Chapitre 1

Éléments de logique

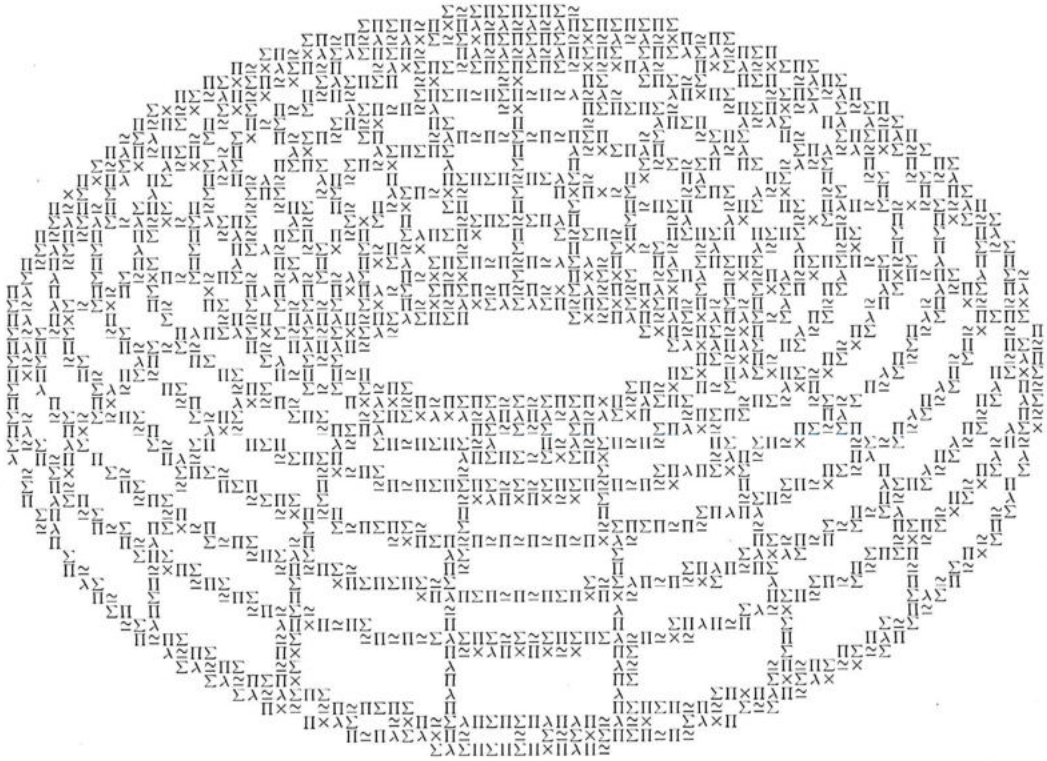


Illustration de couverture du livre
Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics (2013)

Au tournant du vingtième siècle (entre 1880 et 1920), poussées par des paradoxes indépassables, les mathématiques ont été contraintes de s'engager dans une grande tâche de refondation. On a appelé cette période de l'histoire des mathématiques : ***la crise des fondements****. Depuis, les mathématiques ont acquis des fondations solides, formelles.*

Récemment, sous l'impulsion du mathématicien Vladimir Voevodsky (1966–2017), de nouvelles approches de fondation des mathématiques ont émergé.

Dans ce premier chapitre du cours de mathématiques, on se donne un but analogue — mais qu'on poursuivra avec moins de rigueur : définir un cadre dans lequel on peut dire et faire des mathématiques.

Complément du cours

1) Equation de la tangente

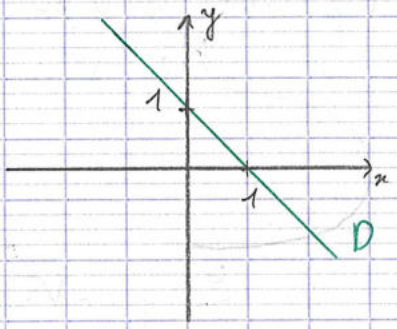
Soit D une droite du plan, munie d'un repère
Tout point M possède des coordonnées, notées (x_M, y_M) ou $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$
D possède une équation : $ax + by + c = 0$ (*) avec $a, b, c \in \mathbb{R}$
(et a et b non tous nuls ie $(a;b) \neq (0;0)$ ie $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

Remarques: - L'équation (*) n'est pas unique
- On note alors $D : ax + by + c = 0$

Cela veut dire !! que :

$$D = \left\{ M(x;y) \;\middle|\; ax + by + c = 0 \right\}$$

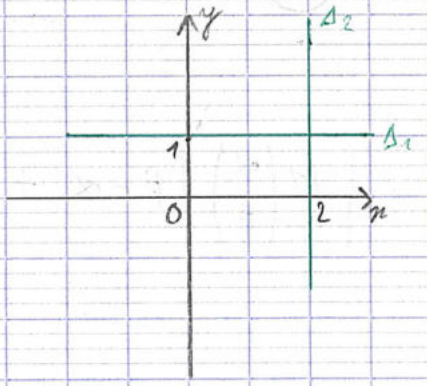
Exemple:



On a : $D : y = -x + 1$

Rq : Si $D : ax + by + c = 0$ alors pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a aussi
$D : \lambda a x + \lambda b y + \lambda c = 0$

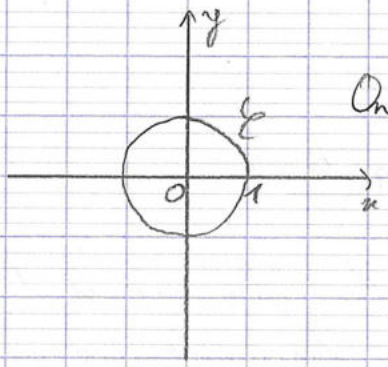
Ex :



$\Delta_1 : y = 1$ $\Delta_2 : x = 2$

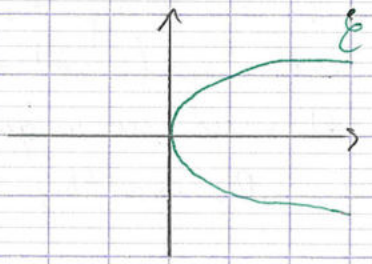
Généralisation : On peut considérer par ex : $\mathcal{E} : y = x^2 + 2$
ou + généralement $\mathcal{E} : y = f(x)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ex :



On a $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 1$

⚠ $\mathcal{C}$ ne peut pas être le graphe d'une fonction car par ex $\mathcal{C} \cap (x=1)$ contient deux points L'courbe $x=1$

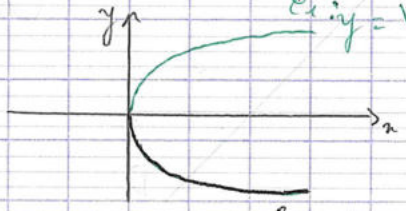


On a $\mathcal{C}$: $x = y^2$

Rq : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

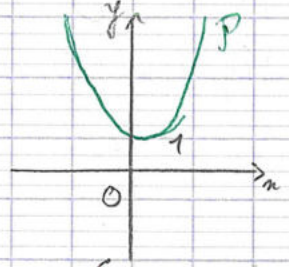
$$x = y^2 \iff \begin{cases} y = \sqrt{x} \text{ et } x \geq 0 \\ y = -\sqrt{x} \text{ et } x \geq 0 \end{cases}$$

Et on a :



$\mathcal{C}_2 : y = -\sqrt{x}$

Considérons :

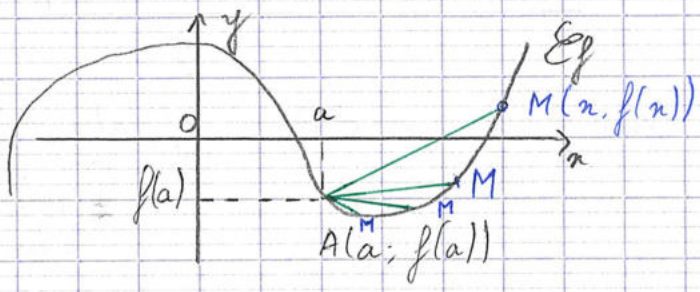


On a : $P : y = x^2 + 1$

On a aussi $P = \left\{ M\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta = \alpha^2 + 1 \right\}$

2) Equation de la tangente (suite)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$: ils st fixés pour la suite
ie : f est une fct de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ie "$D_f = \mathbb{R}$"



On voit que à mesure que M se rapproche de A la pente de [AM] se "stabilise" autour d'une valeur (par en ici -1) qui est la pente de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A.
La pente de [AM] vaut !!

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} \quad \text{ie} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

CCL : la pente de T vaut $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ie $f'(a)$

On a noté T la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A
On a vu que la pente de T est $f'(a)$
Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tq une équation de T soit :

$$T : y = f'(a)\,x + \lambda \qquad (*)$$

On cherche λ.
Idée : la forme $(*)$ est mal adaptée au problème
En effet, ici on travaille autour du "point pivot" A
Donc réflexe : on veut plutôt travailler avec $(x-a)$
Donc : soit donc $\mu \in \mathbb{R}$ tq :

$$T : y = f'(a)(x-a) + \mu$$

On a : $\lambda = \mu - a f'(a)$
On a : $A \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \in T$

On a $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \in T$

Donc on a $f(a) = f'(a)(a-a) + \mu$

Donc $\mu = f(a)$

CCL :

$$\boxed{T = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Rq : On a, si $x \in \mathbb{R}$: $f'(a)x + \lambda = f'(a)(x-a) + af'(a) + \lambda$ (μ)

méthode ajoute / retranche + forcer à apparaître

3) "On a"

Principe de rédaction :

Un énoncé mathématique doit être inclus dans une "phrase en français".

Ex : N'écrivez pas : ~~$2+2=4$~~

Ecrivez : $\boxed{\text{On a } 2+2=4}$

4) Introduisez vos variables

"Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $f(x) = 2x^2 - x - 1$

$= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) - 1$

5) Faites vos calculs

$16 - 24 =$ à calculer

$\sqrt{18} = \ldots$ $\sqrt{12} = \ldots$

6) $\exists$

Si on écrit "$\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \beta + i\gamma$"

⚠ On ne peut pas pour autant utiliser dans la suite les lettres β et γ

En effet, sinon on pourrait écrire :

On a $\exists x \in \mathbb{R}_+ : x^2 = 2$ et $\exists x \in \mathbb{R}_+ : x^2 = 3$

On a donc $x^2 = 2 = 3$

Ainsi on ne peut pas écrire :

"Soit $\alpha \in \mathbb{C}$

On a : $\exists (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \beta + i\gamma$

donc on a $\alpha^2 = \beta^2 - \gamma^2 + 2i\beta\gamma$" non définies

On écrira

"Soit $\alpha \in \mathbb{C}$

Soit donc $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha = \beta + i\gamma$"

7) Utilisation de $\exists$

On l'utilise quand on "dit" des mathématiques (avant la démonstration, après ou dans un théorème connu)

Par ex : "Montrons que $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha^2 = 2$

Posons $\alpha := \sqrt{2}$

On a bien $\alpha \geq 0$ et $\alpha^2 = 2$

Ainsi, on a : $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha^2 = 2$"

8) On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 + 1$ et non $f : x \mapsto 2x^2 + 1$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

9) Pas de -8 au dénominateur

On n'écrit pas : $A = \frac{5 - \sqrt{2}}{-8}$ On écrit : $A = \frac{\sqrt{2} - 5}{8}$

10) On n'écrit pas : $f(x) = 2x^2 - x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Chapitre 1 : Éléments de logique

Pictogrammes utilisés dès le cours

- 💡 idée intéressante, remarquable
- !! passage important
- * passage + difficile qu'on peut passer si nécessaire
- ⚓ (une ancre ↔ passage bateau) facile, ne doit pas poser de difficultés
- ⚠ point délicat

Notation :

On note $a := x$ quand la variable "a" n'est pas encore utilisée et qu'on la définit être égale à x

exemple : Notons $A := \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ On a $A =$ ...

Pour définir une nouvelle notion, on utilisera le symbole $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ qui se lit " si et seulement si de définition "

ex : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est croissante $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Rq : Ce chapitre présentera une version semi-formalisée de la logique. cf : "Théorie des ensembles" Bourbaki

I, Assertions

1) Définitions

Déf. informelle :
Une assertion est une phrase ayant un sens et susceptible d'être vraie ou fausse

ex :
- "il existe une $\infty^{té}$ de nt premiers"
- "il existe un réel α positif ou nul tel que $\alpha^2 = 2$"
- "$\exists \alpha \in \mathbb{R}_- : \alpha^2 = -2$" cette assertion est fausse

On les note généralement P, Q, R etc

Convention : Soit P une assertion.
On écrira "On a P" pour dire que P est vraie

ex :
- "il fait beau"
- "$\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$"
- "$3 = 2$"
- "$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$" n'est pas une assertion C'est un objet.
- "$\forall n \in \mathbb{R}, \Rightarrow n$" n'est pas une assertion
- "$n = 2$" est une assertion
- "$\forall n \in \mathbb{R}, n = n+1$" est une assertion
  ⚠ ici, "n" est une variable muette
- "f est croissante"

Définition : Une assertion P peut dépendre d'une variable x
On note alors $P(x)$
On dit que $P(x)$ est un prédicat de x

. Si $P(x)$ n'a de sens que si $x \in E$ (où E est un ensemble), on dit que $P(x)$ est un prédicat de $x \in E$

. De même, on peut avoir $P(x, y)$, etc

ex : . "x est pair" est un prédicat de $x \in \mathbb{Z}$

. Si $P(x)$ dépend de x, on dit que x est une variable libre dans $P(x)$. Sinon, on dit que x est une variable muette

ex : . "$3x + 2 = 5$" x est libre

. "$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$" x et y : muettes

. "$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{3}{2}$" t : variable muette
f : variable libre
c'est un prédicat de f

Rq : 1) "prédicat" n'est pas défini ici mais "prédicat de x" oui
2) Un prédicat de x est une assertion nécessairement

exc : . "$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$" k est muette ; n est libre

. "$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha^2 = A$" α muette ; A libre

2) Vocabulaire

. Une assertion vraie est appelée un fait
. Une propriété est un fait
. Un fait notable est appelé proposition
. Un théorème est une proposition importante
. Un lemme est un fait qu'on énonce en vue de démontrer une proposition. C'est un résultat intermédiaire

. Un corollaire est un fait qu'on déduit facilement d'un théorème

. Une conjecture est une assertion qu'on pense vraie mais qu'on ne sait pas prouver

. Un axiome est une assertion qu'on ne peut pas prouver mais qu'on déclare vraie.

⚠ Une proposition est toujours vraie

ex : "Tout entier pair $n \geq 6$ est la somme de deux nombres premiers"
conjecture de Goldbach

II. Opérations sur les assertions

Soient P et Q des assertions

1) Négation

Définition : la négation de P, notée (non P), est l'assertion qui est vraie quand P est fausse et qui est fausse quand P est vraie. c'est le contraire de P

On peut représenter cette définition à l'aide de ce qu'on appelle une table de vérité

P	(non P)
V	F
F	V

2) Conjonction (et)

Déf : La conjonction de P et Q, notée (P et Q) est l'assertion qui est vraie quand P est vraie et Q est vraie et qui est fausse dans les autres cas

P	Q	(P et Q)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3) Disjonction (ou)

Déf : L'assertion (P ou Q) est définie par :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Rq : le "ou" mathématique est inclusif.
Ie : si P est V et si Q est V alors (P ou Q) est V

Rq : le "ou" exclusif noté XOR pourrait être défini par :

P	Q	P XOR Q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On a : "P XOR Q = (P et non Q) ou (non P et Q)"
"P XOR Q" = (P ou Q) et (non (P et Q))

4) Négation de la conjonction et de la disjonction

Faisons la table de vérité de (non P ou non Q) et de non (P et Q)

On obtient :

P	Q	non P	non Q	non P ou non Q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

et

P	Q	P et Q	non (P et Q)
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Elles sont identiques

conséquence pratique !!

dans un texte mathématiq, on pourra interchanger librement les assertions (non P ou non Q) et non (P et Q)

On notera (seule^{t} ds ce chapitre) :

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \equiv \text{non } P \text{ ou non } Q$$

↖ est interchangeable avec

C'est la 1ère loi de De Morgan

. De même, on a la 2ème loi de De Morgan :

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) \equiv (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$$

. Et : $\text{non}(\text{non } P) \equiv P$

En : Avec quoi est interchangeable non((P et non Q) ou R) ?
où R est une assertion

On a : non((P et non Q) ou R) $\equiv$ (non(P et non Q)) et non R
$\equiv$ (non P ou (non non Q)) et non R
$\equiv$ (non P ou Q) et non R

5) Implication !!!

a) définition

Déf : L'implication de Q par P, notée P $\Rightarrow$ Q, est l'assertion définie par la table de vérité :

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ainsi : "le faux implique tout"
En : L'assertion
"si le père Noël existe, alors 0=1" est vraie
alors je suis le Pape, etc
alors 1+1=2

A retenir : si P est fausse : P $\Rightarrow$ Q est vraie quel que soit Q

Complément :

Soient P, Q, R des assertions

En général, les assertions (P ou Q) et R et P ou (Q et R) ne sont pas interchangeables. (d'où l'importance des parenthèses)

1) On trouve un contre-exemple

Id est, on trouve 3 assertions P, Q et R telles que (P ou Q) et R et P ou (Q et R) n'aient pas la même valeur de vérité

On prend : P : "1 = 1"
Q : "1 ≠ 1"
R : "0 = 1"

On a :

- P ou Q est vrai (c'est le principe du tiers-exclus : P ou (non P) est une asser vraie qq soit P
- ainsi : (P ou Q) et R a la même valeur de vérité que R.
- P est vrai donc P ou (Q et R) est toujours vrai
- Or, R est fausse

Deux méthodes :

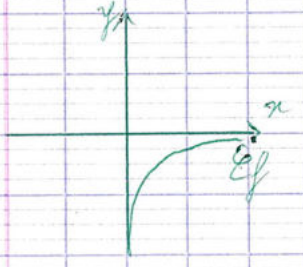
- : chercher un contre ex le + simple possible
- : on a fait une dém dynamique en ne choisissant R que a posteriori

⚠ Quand on donne un contre-ex à une assertion, il faut être le + concret possible en utilisant des objets bien déterminés

exemple : si f croissante $\Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

NON : on donne une fct bien concrète pour contre-exemple :

la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est un contre-exemple



2) deuxième démonstration

On fait les tables de vérité de (P ou Q) et R et de P ou (Q et R)

vocabulaire :

Dans $P \Rightarrow Q$, P est appelée prémisse et Q la conclusion

ex : . ABCD carré $\Rightarrow$ ABCD rectangle

. $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

. $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (faux)

ie $\forall x \in \mathbb{R}$,

b) l'implication n'exprime pas une causalité !

ie $P \Rightarrow Q$ vrai ne signifie pas que P est "la cause" de Q

En effet, par ex, l'implication :

4 est pair $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est vraie

en effet, (4 est pair) est V (prémisse vraie)

et $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$ est V (conclusion vraie)

De même, l'implication :

4 est impair $\Rightarrow$ toute f° continue sur un intervalle qui change de signe s'annule

est vraie.

c) Vocabulaire

Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que :

- P implique Q
- Q est impliquée par P
- Q est une condition nécessaire à P
- P est une condition suffisante à Q.

$P \Rightarrow Q$ (P : suffisante, Q : nécessaire)

- Pour que P (soit vraie), il faut Q
- Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vrai.

d) Implication réciproque

Déf : la réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$

⚠ si $P \Rightarrow Q$ est vraie, il n'y a aucune raison que $Q \Rightarrow P$ le soit

contre-ex : ABCD carré $\Rightarrow$ ABCD rectangle vraie
mais "ABCD rectangle $\Rightarrow$ ABCD carré" est fausse

e) Contraposée

Déf : La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est l'implication
non Q $\Rightarrow$ non P

Proposition : On a :

$$P \Rightarrow Q \equiv \text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$$

Démo: On fait la table de vérité de
$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$

P	Q	non Q	non P	non Q ⇒ non P
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

qui est identiq à la table de vérité de $P \Rightarrow Q$ ■ (démo finie)

↑ ça vient d'1 journal

Exemples: Soit $y \in \mathbb{C}$
On a: $y \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2 \in \mathbb{R}^+$
donc on a: $y^2 \notin \mathbb{R}_+ \Rightarrow y \notin \mathbb{R}$

Rq: ⚠ $P \Rightarrow Q \neq \text{non } P \Rightarrow \text{non } Q$
En effet, on a: $\text{non } P \Rightarrow \text{non } Q \equiv Q \Rightarrow P$
et on a vu que $P \Rightarrow Q \not\equiv Q \Rightarrow P$

Négation de l'implication !!!!

Nier $P \Rightarrow Q$, c'est trouver un contre-exemple à $P \Rightarrow Q$: c'est donc montrer que P est vraie mais Q est fausse
$P \Rightarrow Q$ est fausse quand P est vraie et Q est fausse
ie quand P est vraie et (non Q) est vraie
ie quand (P et non Q) est vraie

Proposition: (négation de $P \Rightarrow Q$)

$$\boxed{\text{non}(P \Rightarrow Q) \equiv P \text{ et non } Q}$$

Démo : avec des tables de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non $(P \Rightarrow Q)$	non Q	P et non Q
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Notation* : On note $P \not\Rightarrow Q$ l'assertion non $(P \Rightarrow Q)$

⚠ faute grave :

non $(P \Rightarrow Q)$ n'a rien à voir avec $Q \Rightarrow P$
on peut le voir avec des tables de vérité

g) "donc" versus "$\Rightarrow$"

On utilisera jamais "$\Rightarrow$" pour abréger la locution "donc".
Ces connecteurs sont fondamentalement différents.

Comparer les phrases suivantes :

- Si Socrate est un chat, Socrate est mortel
- Socrate est un chat $\Rightarrow$ Socrate est mortel
- Socrate est un chat donc Socrate est mortel

"donc" suppose que la prémisse est vraie

h) Une autre écriture de $P \Rightarrow Q$

On a : $\boxed{P \Rightarrow Q \equiv \text{non } P \text{ ou } Q}$

démo : en exo

Exemple: comparer

"Si tu manges trop de sucres (P), tu vas avoir des pb de santé (Q)"
et "ne mange pas trop de sucre ou tu auras des pb de santé"

6) Equivalence

a) définition

Def: L'équivalence entre P et Q, notée $P \iff Q$ est l'assertion définie par la table de vérité:

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

b) lien entre équivalence et double implication

Prop: On a

$$P \iff Q \equiv (P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)$$

démo avec des tables de vérité

c) Vocabulaire

Si $P \iff Q$ est vraie, on dira que:
- P équivaut à Q
- P est une condition nécessaire et suffisante à Q
- P est vraie si et seulement si Q est vraie

donc $\equiv \Rightarrow$ et c'est/ie $\equiv \iff$

d) "ie" versus "⟺"

On n'utilisera jamais "⟺" pour abréger "ie"

Comparer : Soit $x \in \mathbb{R}$

- On a : $2x > 1 \iff x > 1/2$ vrai
- On a : $2x > 1$ ie $x > 1/2$

$2x > 1$ pas forcément vrai dans $\mathbb{R}$

⚠ "Soit $2x > 1$" n'est pas une exp. acceptable
mais "soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $2x > 1$ ie tq $x > 1/2$"

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$
l'assertion :
"$\begin{cases} 2x \geq 3 \\ x^2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 5/2 \\ x^2 = -2 \end{cases}$" est vraie (faux et faux)
On ne peut pas écrire :
On a $1 = 2$ ie ($x^2 = -1$ et $2x \geq 3$)

7) Distributivités entre "et" et "ou"

Prop : Soient P, Q, R des assertions

On a :

a) $\boxed{(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \equiv (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)}$

b) $\boxed{(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \equiv (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)}$

Rq : cf $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a+b)c = ac + bc$

Démo: On fait des tables de vérité

⚠ il y a $2^3 = 8$ lignes

P	Q	R	P et Q	(P et Q) ou R	P ou R	Q ou R	P ou R et Q ou R
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

P	Q	R	P ou Q	(P ou Q) et R	P et R	Q et R	(P et R) ou (Q et R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Complément !!!

- Notons :

P : "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \leq y$" l'assertion P est vraie
Q : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x \leq y$" Q est fausse

Q dit : "il existe un réel $x \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$
ie, Q dit : "il existe un réel $x \in \mathbb{R}$ plus petit que tous les réels"

Fait : Q est fausse

Démo : on raisonne par l'absurde en supposant Q vraie

J'e, osq ("on suppose que")
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$

Fixons un tel x

On a : $\forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$ (*)
Or $x - 1 \in \mathbb{R}$
Donc en remplaçant y par $x-1$ dans (*), on obtient $x \leq x-1$
C'est absurde
Donc Q est fausse ∎

- Peut-on adapter cette preuve pour montrer que P est fausse ?

NON
En effet dans "$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x \leq y$"
le "y" dont on affirme l'existence dépend de x.
Dans Q, on dit que le x qui existe est uniforme
c'est le "m" "x" pour le y.

Fait : P est vraie

Démo : Soit $x \in \mathbb{R}$
Montrons que : $\exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$
Posons $y := x + 1$
On a $x \leq y$
donc on a bien : $\exists y \in \mathbb{R} : x \leq y$

8) Chaines d'implication

Prop : Soient P, Q et R des assertions. On a :

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P)$$
$$\Updownarrow$$
$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow P)$$

Démo : avec des tables de vérité

Ainsi, si on veut montrer que trois assertions sont équivalentes entre elles, en théorie, on devrait montrer 6 implications. Grâce à cette prop, il suffit de prouver 3 implications.

Rq : Ce résultat se généralise à plus que 3 assertions

Rq : Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$.
On dit que l'implication est transitive
De même, l'équivalence est transitive
Ie si $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$ alors $P \Leftrightarrow R$

III, Quantificateurs

Soit E un ensemble
Soit $P(x)$ un prédicat de $x \in E$

1) Quantificateur universel ($\forall$)

a) Remarque

. Dire que $P(x)$ est un prédicat de x, cela veut dire que la variable x dans P est libre. Dans le cas contraire, on dit que x est liée (ou muette)
ex : Dans "$3x + 2 = 8$", la variable "x" est libre
On va pouvoir quantifier sur x.

. Dans $\exists \alpha > 0 : \alpha^2 = 2$, la variable α est liée (muette).

. Si P est une assertion dans laquelle la variable α est muette et si β est une variable absente de P, alors si on note Q l'assertion obtenue en remplaçant dans P α par β, on a $P \equiv Q$

. Dans $\forall x \in E,\ P(x)$. La variable x est muette.
De même dans $\exists x \in E : P(x)$

b) Définition

Def : L'assertion $\forall x \in E,\ P(x)$ est l'assertion qui est vraie quand $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E

Ex :
- "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" est vraie
- "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$" est fausse
  En effet, pour $x = 0$, l'assertion "$x^2 \geq 1$"
  ie "$0^2 \geq 1$" est fausse

c) Assertions universelles quantifiées sur le vide !!!

L'assertion $\forall x \in \emptyset, P(x)$ est (par convention) toujours vraie

ex : "$\forall x \in \emptyset, 0 = 1$" est vraie

Explication

Pour le comprendre, on considère l'assertion $\forall x \in E, P(x)$ comme $\forall x, x \in E \Rightarrow P(x)$
Il s'agit intuitivement des mêmes assertions
Maintenant supposons E vide. Soit x un objet mathématique quelconque. Alors, l'assertion $x \in \emptyset$ est fausse. En effet, $\emptyset$ ne contient aucun élément. Donc $(x \in \emptyset \Rightarrow P(x))$ est vraie et ce pour tout objet x.
Ainsi, On a bien $\forall x, (x \in \emptyset \Rightarrow P(x))$ ie $\forall x \in \emptyset, P(x)$

d) Notations

- Si $P(x, y)$ est un prédicat de $x \in E$ et $y \in E$, on notera : $\forall x, y \in E, P(x, y)$
  l'assertion $\forall x \in E, (\forall y \in E, P(x, y))$

- Dans les contextes adéquats, on notera $\forall x \geq 0, P(x)$
  l'assertion $\forall x \in \mathbb{R}_+, P(x)$

De même pour $\forall n > 0$: P(n) et pour $\forall n \geq_1 y$, P(n), etc.

- Si P(n) est un prédicat de $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $\forall n \geq 1$, P(n) l'assertion $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P(n)

Rq : cette dernière notation est ambiguë mais on se l'autorisera
Quand on écrit "$\forall n \ldots$", on sous-entend que $n \in \mathbb{N}$

⚠ Ecrire :
"Soit $n \in \mathbb{R}$" ← à partir de là, la lettre "n" est déjà prise, je ne peux plus l'utiliser en tant que variable muette
On a $\forall n \in \mathbb{R}$, $n^2 \geq 0$"
est incorrect

Rq : les expressions "Soit $n \in \mathbb{R}$", "Fixons $n \in \mathbb{R}$", "considérons $n \in \mathbb{R}$" sont interchangeables

2) Quantificateur existentiel

a) Définition

Def : L'assertion $\exists n \in E : P(n)$ est l'assertion qui est vraie quand il existe au moins un élément x de E tel que P(x) soit vraie

ex : "$\exists \alpha \geq 0 : \alpha^2 = 2$" est vraie
et "$\exists n \in \mathbb{R} : n^2 = -1$" est fausse

Rq : Si E est vide, l'assertion $\exists n \in E : P(n)$ est toujours fausse

⚠ Si on a $\exists \alpha \in E : P(\alpha)$ on ne peut pas utiliser l'objet α directement. Il faut écrire
"On a $\exists \alpha \in E : P(\alpha)$"
↻ Fixons un tel $\alpha \in E$

ou

" On a $\exists \alpha \in E : P(\alpha)$

Soit donc $\alpha \in E$ tel que $P(\alpha)$

⚠ ↗ en toutes lettres

ex : Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier pair

Soit donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$

b) Notations

Soit E' un ensemble

. Si $P(x, y)$ est un prédicat de $x \in E$ et $y \in E'$

On notera : $\exists x \in E, \exists y \in E' : P(x, y)$

l'assertion $\exists x \in E : (\exists y \in E' : P(x, y))$

. Si $E = E'$. on notera $\exists x, y \in E : P(x, y)$

l'assertion $\exists x \in E, \exists y \in E : P(x, y)$

. On note, dans les contextes adéquats,

$\exists x > 0 : P(x)$

l'assertion $\exists x \in \mathbb{R}_+ : P(x)$, etc

ex : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \left| \frac{1}{2^n} \right| \leq \varepsilon$

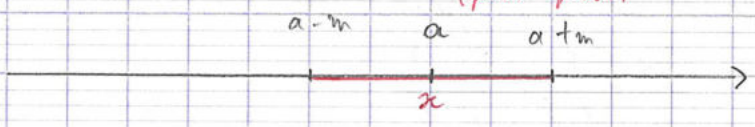
c'est la définition de $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Rq : On a : $\forall x, m \in \mathbb{R}, |x| \leq m \iff -m \leq x \leq m$

ou $\forall m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq m \iff -m \leq x \leq m$

ou $\forall m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R} \quad (|x - a| \leq m \iff a - m \leq x \leq a + m$

(point-pivot)



!!!! $|x - a|$: c'est la distance entre x et a

Je x est distant d'au plus m de a

Ex : la conjecture de Goldbach est :
$\forall n \geq 4$, n pair $\Rightarrow \exists p,q \in \mathcal{P} : n = p+q$

⚠ On n'écrira pas $\forall n \geq 4 \ / \ n$ pair, $\exists p,q \in \mathcal{P} : n = p+q$

Rq : On pourra noter $\exists x \in E, P(x)$ l'assertion $\exists x \in E : P(x)$

3) Quantificateur d'existence unique

a) Définition

Def : L'assertion $\exists ! \, x \in E : P(x)$ est l'assertion vraie quand il existe un unique élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie

ex : "$\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists ! \, a \in \mathbb{R}$, $\exists ! \, b \in \mathbb{R} : z = a+ib$" est vraie
"$\forall A \in \mathbb{R}^+$, $\exists ! \, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha^2 = A$" est fausse
"$\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists ! \, (a,b) \in \mathbb{R}^2 : z = a+ib$ est vraie

b) Notations

On note $\exists ! \, x \in E, \exists ! \, y \in E : P(x,y)$ etc

4) Ordre des quantificateurs !!!

Soient E, E' des ensembles
Soit $P(x,y)$ un prédicat de $x \in E$ et $y \in E'$

a) En général

En général, les assertions :

$\forall x \in \mathbb{E}, \exists y \in \mathbb{E}' : P(x,y)$ (1)

et $\exists y \in \mathbb{E}', \forall x \in \mathbb{E}, P(x,y)$ (2)

ne sont pas du tout interchangeables.

Dans (1), le "y" qui existe à priori dépend de x.

↳ Existe-t-il un $y \in \mathbb{E}'$ qui convienne pour tous les $x \in \mathbb{E}$? En général, non.

Ex : On a :

$\forall x \in$ PCSI3, $\exists y \in$ Humanité : y est la mère de x

Mais a-t-on :

$\exists y \in$ Humanité : $\forall x \in$ PCSI3, y est la mère de x

Quand (2) est vraie, on dit qu'on a trouvé un y uniforme ou qu'on a une existence globale.

b) En revanche, si (2) est vraie, alors en particulier (1) est vraie :

Ie : "$\exists\,\forall \Rightarrow \forall\,\exists$" mais "$\forall\,\exists \not\Rightarrow \exists\,\forall$"

c) Deux "$\forall$" ou deux "$\exists$" successifs sont interchangeables

ie on a :

$$\forall x \in \mathbb{E}, \forall y \in \mathbb{E}', P(x,y)$$
$$\equiv$$
$$\forall y \in \mathbb{E}', \forall x \in \mathbb{E}, P(x,y)$$

et de même pour $\exists$

5) Exemples d'assertions quantifiées

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
Soit $f : I \to \mathbb{R}$
On dit que f est croissante sur I $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$\forall x, y \in I,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
On notera $f \nearrow$ (sauf en DS/DM/etc)

Rq : $\forall x, y \in I,\ x \leq y$ est un prédicat de I : $P(I)$
cette assertion est vraie si I comporte un seul point ou si I est vide

Définition : On dit que f est strictement croissante sur I $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
On notera $f \nearrow\!\!\!\nearrow$

De même, $f \searrow$ et $f \searrow\!\!\!\searrow$

6) $\forall$-assertions et $\exists$-assertions

. Une assertion du type $\forall x \in E,\ P(x)$ sera appellée une $\forall$-assertion
. De même, on définit les $\exists$-assertions

. Une assertion du type : $\forall x \in E,\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$
sera appellée une $\forall \Rightarrow$-assertion

7) Remarque

On ne peut pas écrire : " $\forall x \in E$ tel que $P(x)$, on a $Q(x)$ "
ni " $\forall x \in E,\ P(x)$ on a $Q(x)$ "
ni " $\forall x \in E / P(x),\ Q(x)$ "

On écrira : $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$

Ex : "$\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, on a $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$"
à proscrire

8) Négation des quantificateurs

On a :

$$\text{non}\,(\forall x \in E,\ P(x)) \equiv \exists x \in E : (\text{non}\, P(x))$$
$$\text{non}\,(\exists x \in E : P(x)) \equiv \forall x \in E,\ \text{non}\, P(x)$$

Exemple : Def : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et on note $(u_n)_n \nearrow$
ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$
(De même, on définit $(u_n) \not\nearrow$ et $\searrow, \not\searrow$)

Nions "$(u_n)_n$ croissante" ie on a
$$\text{non}\,((u_n)_n \text{ croissante}) \equiv \exists n \in \mathbb{N} : u_n > u_{n+1}$$
En général, on écrit :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} > u_{n_0+1}$$

⚠ La négation de $f \nearrow$ n'est pas du tout f strict décroissante
non$(f \nearrow)$ n'est pas équivalent à $f \not\searrow$

Par exemple, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, alors f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$
mais elle n'est pas non plus strict. décroissante

IV, Démonstrations : méthodes et exemples !!!

⚠ Les canevas de preuve donnés ci-après sont à suivre strictement

Les exemples de démonstration sont à connaître

1) ∀- assertions

Pour montrer "$\forall x \in E, P(x)$", on écrira :

Mq $\forall x \in E, P(x)$

| Soit $x \in E$
| Montrons que $P(x)$
| (...)
| Ainsi $P(x)$ est vraie

On a montré que $\forall x \in E, P(x)$

Exemple :

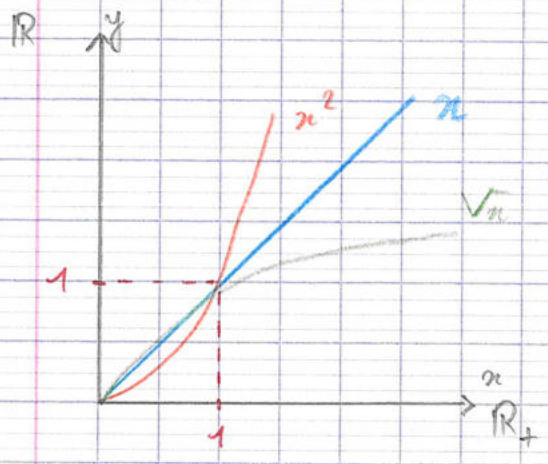
Montrons que $\forall n \geq 1, \sqrt{n} \leq n \leq n^2$

| Soit $n \geq 1$
| Montrons que $\sqrt{n} \leq n \leq n^2$
| On a $n \geq 1$ $(*)$
| donc $n \geq 0$. En multipliant $(*)$ par n on obtient $n^2 \geq n$.
| De plus, $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est croissante
| $t \mapsto \sqrt{t}$
| Donc en l'appliquant à $(*)$ on a $\sqrt{n} \geq 1$ $(**)$
| En multipliant $(**)$ par $\sqrt{n} \geq 0$
| On a $(\sqrt{n})^2 \geq \sqrt{n}$ ie $n \geq \sqrt{n}$
| Donc : $\sqrt{n} \leq n \leq n^2$

CCL : On a montré que $\forall n \geq 1, \sqrt{n} \leq n \leq n^2$ ■

⚠ Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$

Dessin !!



Montrons que $\forall x \in [0,1],\ x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$ (*)

Soit $x \in [0;1]$

On distingue deux cas

- si $x = 0$, on a bien (*)
- si $x > 0$, alors on a $\frac{1}{x} \geq 1$ (car la fonction inverse décroît sur $\mathbb{R}_+^*$)

En appliquant ce qui précède on a donc $\sqrt{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2}$

En repassant à l'inverse on obtient :

$\sqrt{x} \geq x \geq x^2$

Dans tous les cas on a (*)

Ainsi, on a : $\forall x \in [0,1],\ x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$ ■

2) Implications

Pour mq $P \Rightarrow Q$ est vraie, on écrira :

Mq $P \Rightarrow Q$

On suppose P

Mq Q est vraie

(...)

Ainsi Q est vraie

Donc $P \Rightarrow Q$ est vraie ■

Exemple :

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\Rightarrow$ n^2 pair

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Mq n pair $\Rightarrow$ n^2 pair

Supposons n pair

Mq n^2 pair

Soit donc $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k$

Donc on a $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

Ainsi n^2 est pair

Donc on a n pair $\Rightarrow$ n^2 pair

CCL : On a : $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\Rightarrow$ n^2 pair

3) Contraposition

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, on peut écrire :

"Mq $P \Rightarrow Q$ par contraposition

Je mq non Q $\Rightarrow$ non P

Supposons non Q

Mq non P

(...)

CCL : on a bien $P \Rightarrow Q$

Exemple :

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Mq n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

Je mq n impair $\Rightarrow$ n^2 impair

Supposons n impair

Soit donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$

⚠ en toutes lettres pas " , "

On a $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$
Ainsi, n^2 est impair
Donc, on a bien n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

CCL : On a montré que $\forall n \in \mathbb{Z}$, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair ∎

4) Equivalences

Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on raisonne en général par double implication. On réserve les démos par équivalence à quelques cas "bateau".

Exemple :

"la ligne L_1 devient la somme $L_1 + L_2$"

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 8 \\ x - y = 5 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/3 \\ y = 8/3 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/3 \\ y = -7/3 \end{cases}$$

Cette démo est à éviter !!

Exemple :

Résolvons le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$

(ss-entendu : on cherche à expliciter l'ensemble $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x+y = 3 \text{ et } x - y = 5 \right\}$)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que :

$2x + y = 3$ (1)

et $x - y = 5$ (2)

En additionnant (1) et (2), on trouve $3x = 8$ i.e. $\boxed{x = 8/3}$

Puis avec (2) on trouve $\boxed{y = -7/3}$

important | Réciproquement, on vérifie que si $x = 8/3$ et $y = -7/3$, on a bien $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=5 \end{cases}$

CCL : Donc $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=5 \end{cases}\right\} = \left\{8/3 \; ; \; -7/3\right\}$

Exemple : par double implication

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\iff n^2$ pair

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Mq n pair $\iff n^2$ pair

On raisonne par double implication

. Mq n pair $\Rightarrow n^2$ pair

(...)

. Mq n^2 pair $\Rightarrow n$ pair

(...)

Ainsi, on a bien n pair $\iff n^2$ pair

CCL : On a mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\iff n^2$ pair ∎

5) Disjonctions de cas

Exemple :

Mq $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est croissante 💡 c'est une ∀- assertion

Je mq $\forall x, y \geq 0$, $x \leq y \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ (*)

Soient $x, y \geq 0$

Mq $x \leq y \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

(...)

On suppose $x \leq y$

Mq $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

Ici, (*) est une $\forall \Rightarrow$ assertion
Pour mq $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$

on écrira :

Mq $\forall x \in E \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$
| Soit $x \in E$ tel que $P(x)$
| Mq $Q(x)$
| (...)
| Ainsi $Q(x)$ est vraie
On a montré que $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$

Exemple :

Mq $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$ est croissante (ou "croît")

Je mq $\forall x, y \geq 0, x \leq y \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$
| Soient $x, y \geq 0$ tels que $x \leq y$
|
| Mq $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$
| | On distingue deux cas
| | • 1er cas : $x = 0$
| | On a $\sqrt{y} \geq 0$ ie $\sqrt{y} \geq \sqrt{x}$ ce qu'on voulait
| | • Deuxième cas : On suppose $x > 0$
| |
| | On peut écrire : Q astuce : méthode qté conjuguée
| | Q on préfère le ≥ 0
| | $\sqrt{y} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$ (en effet $\sqrt{y} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$)
| | $= \dfrac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$
| | Or $x \leq y$ ie $y - x \geq 0$

Donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} \geq 0$

Ie $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

Dans tous les cas, on a $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

On a mq $\forall x, y \geq 0$, $x \leq y \iff \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

Ie $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante

$x \longmapsto \sqrt{x}$

Rq : Par définition, si $a \in \mathbb{R}_+$,
on a $\sqrt{a} \geq 0$ ($\sqrt{a}$ est l'unique nombre $\delta \geq 0$ tq $\delta^2 = a$)
(existence : admise / unicité : exo)

6) Démonstrations par l'absurde

Théorème : (principe de la preuve par l'absurde)

Soit P une assertion

1) S'il existe une assertion Q fausse telle que $P \Rightarrow Q$ est vraie
alors P est fausse.

2) Si on a $P \Rightarrow$ non P alors P est fausse

Démonstration :

1) On suppose Q fausse et $P \Rightarrow Q$ est vraie
Or, on a : $P \Rightarrow Q \equiv$ non P ou Q
Donc, non P ou Q est vraie
D'après la table de vérité de non P ou Q
le seul cas possible est P fausse

2) On suppose $P \Rightarrow$ non P
Or, on a $P \Rightarrow P$

Donc, on a $P \Rightarrow (\text{non } P)$ et P
Or $(\text{non } P \text{ et } P)$ est fausse
Donc d'après 1), en posant $Q :=$ P et non P, on a P fausse ■

Exemple :

Mq $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
On raisonne par l'absurde
(On suppose $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

(Rappel : On pose $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \text{ et } m \neq 0 \right\}$ ← c'est l'ensemble des élt s'écrivant $\frac{n}{m}$ avec ...

en : $1/3 \in \mathbb{Q}$)

Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que :
. $q \neq 0$
. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (*)
. p et q sont premiers entre eux
En élevant (*) au carré, on trouve que $2 = \frac{p^2}{q^2}$

ie $2q^2 = p^2$
Donc, p^2 est pair
Or p^2 pair $\Rightarrow$ p pair
Donc p est pair
Soit donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$
On a $p^2 = 4k^2$
Donc $2q^2 = 4k^2$ donc $q^2 = 2k^2$
Donc q^2 est pair, donc q est pair
C'est absurde car on a supposé p et q premiers entre eux
Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ■

Rq ⚠ : $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists ! (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} q>0 \\ x=\frac{p}{q} \\ p,q \text{ premiers entre eux} \end{cases}$

7) ∃ assertions

On veut montrer que $\exists x \in E : P(x)$

a) Première méthode

On trouve un $x \in E$ qui convient et qui est explicite.
On écrira :

Mq $\exists x \in E : P(x)$ ← qqch d'explicite
| On pose $x_0 := (...)$
| Vérifions que $P(x_0)$ est vraie
| (...)
| Ainsi $P(x_0)$ est vraie
CCL : On a montré que $\exists x \in E : P(x)$

Exemple :

Mq $\forall x,y \in \mathbb{R}, (x<y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} : x<z<y)$

| Soient $x,y \in \mathbb{R}$ tels que $x<y$
| Montrons que $\exists z \in \mathbb{R} : x<z<y$
| | On pose $z_0 := \frac{x+y}{2}$ Astuce : moyenne des deux
| | On a $x<y$ d'où $2x<x+y$ (1)
| | On a $x<y$ d'où $x+y<2y$ (2)
| | En combinant (1) et (2) on a :

$2x < x+y < 2y$

On a donc $x < \frac{x+y}{2} < y$ ie $x < y_0 < y$

Ainsi, $\exists y_0 \in \mathbb{R} : x < y_0 < y$

On a mq $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x < z < y$ ■

Rq: Quelle est la négation de $x < z < y$

On écrit : $x < z < y \iff \begin{cases} x < z \\ \text{et} \\ z < y \end{cases}$

Ainsi $non(x < z < y) \equiv (x \geq z \text{ ou } z \geq y)$

b) En invoquant une autre ∃-assertion

Exemple:

Mq $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha^2 = 2$

Considérons $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$

On a $f(0) = -2$ et $f(2) = 2$

de plus, f est continue

Donc d'après le TVI, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : f(\alpha) = 0$

Fixons un tel α

On a $\alpha^2 - 2 = 0$ ie $\alpha^2 = 2$

CCL on a mq $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha^2 = 2$

c) Par analyse synthèse !!!

voir + loin :

8) $\exists ! x \in E : P(x)$

. On mq $\exists x \in E : P(x)$ voir 7)

. On mq $\forall x, y \in E,\ P(x) = P(y) \Rightarrow x = y$

Exemple :

Mq $\exists ! f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f = f' \end{cases}$ (*)

Existence : (on trouve une f° - c'est le a)

On considère $f : \exp$ qui vérifie (*)

Unicité :

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

(1) $f(0) = g(0) = 1$

(2) $f = f'$ et $g = g'$

Mq $f = g$

Posons $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{f(t)}{\exp(t)}$

Idée : regarder $\frac{f}{g}$ ou mieux : regarder $\frac{f}{\exp}$

Mq $\frac{f}{\exp}$ est une cste égale à 1

La f° φ est dérivable et si $t \in \mathbb{R}$, on a :

. on écrira $\varphi(t) = e^{-t} \times f(t)$

$\varphi'(t) = (-e^{-t}) \times f(t) + e^{-t} \times f'(t)$

Or $f = f'$

Donc $\varphi'(t) = -e^{-t} f(t) + e^{-t} f(t) = 0$

Donc φ est constante

Or $\varphi(0) = 1$ donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = 1$

Je $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^t$

. De même, $g = \exp$

. Donc $f = g$ d'où l'unicité

CCL : $\exists ! f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f = f' \end{cases}$

9) Analyse - synthèse !!!

Cette méthode de preuve et de recherche d'exos est fondamentale et à maîtriser parfaitement.

Pb qu'on veut résoudre :

1er cas : On cherche à déterminer : $\{x \in E \mid P(x) \text{ est vraie}\}$

2ème cas : Mq $\forall x \in E, \exists! a \in A, \exists! b \in B$: x se décompose en $a+b$ "$x = \varphi(a,b)$" où $\varphi(\cdot,\cdot)$ est une expression.

Méthode : On procède en deux temps.

1°) Analyse

. On considère un élément $x \in E$ vérifiant $P(x)$
(On considère a et b tq on ait réussi à décomposer x selon a et b)

. On déduit de "$P(x)$ vrai" tout ce qu'on peut en déduire.
c'est la "litanie des donc"

. A la fin, on a restreint (le + possible) la liste des x possible.

. On dit qu'on raisonne par conditions nécessaires (CN)

ex : Soit $x \in E$ tq $P(x)$
Alors, on a (...) donc ... donc ... etc
donc $x = 1$ ou $x = 2$

Rq !! Si la liste des x possibles est restreinte à 1 élément alors on a montré l'unicité.

2°) Synthèse

. C'est le sens réciproque
. On vérifie quelles valeurs dans la liste des x possibles obtenue à la fin de l'analyse marchent

Exemple :

Résolvons $\sqrt{2x+3} = x$ dans $\mathbb{R}$
On raisonne par analyse-synthèse

Analyse :
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{2x+3} = x$
Alors on a : $2x+3 = x^2$
Donc on a $x^2 - 2x - 3 = 0$
Donc on a $x = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ où $\Delta := 4 + 3 \times 4 = 16 = 4^2$

Donc on a $x = -1$ ou $x = 3$

Synthèse :
Réciproquement, on a :
. (-1) n'est pas solution
En effet $\sqrt{2 \times (-1) + 3} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$
. 3 est solution car
On a $\sqrt{2 \times 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$

CCL : On a donc $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2x+3} = x \right\} = \{3\}$

On peut aussi écrire $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2x+3} = x \iff x = 3$

Exemple !!!

Mq $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exists ! g$ paire, $\exists ! h$ impaire : $f = g + h$

On procède par analyse-synthèse

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Analyse :

On considère $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

(1) g paire

(2) h impaire

(3) $f = g + h$

ie telles que

(1') $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$

(2') $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = -h(x)$

(3') $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$

Rq : L'analyse-synthèse nous donnera toujours une forme explicite des éléments qu'on cherche

Alors, on a, en fixant $x \in \mathbb{R}$:

$f(-x) = g(-x) + h(-x)$

donc $f(-x) = g(x) - h(x)$ (4)

donc en additionnant (4) et (3'), on obtient :

$f(x) + f(-x) = 2g(x)$

donc $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

donc $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ fin analyse

Ainsi, on a montré l'unicité

Synthèse : (on repend à 0)

Réciproquement, on pose $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{cases}$ et $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$

Vérifions que g est paire, h est impaire et $f = g + h$

ce sont des $\forall$-assertions

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = g(x)$$

$$\text{et } h(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = -h(x)$$

$$\text{et } g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x), \text{ ce qu'on voulait}$$

Ainsi, on a montré :

$$\boxed{\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists!\ g \text{ paire},\ \exists!\ \text{impaire} : f = g + h}$$

V, Principe de récurrence

1) Récurrences simples

Théorème : (Principe de récurrence)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$
Soit $P(n)$ un prédicat de $n \geq n_0$
On suppose que
1°) $P(n_0)$ est vraie
2°) $\forall n \geq n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$
alors, on a : $\forall n \geq n_0,\ P(n)$ est vraie

Démo : admise pour l'instant

Exemples

Mq $\forall a \neq 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Soit $a \neq 1$

On procède par récurrence

On note, pour $n \in \mathbb{N}$:

$P(n)$: " $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ " ♡

Initialisation : $n = 0$

On a $\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1$ et $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$

Hérédité :

Mq $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Mq $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{a^{(n+1)+1}-1}{a-1}$

On calcule :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1}$$

$$= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} \quad \text{d'après } P(n)$$

$$= \frac{a^{n+1} - 1 + (a-1)a^{n+1}}{a-1}$$

$$= \frac{a^{n+2}-1}{a-1}, \text{ ce qu'on voulait}$$

Ainsi, l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

↳ dans le sens du positif

2) Récurrences d'ordre 2

Prop : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$
Soit $P(n)$ un prédicat de $n \geq n_0$
On suppose :
1) $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P(n)$ et $P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$

Démo : exo

Exemple : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Mq $\forall n \geq 0$, $u_n = 2^n + 1$

On raisonne par récurrence
On note, pour $n \in \mathbb{N}$:
$P(n)$: " $u_n = 2^n + 1$ "

Initialisation : ⚠
On a $u_0 = 2$ et $2^0 + 1 = 2$
et on a $u_1 = 3$ et $2^1 + 1 = 3$

Hérédité :
Mq $\forall n \geq 0$, $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$
Soit $n \geq 0$ tq $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies
Mq $P(n+2)$ l'est
On calcule :
$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

$u_{n+2} = 3(2^n + 1) - 2(2^n + 1)$

d'après $P(n)$ et $P(n+1)$ $= 2^{n+1}(3-1) + 3 - 2$

$= 2^{n+2} + 1$

Ainsi $P(n+2)$ est vraie

L'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on a $\forall n \geq 0,\ u_n = 2^n + 1$

Rq : On verra que si $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifie

$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$

où $a, b \in \mathbb{R}$, alors il est facile de trouver une formule pour u_n pour $n \geq 0$

méthode générale :

On considère le polynome $X^2 - aX - b$

On note r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$ ses racines.

Alors, on a :

1) Si $r_1 \neq r_2$

Alors : $\exists C, D \in \mathbb{C} : \forall n \geq 0,\ u_n = C r_1^n + D r_2^n$

2) Si $r_1 = r_2$

Alors : $\exists C, D \in \mathbb{C} : \forall n \geq 0,\ u_n = (C + Dn) r_1^n$

Rq : Si $(u_n)_n$ vérifie $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = a u_n \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$

Alors, on a : $\forall n \geq 0,\ u_n = u_0 \times a^n$

C'est le cas des suites géométriques

3) Récurrence forte !!!

Théorème :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$

Soit $P(n)$ un prédicat de $n \geq n_0$

On suppose que :

1) $P(n_0)$ est vraie

2) $\forall n \geq n_0$, $\left(\forall k \in \{n_0, n_{0+1}, \dots, n\}, P(k) \right) \Rightarrow P(n+1)$

Alors, $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie

Notation : si $a, b \in \mathbb{Z}$, on note :

$$[\![a, b]\!] := \{a, a+1, \dots, b\}$$

Exemple :

Pour $n \geq 2$, on note :

$P(n)$: " n est un produit de nombres premiers "

Mq $\forall n \geq 2$, $P(n)$ est vraie

On raisonne par récurrence forte

Initialisation :

2 est bien un produit de nt premiers, $P(2)$ est vraie

Hérédité forte :

Soit $n \geq 2$

On suppose que $\forall k \in [\![2; n]\!]$, $P(k)$ est vraie (*)

Ie $\forall k \in \{2, \dots, n\}$, $P(k)$ est vraie

Ie : $\forall k \leq n$, $P(k)$ est vraie

Mq $P(n+1)$ est vraie

On distingue deux cas :

Premier cas : $n+1$ est premier

Alors, $n+1$ est bien un produit de nombres premiers

Deuxième cas : $n+1$ n'est pas premier

Soient donc $k, l \in \mathbb{N}$ tq

$$\begin{cases} n+1 = k \times l \\ l \geq 2 \\ k \geq 2 \end{cases}$$

On a $k \leq n$ et $l \leq n$

(Sinon on aurait $k = n+1$ et $l = 1$, absurde)

On sait donc d'après $(*)$ que $P(k)$ et $P(l)$ sont vraies

On fait le produit des décompositions de k et de l, on obtient une décomposition de $(n+1)$:

ie $(P(n+1))$ est vraie

Doù l'hérédité forte

Par récurrence forte, le résultat voulu est vrai.

voir en 2.19

Démo du thm : exo*

(4) Autres types de récurrence

On a également le pincipe de récurrence d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, les récurrences finies, les récurrences descendantes (finies)

999 -> 1000 0 -> n -> n-1

Exo : énoncer ces pincipes