Chapitre 20

Calcul intégral

$$\int_a^b U(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[U(t)V(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)V(t)\,\mathrm{d}t$$

La formule d'intégration par parties

Ce chapitre est consacré à la pratique du calcul d'intégrales. On présentera plusieurs techniques. De loin, de très très loin, la technique la plus importante est ***l'intégration par parties****, dont la formule est donnée ci-dessus.*

Chapitre 20 : Calcul intégral

I intervalle tq $\ell(I) > 0$
$\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I, Intégrales et primitives

1) Primitives

a) Définition

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{K}$
Soit $F : I \to \mathbb{K}$
On dit que F est une primitive de f sur I $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

- $F \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$
- $F' = f$

Exemples !! :

- Soit $n \in \mathbb{N}$. on note $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n \end{array}$

Une primitive de f_n est $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$

- Soit $a \in \mathbb{R}$ un point-pivot
On regarde l'expression $\dfrac{(t-a)^n}{n!}$

Alors une primitive de cette expression R^* $\dfrac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

démo : On pose $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto t - a$

et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

On a $u, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

et : $\forall x, \varphi'(x) = \dfrac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \dfrac{x^n}{n!}$

donc $\varphi \circ u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
et $\forall t \in \mathbb{R}$, $(\varphi \circ u)'(t) = \varphi'(u(t)) \times u'(t)$
$= \dfrac{(t-a)^n}{n!}$

- On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \mapsto e^{it}$
Une primitive de f est $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \mapsto \dfrac{e^{it}}{i}$

- Plus généralement : si $\alpha \in \mathbb{C}^*$ une primitive de $t \mapsto e^{\alpha t}$ est $t \mapsto \dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha}$

- Application
Soient $a, b \in \mathbb{R}$
On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto e^{at} \cos(bt)$
On cherche une primitive de f

On passe par $\mathbb{C}$
On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \mapsto e^{at} e^{ibt} = e^{(a+ib)t}$

Une primitive de φ est $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$$t \mapsto \frac{e^{(a+ib)t}}{a+ib}$$

Or, la dérivation est compatible avec $Re(\cdot)$ et $Im(\cdot)$

Ie : $Re(\Psi)' = Re(\Psi')$

Or, $Re(\varphi) = f$ et $\Psi' = \varphi$

donc $Re(\Psi') = f$

Calculons $Re(\Psi)$
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Psi(t) = \frac{e^{at}e^{ibt}}{a+ib} = \frac{e^{at}e^{ibt}(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}$$
$$= \frac{e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)(a-ib))}{a^2+b^2}$$

donc $Re(\Psi(t)) = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bt) + b\sin(bt)\right)$

Bilan : cette expr. est une primitive de $e^{at}\cos(bt)$

. Considérons $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$
$$x \mapsto e^{-x^2}$$

⚠ Toute f° continue admet des primitives
Alors f n'admet pas de primitive qui s'exprime en terme de f° usuelles

b) Primitives usuelles

Expression de la fonction	Expression de la primitive	Intervalle de validité
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$ (où $\alpha \in \mathbb{C}^*$)	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$-\ln\|\cos x\|$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

Forme de la fonction	Primitive
$u' \exp(u)$	$\exp(u)$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u' f(u)$	$F(u)$ où $F' = f$
$t \longmapsto f(at+b)$	$t \longmapsto \dfrac{1}{a} F(at+b)$ où $F' = f$

c) Les primitives diffèrent d'une cste

Soit $f : I \to \mathbb{K}$

Soit $F \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ une primitive de f

Fait : Si $C \in \mathbb{K}$, $F + C$ est une primitive de f

Prop : Soient $F, G \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ des primitives de f

Alors $\exists\, c \in \mathbb{K} : G = F + c$

démo : Soit $x \in I$

On a $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x)$
$= f(x) - f(x) = 0$

Or, I intervalle donc $F - G$ est une constante

ie $\exists c \in \mathbb{K} : G = F + c$

2) Théorème fondamental de l'analyse

Admis : si $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, on sait construire

$\int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}$; par extension, on sait le faire si $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$

a) Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue

1) Alors f admet une primitive F qui est $\mathcal{C}^1$

2) mieux : Soit $a \in I$

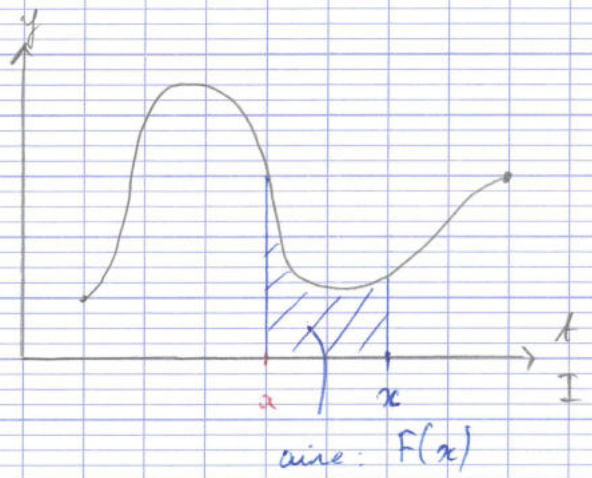
$$F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

alors a) F est une primitive de f

b) F est $\mathcal{C}^1$

c) F est l'uniq primitive de f s'annulant en a

Dessin :



démo : ?

b) Un exemple

On définit $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ si $x > 0$

Rq : $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0. donc on prend 1 comme point base

Application

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On considère la fonction $\frac{f'}{f}$

On cherche une primitive de cette f°

. 1°/ $\frac{f'}{f}$ est définie en x ssi $f(x) \neq 0$

. 2°/ On se place sur un intervalle I où f ne s'annule pas

. 3°/ Alors : f est de signe constant sur cet intervalle

En effet, si f changeait de signe sur I, on aurait d'après le TVI un zéro de f sur I

. 4°/ a) 1er cas : $f > 0$ sur I

On pose $g := \ln \circ f$

On a $g' = \frac{f'}{f}$ sur I

b) 2ème cas : $f < 0$ sur I

on pose $g := \ln \circ (-f)$

On a $g' = \frac{(-f)'}{-f} = \frac{f'}{f}$

. 5°/ Bilan :

Une primitive de $\frac{f'}{f}$ sur un intervalle où elle est définie est $\ln(|f|)$

c) Un corollaire important

Corollaire : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue
Soient $a, b \in I$
On considère une primitive F de f

Alors, on a : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Notation : on note $[F]_a^b := F(b) - F(a)$

Démo : On note $\Psi : I \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Ψ est une primitive de f comme F

Soit donc $c \in \mathbb{R}$ tq $\Psi = F + c$
on a $\Psi(a) = F(a) + c$
donc $c = -F(a)$
En b, on a : $\Psi(b) = F(b) + c$
ie $\Psi(b) = F(b) - F(a)$
ie $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

d) Une application

Fait : Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$ tq $\forall x \in J$, $\varphi(x) \in I$ et $\psi(x) \in I$

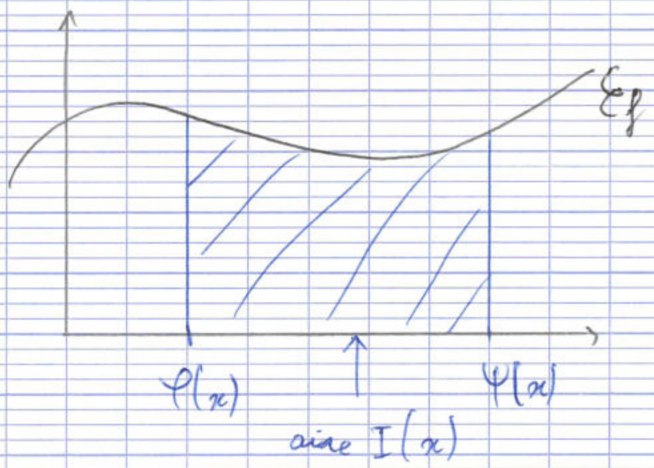
ie $J \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} I \longrightarrow \mathbb{R}$

Alors, la fonction $J \xrightarrow{I(\cdot)} \mathbb{R}$

$x \longmapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$

est dérivable et on a , $\forall x \in J$, $I'(x) = \ldots$

Dessin



démo :

On introduit $F(\cdot)$ une primitive de f

Soit $x \in J$, on a $I(x) = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$

et $F \in \mathcal{C}^1$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^1$

donc $I(\cdot) \in \mathcal{D}^1$

Et on a : $I'(x) = \psi'(x)\, f(\psi(x)) - \varphi'(x) \cdot f(\varphi(x))$

(?) On considère $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \int_{x}^{x^2} \frac{1}{1+e^{t^2}}\,dt$

Mq I est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer I'

Remarque !!

Fait : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f

Alors : F a un cran de régularité de plus que f

ie $\forall p \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^p \Rightarrow F \in \mathcal{C}^{p+1}$
et $f \in \mathcal{C}^\infty \Rightarrow F \in \mathcal{C}^\infty$

démo : ok

Solution de l'exo :

La fct $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1+e^{t^2}} \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$ par opérations sur les fct $\mathcal{C}^\infty$ et car $\exp(\cdot)$ l'est

On note $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors $F(\cdot)$ est $\mathcal{C}^\infty$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $I(x) = F(x^2) - F(x)$

Par composition entre fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on a bien $I(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $I'(x) = \dfrac{2x}{1+(e^{x^2})^2} - \dfrac{1}{1+e^{x^2}}$
$= \dfrac{2x}{1+e^{x^4}} - \dfrac{1}{1+e^{x^2}}$

II, Intégrations par parties

1) Enoncé

Théorème

Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$

Soient $a, b \in I$

Alors, on a :

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = \left[f(t)\,g(t) \right]_a^b - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$$

Remarques:

- On peut aussi écrire

$$\int_a^b \psi(t)\,\varphi(t) = \left[\psi(t)\,\tilde{\varphi}(t) \right]_a^b - \int_a^b \psi'(t)\,\tilde{\varphi}(t)\,dt$$

où $\tilde{\varphi}(\cdot)$ est une primitive de $\varphi(\cdot)$

- On fait une IPP qd on veut intégrer un produit où figure une f° facilet primitivable (exp, sin, cos, t^n, etc)

Démo : On a $(fg)' = f'g + fg'$

donc, $\displaystyle\int_a^b (fg)'(t)\,dt = \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt + \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$

or, $\int_a^b (fg)'(t)\,dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b$

2) Exemples

a) on pose $I = \int_0^{\pi/2} t \sin(t)\,dt$

$\sin(t)$ → donc on intègre $\sin(t)$

t ↑ on dérive t pour simplifier le calcul

Par IPP, on a : $I = \left[-t\cos(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos(t)\,dt$

$= 0 - 0 + \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,dt$

$= \left[\sin(t)\right]_0^{\pi/2}$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= 1$

b) On note $I = \int_0^1 t^2 e^t\,dt$

avant de faire les calculs, on fait au brouillon ou de tête une petite analyse

On a $t^2 e^t = t^2 \times e^t$

deux possibilités :

- on intègre t^2 on fera apparaître $\int_0^1 \frac{t^3}{3} e^t\,dt$
  A priori : mauvaise idée car on complexifie notre calcul
- on dérive t^2, on obtient $\int_0^1 2t e^t\,dt$

Puis pour $\int_0^1 2te^t\,dt$, on réitère

Par IPP, on a $I = [t^2 e^t]_0^1 - \int_0^1 2te^t \, dt$

$= e - 2\int_0^1 te^t \, dt$

De m̂, on calcule : $\int_0^1 te^t \, dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^t \, dt$

$= e - [e^t]_0^1$

$= e - (e-1) = 1$

CCL : On a $I = e - 2$

(?) Calculer $\int_0^1 t^3 e^t \, dt$ et $\int_0^1 t^n e^t \, dt$ si $n \in \mathbb{N}$

3) Application : calcul d'une primitive de $\ln(.)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'unique primitive de $\ln(.)$ s'annulant au point 1

On a $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \int_1^x \ln(t) \, dt$

Soit $x > 0$

on calcule $\varphi(x)$ par IPP   on va dériver $\ln$.

On a $\varphi(x) = \int_1^x 1 \times \ln(t) \, dt$

$= [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \, dt$

$= x\ln(x) - \int_1^x 1 \, dt$ $= x - 1$ $\mathbb{R}_X^\ell$

$= x\ln(x) - x + 1$

Fait : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x\ln(x) - x$

est une primitive de $\ln(\cdot)$

4) Primitive de arctan(·)

Notons $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'uniq primitive de $\arctan(\cdot)$ qui s'annule en 0

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\Psi(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t)\,dt$

Par IPP, on a $\Psi(x) = \left[t \times \arctan(t)\right]_0^x - \int_0^x t \times \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$\Psi(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^x$$
$$\Psi(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

III. Changement de variables

1) Enoncé

Théorème : Soient I, J des intervalles
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$
Soient $a, b \in J$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Rq : φ doit être $\mathcal{C}^1$ pour que l'expression $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ soit continue

<u>démo</u> : Notons F une primitive de f sur I

On a $F \circ \varphi : J \to \mathbb{K}$ et est $\mathcal{C}^1$

et $\forall t \in J$, $(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$
$= f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$

donc $F\circ\varphi$ est une primitive sur J de $t \mapsto f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$

donc $\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = [F\circ\varphi(t)]_a^b$
$= F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a)$

Or, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a)$

En pratique ; $\varphi(t)$ est une expression simple qui apparaît de façon remarquable dans la fct à intégrer

Ex : $\frac{1}{1+e^t}$ ici c'est e^t qui est remarquable

$\frac{3e^t}{1-e^t}$ ici aussi e^t

2) En pratique !!

Notons $I := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$. Calculons I

1_ idée on fait le change^t de variable $x = \sin(t)$ (*)

2_ on dérive (*) avec les dx et dt

On a $dx = \cos(t)\, dt$

3_ calcul

Donc, $\sqrt{1-x^2}\, dx = \sqrt{1-\sin^2(t)}\, \cos(t)\, dt$
$= \sqrt{\cos^2(t)}\, \cos(t)\, dt$
$= |\cos(t)|\, \cos(t)\, dt$

3 bis_ on interprète les bornes

Ici, on cherche t_1 et t_2 tq $\sin(t_2) = 1$

$\sin(t_1) = 0$

4_ justification

il faut parler de $\mathcal{C}^1$

En effet, $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$ est $\mathcal{C}^1$
$t \mapsto \sin(t)$

5_ conclusion

On a donc $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} |\cos(t)|\, \cos(t)\, dt$

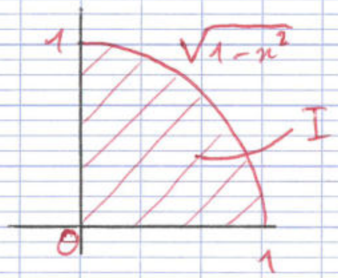
$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt$$

Or, si $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos^2(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2it}+e^{-2it}+2}{4} = \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}$$

donc : $$\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Rq : on a calculé



3) Exemples

Calculons $I := \int_1^2 \ln(x)^2\,dx$

On fait le changet de var $t = \ln(x)$

On a $dt = \frac{1}{x}\,dx$ donc $dx = x\,dt$

Or, $x = e^t$ donc $dx = e^t\,dt$

donc $\ln(x)^2\,dx = t^2 e^t\,dt$

En effet, $\begin{array}{l} [1,2] \longrightarrow [0, \ln(2)] \\ x \longmapsto \ln(x) \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$

Donc, on a : $I = \int_1^2 \ln(x)^2\,dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} t^2 e^t\,dt}_{\text{puis 2 IPP}}$

IV, Calculs classiques à connaître

1) $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $a \neq 0$

On pose $\Delta := b^2 - 4ac$

On note $f : x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

On note $P := aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$

a) $\Delta > 0$

On sait que P admet deux racines distinctes qu'on note α et β

! R^x : On a $P = a(X-\alpha)(X-\beta)$

! On fait une décomposition en éléments simples

On sait que $\exists\, A, B \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{a(X-\alpha)(X-\beta)} = \frac{A}{X-\alpha} + \frac{B}{X-\beta}$$

. Pour trouver A, on "cache $(X-\alpha)$ dans l'expr. de gauche" et on remplace X par α

ie $\dfrac{1}{a\cancel{(X-\alpha)}(X-\beta)} \longrightarrow \dfrac{1}{a(\alpha-\beta)} = A$

. de même pour B

Bilan : On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$

Si $I \subset D_f$ une primitive de f sur I

est $x \mapsto A\ln(|X-\alpha|) + B\ln(|X-\beta|)$

<u>Exemple</u> : on considère $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

On a $Z_{\mathbb{C}}(P) = \{1, 2\}$

On a $\dfrac{1}{X^2-3X+2} = \dfrac{1}{(X-1)(X-2)} = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{B}{X-2}$

avec $A = -1$ et $B = 1$

ie $\dfrac{1}{X^2-3X+2} = \dfrac{1}{X-2} - \dfrac{1}{X-1}$

sur $]1, 2[$, une primitive de f est :

$$x \mapsto \ln(|x-2|) - \ln(|x-1|)$$
$$= \ln(2-x) - \ln(x-1)$$

sur $]-\infty, 1[$, on trouve

$$x \longmapsto \ln(2-x) - \ln(1-x)$$

b) $\Delta = 0$

Soit donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $P = a(X-\alpha)^2$

α est racine double de P

et une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{a(x-\alpha)^2}$

est $x \longmapsto \dfrac{1}{a} (-1) \cdot \dfrac{1}{x-\alpha}$

Rq : de m̂, une primitive de $\dfrac{1}{(3x-2)^2}$ est

$$x \longmapsto \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3x-2}$$

. Soit $X \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$

On a $\displaystyle\int^X \frac{1}{(3x-2)^2}\, dx$

On pose $t = 3x-2$, on a $dt = 3\,dx$

donc
$$\int^X \frac{1}{(3X-2)^2}\, dx = \int^{3X-2} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{dt}{3}$$
$$= \frac{1}{3} \left[\frac{-1}{t} \right]^{3X-2}$$
$$= \frac{-1}{3(3X-2)}$$

c) $\Delta < 0$

Méthode :

1) on met P sous forme canonique

2) on fait des change^t de var. pour se ramener à $\dfrac{1}{t^2+A^2}$

3) on utilise une primitive de $\dfrac{1}{t^2+A^2}$

qui est $\dfrac{1}{A} \arctan\left(\dfrac{t}{a}\right)$

Exemple :

On cherche une primitive de $x \rightarrow \dfrac{1}{1+x+x^2}$

On a $\Delta < 0$

On a $1+X+X^2 = \left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

$$= \left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$

est $x \longmapsto \dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \cdot \arctan\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

ie $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

2) $\displaystyle\int \frac{Q(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$

On vient de traiter le cas $Q=1$

Méthode :

1) on fait une div. euclidienne de Q par P
2) on force à apparaître $2aX+b$
3) on utilise IV.1)

Exemple :

Cherchons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

1) DE

On écrit

$$\begin{array}{r|l} X^3 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2} \underline{X^3+X^2+X} & X-1 \\ -X^2-X & \\ \underline{-X^2-X-1} & \\ 1 & \end{array}$$

Rq : $X^3-1 = X-1(X^2+X+1)$

Cette DE s'écrit $X^3 = \underbrace{(X^2+X+1)}_{\text{diviseur}}\underbrace{(X-1)}_{\text{quotient}} + \underbrace{1}_{\text{reste}}$

On change d'exemple

On note $f : x \mapsto \dfrac{x^3+3x}{1+x+x^2}$

on a $X^3+2X = (X^2+X+1)(X-1) + 3X+1$

CCL : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{(x^2+x+1)(x-1)}{x^2+x+1} + \dfrac{3x+1}{x^2+x+1}$

$$= (x-1) + \frac{3x+1}{x^2+x+1}$$

2) On écrit $\dfrac{3x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot(2x+1) - \frac{1}{2}}{x^2+x+1}$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\frac{3}{2}(2x+1)}{x^2+x+1}$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(1+x+x^2)$

3) Bilan : Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3+3x}{1+x+x^2}$

est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{3}{2}\ln(1+x+x^2)$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

3) Fonctions polynomiales en cos et sin

Exemple : on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin(x)^3 + 2\cos(x)\cdot\sin(x)$$

Pour trouver une primitive de f, il suffit de linéariser cette expression

Complément

Bornes lors d'un changement de variables

$$\int_0^1 f(t)\, dt$$

contient une forme remarquable : $\varphi(t)$

on fait le chang^t de var : $x = \varphi(t)$

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \int_{\text{quand } t=0 \text{ : cb vaut } x ?}^{\text{quand } t=1 \text{ : cb vaut } x ?} \text{nouvelle expression } (x)\, dx$$