarrow$) Mq f dérivable et continue en a et $f'(a) \neq 0$
On utilise D1

On a $\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} f'(a)$

Idée : utiliser le thm de composition des limites ie : remplacer x par une expression qui tend vers a

On : $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to b]{} f^{-1}(b)$

car f^{-1} est continue en b car f est continue sur I et f^{-1} aussi d'après le thm de la bij. rec.

De plus, comme f^{-1} est bijective, quand $y \neq b$ alors $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$

Ainsi, on a $\tau_{f,a}(f^{-1}(y)) \xrightarrow[y \neq b]{y \to b} f'(a)$

Soit $y \in J \setminus \{b\}$, on a :

$$\tau_{f,a}(f^{-1}(y)) = \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \frac{1}{\tau_{f^{-1},b}(y)}$$

donc, $\frac{1}{\tau_{f^{-1},b}(y)} \xrightarrow[y \neq b]{y \to b} f'(a)$

Or, $f'(a) \neq 0$

Donc, par op sur les limites, on a $\tau_{f^{-1},b}(y) \xrightarrow[y \neq b]{y \to b} \frac{1}{f'(a)}$

donc, d'après D1, f^{-1} est dérivable au point b.

4) Généralisation

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ dérivable

On a $(fgh)' = ((fg)h)' = (fg)'h + (fg)h'$
$= f'gh + fg'h + fgh'$

Fait : Soit $N \in \mathbb{N}^*$, soit $(f_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})^{N}$

Alors $\left(\prod_{i=1}^{N} f_i\right)' = \sum_{k=1}^{N} f_k' \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} f_i$

Si $\forall i, \forall x, f_i(x) \neq 0$,

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{N} f_i\right)'}{\prod_{i=1}^{N} f_i} = \sum_{k=1}^{N} \frac{f'_k}{f_k}$$

III, Dérivées successives

1) Définition : rappel

On a déjà défini : $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ pour $n \geq 1$

. $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) := \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

. si $n \geq 1$, $\mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \mid f' \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \}$

. Si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, $f^{(n)}$ est la dérivée n-ième de f

. $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ pour $n \geq 0$: . $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

. si $n \geq 1$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \mid f^{(n)} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \}$

. $\mathcal{C}^{\infty}(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{C}^{n}(I, \mathbb{R})$

Faits : . $\left(f^{(n)}\right)^{(m)} = f^{(n+m)}$

. $f^{(0)} = f$ dérivée 0-ième de f est f

Exemple : . $\ln \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0$, $\ln^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}$

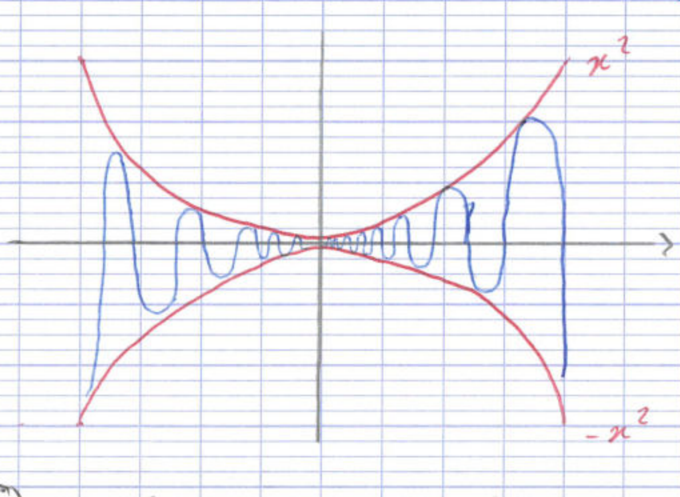
? . A-t-on $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

2) Une f° dérivable n'est pas nécessairement continûment dérivable

ie $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



? $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée au $\mathcal{V}(0)$

Mq $x \mapsto x^2 h(x)$ est dérivable en 0

Déjà, on a $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$

A-t-on f dérivable en 0 ?

$\forall \mathbb{R}^*$: on utilise D1

Soit $x \neq 0$. On a : $\tau_{f,0}(x) = \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Or, $\forall \mathbb{R}^*$: on a

$$|\tau_{f,0}(x)| = \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

car $|\sin| \leq 1$

(Rq : $\forall \mathbb{R}^*$ en analyse $|f(x)| \leq \ldots \leq$ expression simple $\nearrow$ majorée, $\to 0$, $\to o(e^{-x})$

et $|u_n| \leq \ldots \leq$ expression simple)

Or $|x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $|\tau_{f,0}(x)| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

CCL : f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Soit $x \neq 0$, on a : $f'(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times -\frac{1}{x^2} + 2x \sin\frac{1}{x}$

$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$: interdit

$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Mq f' n'est pas continue en 0

Rq : rappel

si on a $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et g diverge en a

alors $f + g$ diverge en a

Bilan : . $\xrightarrow{CV} + \xrightarrow{CV} = \xrightarrow{CV}$

. $\xrightarrow{CV} + \cancel{\xrightarrow{CV}} = \cancel{\xrightarrow{CV}}$

. $\xrightarrow{CV}$ + diverge = diverge

. diverge + diverge = ?

$$\triangle \quad \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{div}} + \underbrace{\frac{-1}{x}}_{\text{div}} = 0 \xrightarrow[\text{en } 0^+]{CV}$$

en $+\infty$

$$\underbrace{x}_{\text{div}} \quad \underbrace{+\sin x}_{\text{div}} \quad \text{diverge}$$

? $\cos(x) + \sin(x) = A \sin(x + \varphi)$: A, φ ?

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{n'a pas de limite en } 0}$

$\downarrow x \to 0$

0

Bilan : a) f' n'a pas de limite en 0

b) En particulier, $f'(x) \underset{x \to 0}{\not\to} f'(0)$

c) f' n'est pas continue en 0

3) Opérations dans $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

Prop : soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$

Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors : 1) $f + \lambda g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

et si $n \neq \infty$, $(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$

2) $fg \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R})$

3) Si $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$

- $\dfrac{1}{g} \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R})$
- $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R})$

démo : exo.

Rq : On a si $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi : \mathcal{E}^\infty(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{E}^\infty(I, \mathbb{R}) \qquad f \longmapsto f^{(n)}$$

est un endomorphisme (on a $\Phi = D^n$)

4) !! Formule de Leibniz

Soient $f, g \in \mathcal{E}^\infty(I, \mathbb{R})$

On a $(fg)' = f'g + fg'$

et
$$\begin{aligned}(fg)'' &= (f'g)' + (fg')' \\ &= f''g + f'g' + f'g' + fg'' \\ &= f''g + 2f'g' + fg''\end{aligned}$$

Prop : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $f, g \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R})$

Alors : $\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$

Démo : On fait une récurrence ascendante

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note :

$$P(k) : \text{"} (fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

$k = 0$: $fg = fg$

Hérédité :

Mq $\forall k \in [\![0, n-1]\!], P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tq $P(k)$ soit vrai

On a $(fg)^{(k+1)} = \left((fg)^{(k)}\right)' \underset{P(k)}{=} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}\right)'$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i)} g^{(k-i)}\right)'$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i+1)} g^{(k-i)} + f^{(i)} g^{(k-i+1)}\right)$$

= changet de var + intersection des domaines de sommation
+ Pascal

5) Composition

Prop : $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \\ g \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$$

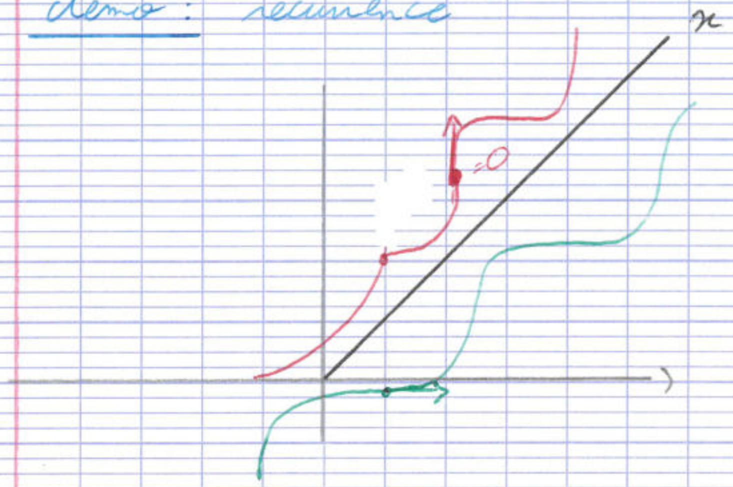
démo : Récurrence ?

6) Réciproque d'une bijection $\mathcal{C}^n$

<u>Prop</u> : Soit $f : I \to J$ une bijection, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$
Osq $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

Alors $\left(\forall x \in I, f'(x) \neq 0\right) \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$

<u>démo</u> : récurrence



IV. Extension à $\mathbb{C}$ à l'arrivée

1) Rappel

. Si $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$, on a défini $u_n \to l$
. De même si $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$, on a défini $u_n \to l$
. On a aussi défini f $\mathcal{C}^0$ sur I si $f : I \to \mathbb{R}$
. De même, on a défini f $\mathcal{C}^0$ sur I si $f : I \to \mathbb{C}$

2) Définition

<u>Déf</u> : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ la fonction

$$\begin{aligned} I \setminus \{a\} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$ admet une limite complexe finie qd $x \underset{\neq}{\to} a$

valeur absolue

ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists\, \ell \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{\underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{x-a}}} - \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{\ell}} \right| \leq \varepsilon$$

module

3) Caractérisation

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Soit $a \in I$

Alors,

$$f \text{ dérivable en } a \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f) \text{ est dérivable en } a \\ \mathrm{Im}(f) \text{ est dérivable en } a \end{cases}$$

On a $f'(a) = [\mathrm{Re}(f)]'(a) + i\,[\mathrm{Im}(f)]'(a)$

4) Extension à $\mathbb{C}$ des autres constructions

a) De $\hat{m}$, on définit :

- $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$
- $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{C})$ pour $p \in \mathbb{N}^*$
- $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{C})$ pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

On a $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{C}) \Rightarrow \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$

b) On a les mêmes règles opératoires $\left((f+g)', (fg)', \left(\frac{f}{g}\right)'\right)$

c) Pour la composition : $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ avec I, J intervalles

5) Extension à $(E, \|\cdot\|)$ à l'arrivée

Exemple

On considère $M(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ ← appli. vectorielle

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} 2t & e^t \\ \ln(1+t^2) & \sin(t) \end{pmatrix}$$

où $M_2(\mathbb{R})$ est munie de la norme :

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} \qquad (*)$$

(c'est la norme 2)

A-t-on $M(\cdot)$ dérivable en 1 ?

ie A-t-on

$$\exists A \in M_2(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in [1-\delta, 1+\delta] \setminus \{1\}, \left\| \frac{M(t)-M(1)}{t-1} - A \right\| \leq \varepsilon$$

Réponses :

1) oui

2) on a $M(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M_2(\mathbb{R}))$ ← $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, (M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|))$

norme définie en $(*)$

3) On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = \begin{pmatrix} 2 & e^t \\ \frac{2t}{1+t^2} & \cos(t) \end{pmatrix}$

V, Théorème des accroissements finis

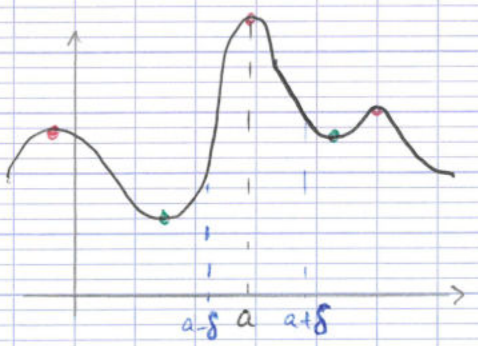
1) Extrema locaux

__Déf:__ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in I$

On dit que f admet un maximum local en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$\exists \delta > 0 : \forall x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[\ , f(x) \leq f(a)$

De m̂, minimum local
On dit que f admet un extremum local en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
f admet un min local en a ou un max local en a

__Dessin:__



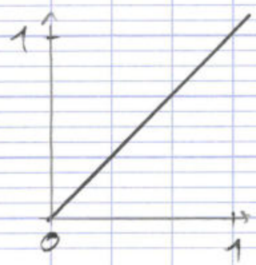
• = minima locaux
• = max locaux

__Exemple :__ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

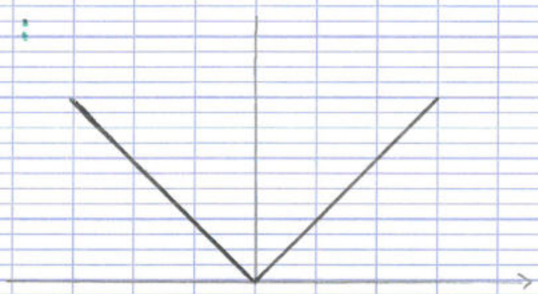
admet bcp d'extrema locaux

Exemple 2 : $g : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x$



g admet un min local en 0 et un max local en 1

Exemple 3 :



La valeur absolue admet un min local en 0.

2) ! Lemme de l'extremum local

Lemme : Soit $f : I \to \mathbb{R}$

Soit $a \in \mathring{I}$ un pt où f admet un extremum local.

Alors f dérivable en $a \Rightarrow f'(a) = 0$

Démo !! : Qsq a est un min local

Comme $a \in \mathring{I}$: soit $\delta_1 > 0$ tq $]a-\delta_1, a+\delta_1[\subset I$ *

. Soit $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}$

On a $f(x) \geq f(a)$

donc $f(x) - f(a) \geq 0$

* si $x > a$

On a $x - a > 0$

donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

Bilan : $\forall x \in]a, a+\delta[, \ \tau_{f,a}(x) \geq 0$

donc, par passage à la limite

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \tau_{f,a}(x) \geq 0$

Rq : cette limite existe et vaut $f'(a)$ car f est dér. en a.

* ⚠ oubli : $\hat{c}$ a est un min local de f
Soit $\delta_2 > 0$ tq $\forall x \in I \cap]a-\delta_2, a+\delta_2[$, $f(x) \geq f(a)$
On pose $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$

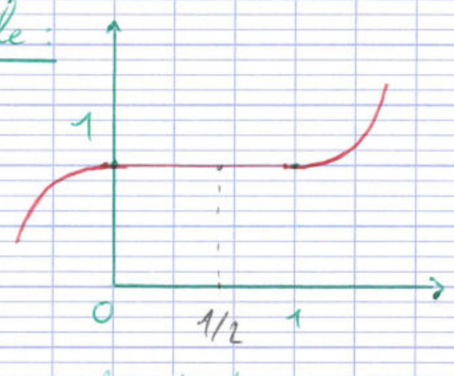
donc $f'(a) \geq 0$

* si $x < a$: on a $\tau_{f,a}(x) \leq 0$
donc, de m̂ $f'(a) \leq 0$

CCL : $f'(a) = 0$

(?) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ supposée $\mathcal{C}^2$
Soit $a \in \mathring{I}$
Mq $\left.\begin{array}{l} f'(a) = 0 \\ f''(a) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ admet un min local en a

<u>Exemple :</u>



ici : f admet un min et un max local en 1/2, mais ils ne sont pas stricts

(?) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $a \in \mathring{I}$
Osq $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et f admet un min local en a

1) Osq $f' \neq 0$ au $\mathcal{V}(a)$ sauf en a
Mq f' change de signe

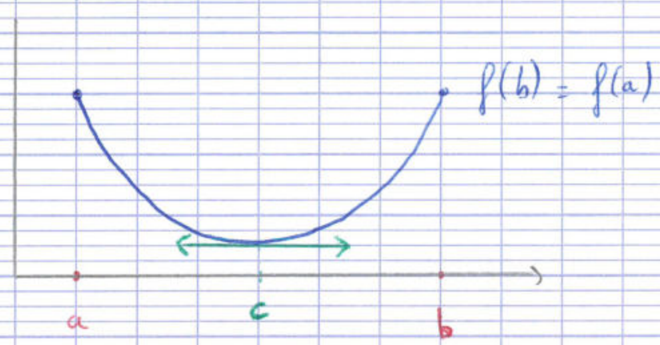
2) Contre exemple sans l'hypothèse : $f' \neq 0$ au $\mathcal{V}(a)$ sauf en a

3) !! Théorème de Rolle ($\mathbb{C}$ - faux)

Théorème : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ C^0 sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
Alors, on a : $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in]a, b[: f'(c) = 0$

Dessin :



Démo : D'après le thm des bornes atteintes,
soit $x_M \in [a, b]$ tq f est maximale en x_M
ie tq $f(x_M) = \sup\limits_{t \in [a,b]} f(t)$

a) Si $x_M \in]a, b[$, on applique le lemme de l'extremum local à x_M. En effet, f admet un max local en x_M. $f'(x_M) = 0$ (f est dériv. en x_M)

b) $x_M = a$ ou $x_M = b$
D'après le m̂ théo, soit $x_m \in [a, b]$ tq f est minimale en x_m. On distingue deux cas:
i) $x_m \in]a, b[$
On applique le lemme de l'extremum local à x_m.
En effet : 1°) f est dérivable en x_m
2°) f admet un min local en x_m
donc $f'(x_m) = 0$

ii) $x_m = a$ ou $x_m = b$

On a $f(a) = f(b)$

donc $f(a) = f(b) = f(x_m)$

et $f(a) = f(b) = f(x_M)$

donc $\forall t \in [a, b]$, $\underbrace{f(x_m)}_{\overset{\shortparallel}{f(a)}} \leq f(t) \leq \underbrace{f(x_M)}_{\overset{\shortparallel}{f(a)}}$

donc $f = \widetilde{f(a)}$

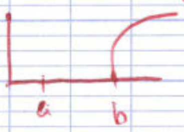
donc $f' = 0$, donc $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$

<u>Exemple :</u> $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et non dérivable en a ni en b

Idée : $\sqrt{\cdot}$

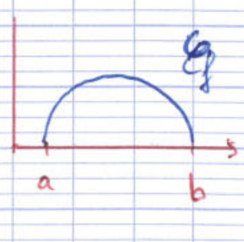
on regarde $\sqrt{x-a}$

- $\sqrt{x-b}$

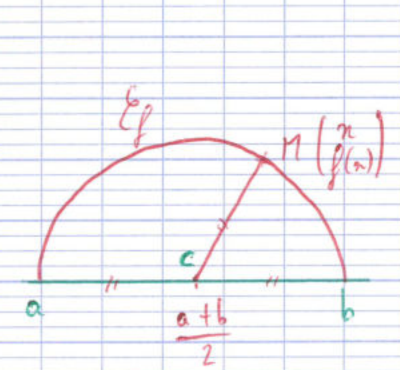


- $\sqrt{b-x}$

- $\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$ ok
- $\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}$ ie $\sqrt{(x-a)(b-x)}$



Autre idée :



On a $MC = \frac{b-a}{2}$

donc $MC^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

Or $MC^2 = (x - x_c)^2 + (y_M - y_c)^2$

$= \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + f(x)^2$

CCL : $f(x)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$

$= [b - x][-a + x]$

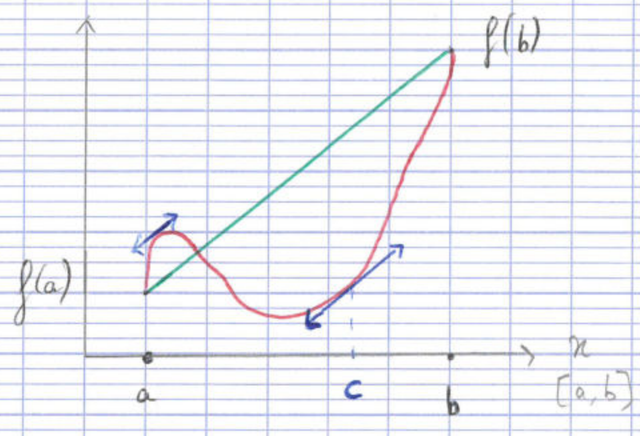
Or $f \geq 0$ donc $f(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}$

4) Théorème des accroissements finis (TAF)

Théo : (C-faux)

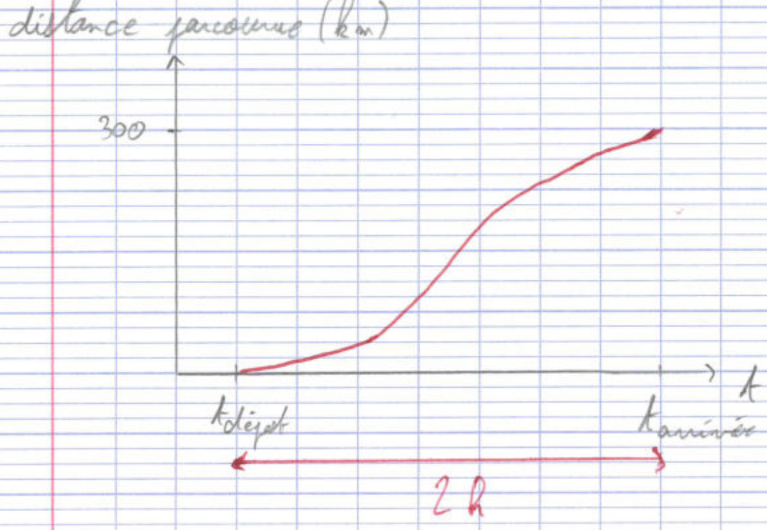
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$
dérivable sur $]a, b[$

alors $\exists c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Interprétation cinématique

. Paris - Angers = 300 km
. durée du trajet = 2 h en TGV

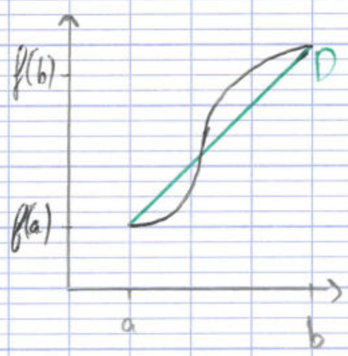


Alors, il existe un instant pdnt le trajet où la vitesse instantanée du TGV vaut exactement $\frac{300}{2} = 150 km/h$

Démo :

Idée : On "redresse" f pour qu'elle vérifie les hypothèses du thm de Rolle ie soustraire à f la bonne qté

On a :



R^x : on a $D : y = \frac{f(b)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)$

On note $D(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$

On pose $\varphi(\cdot) := f(\cdot) - D(\cdot)$

On a $D(a) = f(a)$ et $D(b) = f(b)$

d'où $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 0$

On a $\varphi \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$

Donc, d'après le thm de Rolle, soit $c \in]a,b[$ tq $\varphi'(c)=0$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $D'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

donc $f'(c) = D'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Contre-exemple important

Rolle et TAF sont faux pour $f : I \to \mathbb{C}$

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$

On a $f(0) = e^{i0} = 1 = f(1) = e^{2i\pi} = 1$

On a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Si Rolle était vrai, on aurait un $c \in]0,1[$ tq $f'(c) = 0$

Or, [illegible] $\mathbb{R}^\times$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 2i\pi f(t)$

En particulier, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| = |2i\pi| \cdot |f(t)|$

$= 1$ $\mathbb{R}^\times$

$e^{i\theta} \in \mathbb{U}$

CCL : Rolle et TAF $\mathbb{C}$-faux

5) Inégalité des accroissements finis ($\mathbb{C}$ - vrai)

a) Version réelle

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable

Soit $m, M \in \mathbb{R}$

1) Osq $\forall t \in I$, $m \leq f'(t) \leq M$

Alors $\forall x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x)$

2) !!! Osq $\forall t \in I$, $|f'(t)| \leq M$

Alors $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

contrôle sur la dérivée $\Rightarrow$ contrôle sur f

Démo :

1) Soient $x, y \in I$

. si $x = y$: ok

. Osq $x < y$. On a $[x, y] \subset I$

et $f \in \mathcal{C}([x,y], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]x,y[, \mathbb{R})$

ie f vérifie les hypothèses du TAF

Soit donc $c \in]x, y[$ tq $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y-x}$

Or, $m \leq f'(c) \leq M$ et $y - x > 0$

donc, on a $m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x)$

2) Osq $\forall t \in I, |f'(t)| \leq M$

donc $\forall t \in I, -M \leq f'(t) \leq M$

Soient $x, y \in I$

deux cas :

. si $x \leq y$: 1) s'applique avec $\begin{cases} m = -M \\ M = M \end{cases}$

$$-M(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x)$$

$$\text{ie } |f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$$

. si $y \leq x$: de m̂ en échangeant x et y

b) Version complexe

Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ supposée $\mathcal{C}^1$

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall t \in I, |f'(t)| \leq M$

module

Alors

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$$

module — valeur abs.

Démo :

Soient $x, y \in I$. Osq $x \leq y$

On a $f' \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$: en particulier, on peut intégrer f'

On a $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,dt$

car on intègre ds le bon sens

donc $|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t)\,dt \right| \leq \int_x^y |f'(t)|\,dt$

inégalité triangulaire pour les intégrales ds $\mathbb{C}$

$$|f(y)-f(x)| \leqslant \int_x^y M \, dt = M(y-x) = M \cdot |y-x|$$

VI, Dérivée et monotonie

1) Extension aux bornes de qq propriétés

Fait 1 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et constante sur $\mathring{I}$
Alors f est constante sur I

Démo : Soit $c \in \mathbb{R}$ tq
$\forall x \in \mathring{I}, f(x) = c$

Soit $\alpha \in I \setminus \mathring{I}$
Soit $(x_n)_n \in \mathring{I}^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to \alpha$
On a $f(x_n) \to f(\alpha)$
et $\forall n$, $f(x_n) = c$
donc $f(\alpha) = c$

Fait 2 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue
Alors, $f \nearrow$ sur $\mathring{I}$ $\Rightarrow$ $f \nearrow$ sur I
de même, $f \nearrow\nearrow$ sur $\mathring{I}$ $\Rightarrow$ $f \nearrow\nearrow$ sur I

Démo :

1) Osq $f \nearrow$ sur $\mathring{I}$
Soit $\alpha \in I \setminus \mathring{I}$
Soit $b \in \mathring{I}$ tq $\alpha < b$ on veut mq $f(\alpha) \leqslant f(b)$
Soit $(a_n)_n \in \mathring{I}^{\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} a_n \to \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b \end{cases}$

On a $f(a_n) \leq f(b)$ car $f \nearrow$ sur $\mathring{I}$

$\downarrow$ car f c^0 en α

$f(\alpha)$

CCL : $f(\alpha) \leq f(b)$

2) Osq $f \nearrow\nearrow$ sur $\mathring{I}$

On a $f \nearrow$ sur I

Soient $\alpha \in I \setminus \mathring{I}$, $b \in \mathring{I}$ tq $\alpha < b$

On a : $\dfrac{\alpha+b}{2} \in \mathring{I}$ et $\dfrac{\alpha+b}{2} < b$

donc $f\left(\dfrac{\alpha+b}{2}\right) < f(b)$

et $\alpha \leq \dfrac{\alpha+b}{2}$ donc $f(\alpha) \leq f\left(\dfrac{\alpha+b}{2}\right)$

d'où $f(\alpha) < f(b)$

2) Caractérisation des fonctions constantes

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$

Alors : $\left(\forall x \in \mathring{I}, f'(x) = 0\right) \Rightarrow f$ constante

Rq : c'est une équivalence

Démo : 1) Mq f est cste sur $\mathring{I}$

Mq $\forall x, y \in \mathring{I}$, $f(x) = f(y)$

On applique l'inégalité des accroisst finis à f entre x et y

En effet : Soient $x, y \in \mathring{I}$ avec $x < y$

On a $\forall t \in [x, y]$, $|f'(t)| \leq 0$

donc $|f(x)-f(y)| \leq 0 \cdot |x-y| = 0$

2) donc f constante sur $\mathring{I}$
donc f constante sur I

Rq : $\mathbb{C}$ - vrai

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C}) \cap \mathcal{D}(\mathring{I},\mathbb{C}) \\ (f|_{\mathring{I}}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ cste sur } I$$

démo : on applique ce qui précède à $Re(f)$ et $Im(f)$

⚠!! c'est faux si I n'est pas un intervalle
c-ex : on prend $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

On a $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $f' = \tilde{0}$ mais f n'est pas constante

3) Caractérisation de la (dé)croissance

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ C^0 sur I et dérivable sur $\mathring{I}$
Alors, on a : $f \nearrow$ sur $I \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0$

Démo :

($\Rightarrow$) Osq $f \nearrow$ sur I
Soit $a \in \mathring{I}$
Soit $x \in I \setminus \{a\}$
On a $\tau_{f,a}(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ car $f \nearrow$

A la limite, on a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \tau_{f,a}(x) \geq 0$

ie $f'(a) \geq 0$

$\Leftarrow$ c'est le TAF. Osq $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$

Mq $f \nearrow$ sur $\mathring{I}$.

Soient $x, y \in \mathring{I}$ tels que $x < y$.

Mq $f(x) \leq f(y)$

On applique le TAF à f sur $[x, y]$

Soit donc $c \in]x, y[$ tq $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geq 0$

donc, $f(y) - f(x) \geq 0$

ie $f(x) \leq f(y)$

4) Caractérisation de la stricte (dé)croissance

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ C^0 sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

Alors, on a :

1) $f \nearrow\nearrow$ sur $I \Rightarrow f' \geq 0$ et $\left\{ x \in \mathring{I} \,\middle|\, f'(x) = 0 \right\}$ ne contient aucun intervalle de longueur > 0

2) En particulier : . $f' > 0 \Rightarrow f \nearrow\nearrow$

. $f' > 0$ sauf en un nombre finis de points où on a $f'(x) = 0$ $\Rightarrow f \nearrow\nearrow$

Démo :

1) Osq $f \nearrow$. On mq $f \nearrow\nearrow \Leftrightarrow \left\{ x \in \mathring{I} \,|\, f'(x) = 0 \right\}$ ne contient pas...

On mq non$(f \nearrow\nearrow) \Leftrightarrow$ il existe un intervalle de $l(\cdot) > 0$ sur lequel f' s'annule

$\boxed{\Rightarrow}$ Osq non ($f \nearrow\nearrow$)

On a non ($f \nearrow\nearrow$ sur $\mathring{I}$)

Soient donc $a, b \in \mathring{I}$ tq $a < b$ et $f(a) \geq f(b)$

Or, $f \nearrow$ donc $\forall t \in [a,b]$, $f(a) \leq f(t) \leq f(b) = f(a)$

$\searrow$ donc $f(a) \leq f(b)$

Donc f est constante sur $[a,b]$

donc $f' = 0$ sur $[a,b]$

$\boxed{\Leftarrow}$ Osq "il existe un intervalle..."

Soient $a, b \in \mathring{I}$ tq $a < b$ et $f' = 0$ sur $[a,b]$

donc f = cte sur $[a,b]$

donc $f(a) = f(b)$

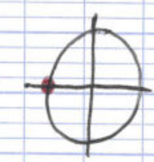
donc non ($f \nearrow\nearrow$ sur I)

<u>Exemple</u>: On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \sin(x)$

On a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \cos(x)$

$$\geq 1 + (-1)$$
$$\geq 0$$

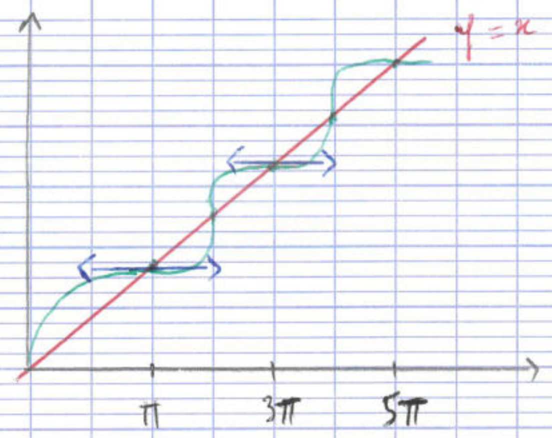
donc $f \nearrow$

et si $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \Leftrightarrow$ 

$\Leftrightarrow x \equiv \pi \,(2\pi)$

donc $\{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle de lg > 0

donc $f \nearrow\nearrow$



VII, Théorème de la limite de la dérivée

1) Théorème

Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue
Soit $a \in I$
Qsq $f \in \mathcal{D}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$
Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Qsq $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} l$

1) Alors : $\tau_{f,a}(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} l$

2) En particulier
   a) si $l \in \mathbb{R}$
   alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$

   b) si $l \notin \mathbb{R}$ (ie si $l = \pm\infty$)
   alors f n'est pas dérivable en a

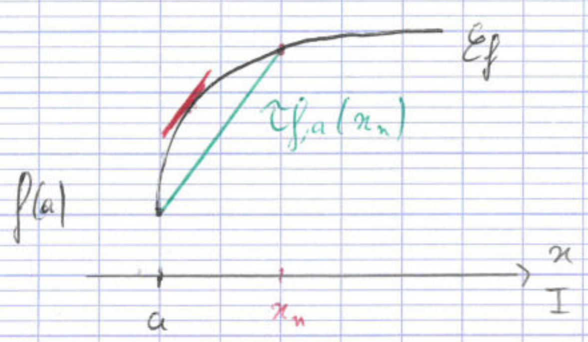
Application :
. $I = \mathbb{R}_+$, $a = 0$, $f = \sqrt{\cdot}$
. On a $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$
. On a $f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ $\left(f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
donc automatiquem^t, on a $\tau_{\sqrt{\cdot},0}(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} +\infty$

Démo : Mq $\tau_{f,a}(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} l$

On utilise la caractérisation séquentielle des limites

Mq $\forall (x_n)_n \in (I \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow \tau_{f,a}(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$

Soit $(x_n)_n \in (I \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to a$



Mq $\tau_{f,a}(x_n) \to l$

soit $n \in \mathbb{N}$ On a f C^0 sur $[a, x_n]$ et dérivable sur $]a, x_n[$

Soit donc d'après le TAF, $c_n \in]a, x_n[$

tq $\tau_{f,a}(x_n) = f'(c_n)$

On obtient une suite $(c_n)_n \in (I \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$

On a $|c_n - a| \leq \underbrace{|x_n - a|}_{\to 0}$

ie $c_n \to a$

. donc $f'(c_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$

car $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} l$

donc $\tau_{f,a}(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$

2) Prolongement des f° continues

Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continue
alors, si f admet une limite finie en a, on peut prolonger f de façon continue sur $[a, b]$

ie $\left(\exists\, l_0 \in \mathbb{R} : \quad f(x) \underset{\substack{x \to a \\ >}}{\longrightarrow} l_0 \right) \Rightarrow \exists\, \tilde{f} \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) : \tilde{f}|_{]a,b]} = f$

3) Prolongement des f° $\mathcal{C}^1$

a) Premier cas

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$

But : dire f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$

Osq $\exists\, l_1 \in \mathbb{R} : f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ >}}{\longrightarrow} l_1$. Fixons un tel l_1

d'après le thm de la limite de la dérivée

On a $\tau_{f,a}(x) \underset{\substack{x \to a \\ >}}{\longrightarrow} l_1$

ie f est dérivable en a et $f'(a) = l_1$
Ainsi, $f \in \mathcal{D}([a, b])$
De plus, on a $f'(x) \underset{x \to a}{\rightarrow} f'(a)$ ie f' est c^0 en a

donc $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$

b) Bilan

__Thm__ : Soit $f \in \mathcal{C}^1(]a,b],\mathbb{R})$
Soient $l_0, l_1 \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} f(x) \underset{x \to a^>}{\longrightarrow} l_0 \\ f'(x) \underset{x \to a^>}{\longrightarrow} l_1 \end{cases}$

Alors : $\exists \tilde{f} \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$: $\tilde{f}|_{]a,b]} = f$

4) $\mathcal{C}^k$

__Prop__ : Soit $f \in \mathcal{C}^k(]a,b],\mathbb{R})$ où $k \in \mathbb{N}$

Soit $(l_0, \dots, l_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tq

$\forall i \in [\![0,k]\!]$, $f^{(i)}(x) \underset{x \to a^>}{\longrightarrow} l_i$

Alors, il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k([a,b],\mathbb{R})$ tq $\tilde{f}|_{]a,b]} = f$

et tq $\forall i \in [\![0,k]\!]$, $\tilde{f}^{(i)}(a) = l_i$

(?) Écrire le cas où $f \in \mathcal{C}^\infty(]a,b],\mathbb{R})$