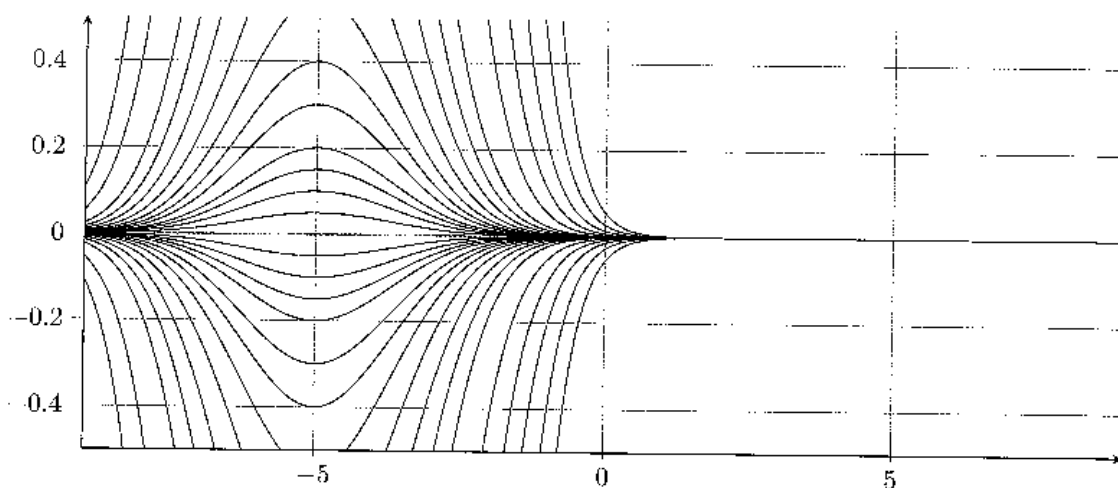


Chapitre 21

Équations différentielles



Graphique des solutions d'une équation différentielle

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir la dérivée de cette fonction. Par exemple

$$y' = y$$

est une équation différentielle dont l'inconnue, notée y , est une fonction. Remarquez (cette remarque est fondamentale) que la fonction exponentielle est solution de cette équation.

L'étude des équations différentielles est une branche très active des mathématiques et dont les applications sont très nombreuses : physique, économie, biologie, etc. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur les cas les plus accessibles mais qui révèlent déjà quelques subtilités et autres phénomènes remarquables.

Chapitre 21: Equations différentielles

- Notations :
- I intervalle de $\mathbb{R}$ tq $l(I) > 0$
 - K sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (on peut regarder $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$)
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$
 - $a_0(\cdot), a_1(\cdot), \dots, a_n(\cdot) \in \mathcal{E}(I, K)$
 - $b(\cdot) \in \mathcal{E}(I, K)$

I, Exemples, vocabulaire, classification

1) Equations différentielles

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction

Ex: $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
équation d'inconnue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

exp $(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution

0 aussi, 1...

si $a > 0$ (A), les fonctions $x \mapsto a^x$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y) (**)$$

(On dit que f est additive)

!! $f \in C^0$ et f solution de $(**)$ $\Rightarrow f \in L(\mathbb{R})$ (λx)

Une équation différentielle est une équation fonctionnelle faisant intervenir la dérivée.

Exemples:

• $f' = f$ où $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\exp(\cdot)$ est solution, $\bar{0}$ aussi

$t \mapsto \exp(t+a)$ où $a \in \mathbb{R}$

$\lambda \exp(\cdot)$ est solution

• $f'' + \omega_0^2 f = 0$ où $\omega_0 > 0$

$t \mapsto A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ sont
solution pour $A, B \in \mathbb{R}$

qui peut s'écrire $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

• $f'' + (f' + f) = 0$: cette ED est non linéaire

Convention d'écriture des ED

L'inconnue est notée y ie $y(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$
et la variable de y est notée t (ou x)

Les ED précédentes se réécrivent :

1) $y' = y$

2) $y'' + \omega_0^2 y = 0$

3) $y''' + y'' + y' + y = 0$

4) $y''(y' + y) = 0$

- $e^{y'''} + \sin(y') = \cosh(t)$

Une solution de cette ED est une $f^\circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable trois fois tq

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cosh(f'''(t)) + \sin(f'(t)) = \cosh(t)$$

Cette ED est non linéaire.

- $y' + e^t y = \frac{1}{t}$

Ici, on prend $I = \mathbb{R}_+^*$

⚠ Cette ED est linéaire

- $y' + y^2 = e^t$ est non linéaire

L'ordre d'une ED est la plus grande dérivée apparaissant dans l'ED.

2) Solution d'une ED

Soit (E) une ED définie sur I d'ordre n

Soit J intervalle de $\mathbb{R}$ tq $J \subset I$

Une solution de (E) sur J est une fonction

$f \in \mathcal{E}^n(J, \mathbb{R})$ telle que quand on remplace $y^{(i)}$ par $f^{(i)}(t)$ on obtient une égalité vraie pour tout $t \in J$.

3) Equations différentielles linéaires

Def: Une EDL d'ordre n est une ED de la forme $\underline{a_n(t)} y^{(n)} + \underline{a_{n-1}(t)} y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) y' + a_0(t) y = b(t)$
 $f: C^0 I \rightarrow \mathbb{R}$

notée (E) ou (E_b)

Loc:

- Le second membre de (E) est $b(\cdot)$
- (E) est dite homogène si $b(\cdot) = \tilde{0}$ notée $EDL^{(h)}$
(on dit que (E) est sans second membre)
- (E) est dite résolue si $a_n(\cdot) = 1$
- (E) est dite à coeff. constants si $\forall i, a_i(\cdot)$ est cste
On note $EDL_{\mathbb{R}}$ ou $EDL_{\mathbb{C}}$

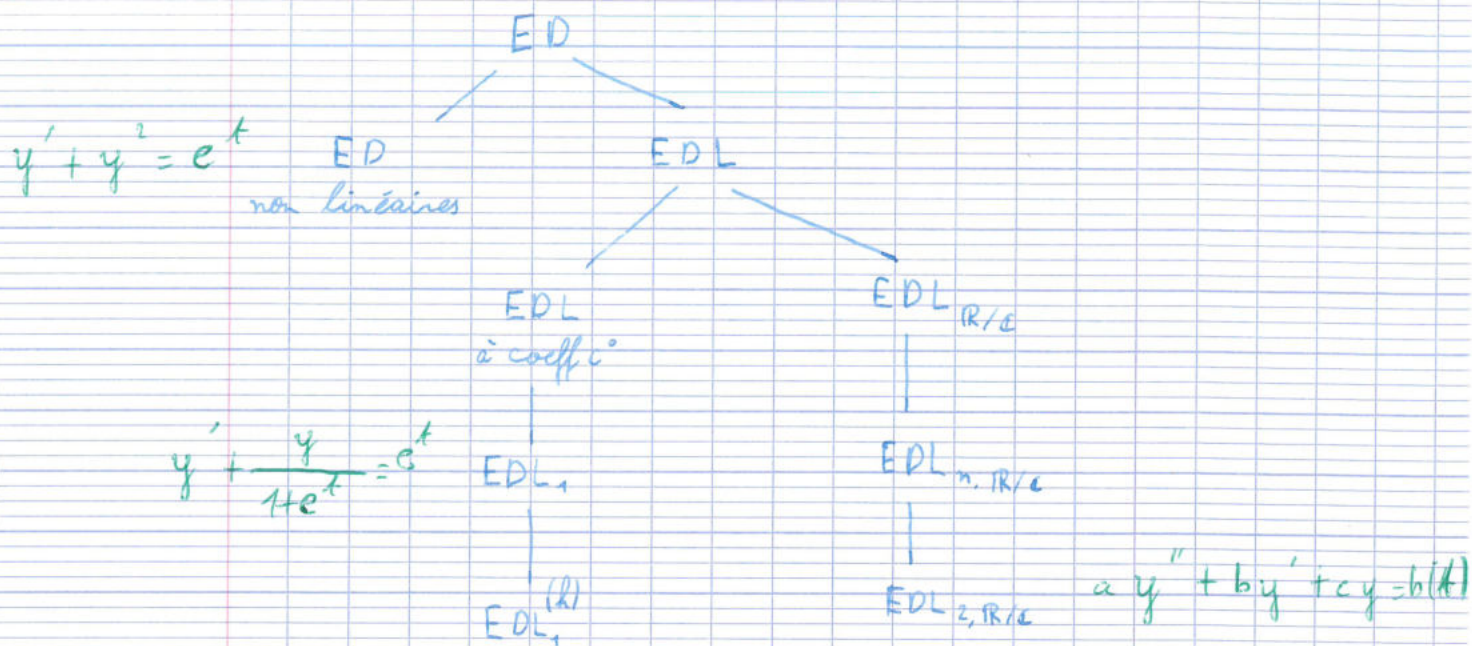
Exemples

$$\bullet y' = y \quad EDL_{1, \mathbb{R}}^{(h)}$$

$$\bullet y'' + \omega_0^2 y = 0 \quad EDL_{2, \mathbb{R}}^{(h)}$$

$$\bullet y' + \frac{y}{1+e^x} = e^x \quad EDL_1$$

4) Bilan: classification des ED



II, Généralités sur les EDL

1) Complément d'algèbres linéaires

Notation : Soient E ev, F sev E et $x_0 \in E$
 On note $x_0 + F := \{x_0 + y \mid y \in F\}$

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{ev. } (\cdot) + \widetilde{\mathbb{R}[t]} &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t + p(t) \end{array} \mid p \in \mathbb{R}[x] \right\} \\ &\quad \searrow \text{sev } \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Fait : Soit $x \in E$

$$\text{Alors } x - x_0 \in F \Leftrightarrow x \in x_0 + F$$

2) Notations

$$\cdot a_0(\cdot), \dots, a_n(\cdot), b(\cdot) \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R})$$

$$\cdot (E_b) : a_n(t) y^{(n)} + \dots + a_1(t) y' + a_0(t) y = b(t)$$

$$\cdot (E_0) : a_n(t) y^{(n)} + \dots + a_1(t) y' + a_0(t) y = 0$$

On dit que (E_0) est l'éq. homogène associée à (E_b)

$$\cdot \text{Sol}(E_b) = \left\{ f \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R}) \mid \forall t \in I, \sum_{i=0}^n a_i(t) f^{(i)}(t) = b(t) \right\}$$

$$\cdot \text{Sol}(E_0) = \left\{ f \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R}) \mid \forall t \in I, \sum_{i=0}^n a_i(t) f^{(i)}(t) = 0 \right\}$$

Enfin, on note :

$$\begin{aligned} \gamma_{(E)} : \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{E}(I, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto \begin{aligned} &I \rightarrow \mathbb{R} \\ &t \mapsto \sum_{i=0}^n a_i(t) f^{(i)}(t) \end{aligned} \end{aligned}$$

3) Premiers faits

Fait 1 : $\gamma_{(E)}$ est bien définie

ie $\forall f \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R})$, $\gamma_{(E)}(f)$ est continue

Soit $f \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R})$

démo : Soit $i \in [0, n]$. Alors $f^{(i)} \in \mathcal{E}^{(n-i)}(I, \mathbb{R})$

donc $f^{(i)} \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R})$

Et $a_i(\cdot) \in \mathcal{E}^0(I, \mathbb{R})$, on a $a_i(\cdot) f^{(i)} \in \mathcal{E}^0(I, \mathbb{R})$

Par CL, c'est bien continu

Fait 2 : $\mathcal{P}_{(E)}$ est linéaire ie $\mathcal{P}_{(E)} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^n(I, \mathbb{R}), \mathcal{E}(I, \mathbb{R}))$

Démo : on sait que $\mathcal{E}^n(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}^{n-k}(I, \mathbb{R})$

$f \mapsto f^{(k)}$
est linéaire si $k \in \mathbb{I} \cap [0, n]$

ie : $\forall f, g \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}$

Soient $f, g \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{On a bien } \mathcal{P}_E(f + \lambda g) &= \sum_{i=0}^n a_i(\cdot) (f + \lambda g)^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i(\cdot) (f^{(i)} + \lambda g^{(i)}) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i(\cdot) f^{(i)} + \lambda \sum_{i=0}^n a_i(\cdot) g^{(i)} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_E(f + \lambda g) = \mathcal{P}_{(E)}(f) + \lambda \mathcal{P}_{(E)}(g)$$

Fait 3

$\mathcal{P}_{(E)}$ surjective $\Leftrightarrow \forall b(\cdot) \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R}), \text{Sol}(E_b) \neq \emptyset$

Rq : Si $\forall i, a_i(\cdot) = \tilde{0}, \mathcal{P}_{(E)} = 0$

Fait 4

$$\text{Ker}(\mathcal{P}_{(E)}) = \text{Sol}(E_0)$$

$$\text{et } \text{Sol}(E_b) = \mathcal{P}_{(E)}^{-1}(\{b(\cdot)\})$$

4) Solution de l'éq. homogène

Prop : $\text{Sol}(E_0)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$\cdot \exists \tilde{0} \in \text{Sol}(E_0)$$

$$\cdot \forall f, g \in \text{Sol}(E_0), \forall \lambda \in \mathbb{K}, f + \lambda g \in \text{Sol}(E_0)$$

5) Solution générale de (E_1) à l'aide d'une solution particulière

Idée: technique du pivot

$$a) \quad a x \equiv b(n) \quad (E)$$

soit x_0 sol. particulière ie $a x_0 \equiv b(n)$

$$\text{On a } (E) \Leftrightarrow a x \equiv a x_0(n) \Leftrightarrow a(x - x_0) \equiv 0(n)$$

$$b) \quad A X = B \quad (E') \quad X_0 \text{ sol particulière}$$

$$(E') \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0$$

$$c) \quad u_{n+1} = a u_n + b$$

$$l = a l + b \quad : \quad l \text{ est une sol. part.}$$

$$u_{n+1} - l = a(u_n - l)$$

Prop:

$$\text{Soit } f_p \in \text{Sol}(E_b)$$

(On dit que f_p est une solution particulière)

$$\text{Alors: } \text{Sol}(E_b) = f_p + \text{Sol}(E_0)$$

Application

Pour résoudre une EDL (E_b), on procède toujours de la façon suivante :

1. on résout (E_0) : c'est facile
2. on cherche une solⁿ particulière
 - a) on la trouve en la cherchant parmi les polynômes, parmi les ctes, etc
 - b) ou : on applique la méthode de la variation de la constante

Démo :

$$\text{Soit } f \in \mathcal{E}^n(I, \mathbb{R})$$
$$\text{On a } f \in \text{Sol}(E_b) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i(\cdot) f^{(i)} = b(\cdot)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_E(f) = b(\cdot)$$

↓
méthode pind

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_E(f) = \mathcal{P}_{(E)}(f_p)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_E(f - f_p) = 0$$

$$\Leftrightarrow f - f_p \in \text{Ker}(\mathcal{P}_E)$$

$$\Leftrightarrow f - f_p \in \text{Sol}(E_0)$$

$$\Leftrightarrow f \in f_p + \text{sol}(E_0)$$

6) Principe de superposition

Prop : Soient $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R})$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} f \in \text{Sol}(E_{b_1}) \\ g \in \text{Sol}(E_{b_2}) \end{array} \right\} \Rightarrow f + \lambda g \in \text{Sol}(E_{b_1 + \lambda b_2})$$

démo:

$$\varphi_{(E)}(f) = b_1$$

$$\varphi_{(E)}(g) = b_2$$

$$\varphi_{(E)}(f + \lambda g) = b_1 + \lambda b_2$$

Exemple:

Si f_1 sol. part.

f_2 —

f_3 —

$$y'' + 5y' - y = e^t$$

$$y'' + 5y' - y = \cos(t)$$

$$y'' + 5y' - y = t^2$$

Alors $f_1 - f_2 + 6.2 f_3$ est sol. part de $y'' + 5y' - y = e^t - \cos(t) + 6.2 t^2$

III, Résolution des EDL₁

Soient $a(\cdot), b(\cdot) \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R})$

On note (E_b) ou (E)

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$\text{et } (E_0) \quad y' + a(t)y = 0$$

1) Étude des EDL₁^(R)

a) Résolution

Théorème: Soit $A(\cdot)$ une primitive de $a(\cdot)$ sur I

$$\text{Alors } \text{Sol}(E_0) = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Rq : on a donc $\text{Sol}(E_0) = \text{Vect}(e^{-A(\cdot)})$

Il s'agit d'un ev de dimension 1

Lémo :

2 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

On note $f(\cdot) := \lambda e^{-A(\cdot)}$

on a $A(\cdot) \in \mathcal{E}^1$ donc $f(\cdot)$ est $\mathcal{E}^1$

$$\text{et } \forall t \in I, f'(t) = -A'(t) \cdot \lambda e^{-A(t)} \\ = -a(t) f(t)$$

$$\text{ie } \forall t \in I, f'(t) + a(t) f(t) = 0$$

$$\text{ie } f \in \text{Sol}(E_0)$$

C : Soit $f \in \text{Sol}(E_0)$

on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f(\cdot) = \lambda e^{-A(\cdot)}$

↳ Astuce : on veut mq une f^0 est cste

$$\text{On pose } \psi(\cdot) = f(\cdot) e^{A(\cdot)}$$

$$\text{On a } \psi \in \mathcal{E}^1$$

$$\text{soit } t \in I$$

$$\text{On a } \psi'(t) = f'(t) e^{A(t)} + f(t) a(t) e^{A(t)} \\ = -a(t) f(t) e^{A(t)} + f(t) a(t) e^{A(t)} = 0$$

Or, I intervalle donc ψ est cste.

b) Exemples

Réolvons $y' = \frac{1}{t \ln(t)} y$ sur $I =]0, 1[$

$$\text{On note } a:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$$

Rq: $\int_{x_0}^x f(t) dt$ est une primitive de f si $x_0 \in I$

changer de x_0 revient à ajouter une cste

$$\text{En effet, } \int_{x_1}^x f(t) dt = \int_{x_1}^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt \\ F_1(x) \quad c \quad F_0(x)$$

Une primitive de $a(\cdot)$ est $t \mapsto \ln(|\ln t|)$
pour $t \in]0, 1[$, on a $\ln t < 0$
donc $A(t) = \ln(-\ln(t))$

$$\text{et } e^{A(t)} = \exp(\ln(-\ln(t))) = -\ln(t)$$

D'après le cours, $\text{Sol}(E_0) = \text{Vect}(-\ln(\cdot)) = \text{Vect}(\ln(\cdot))$

Réolvons $(E_0): y' = \tan(t) y$
sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Soit $t \in I$

$$\text{On écrit } \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{\cos'(t)}{\cos(t)}$$

donc $-\ln|\cos|$ est une primitive de $\tan$ avec $\cos > 0$
sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\text{et } \exp(-\ln \cos(t)) = \frac{1}{\exp(\ln(\cos(t)))} = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$\frac{1}{\cos} \in \text{Sol}(E_0) \text{ et } \text{Sol}(E_0) = \left\{ \frac{\lambda}{\cos} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(?) Résoudre $y' + \frac{y}{1+e^x} = 0$ sur $\mathbb{R}$

Idée : changement de variable

c) $\mathcal{L}$ alternative pour EDL^(IR)

Prop: Soit $f \in \text{Sol}(E_0)$

Alors $f = \tilde{0}$ ou $\forall x \in I, f(x) \neq 0$

démon:

Osq $f \neq \tilde{0}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f = \lambda e^{-A(\cdot)}$

On a $\lambda \neq 0$ donc $\forall t \in I, f(t) = \underbrace{\lambda}_{\neq 0} \underbrace{e^{-A(t)}}_{\neq 0}$

Rq: ie $\exists t_0 \in I: f(t_0) = 0 \Rightarrow f = \tilde{0}$

raffinement :

- $f = \tilde{0}$
- ou $f > 0$
- ou $f < 0$

d) Un isomorphisme important

Prop: Soit $t_0 \in I$

On note $\Psi_{t_0}: \text{Sol}(E_0) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto f(t_0)$

alors 1) Ψ_{t_0} linéaire

2) Ψ_{t_0} est un isomorphisme

démo:

1) ok

2) . Mq Ψ_{t_0} inj

$\mathbb{Q} \mathbb{R}^x$: on calcule $\text{Ker}(\Psi_{t_0})$

Un élément f de $\text{Ker}(\Psi_{t_0})$ est une fonction $f \in \text{Sol}(E_0)$
tg $f(t_0) = 0$

D'après c), elle vérifie $f = \tilde{0}$

$$\text{CCL: } \text{Ker } \Psi_{t_0} = \{\tilde{0}\}$$

. Mq Ψ_{t_0} surj

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$

On cherche $f \in \text{Sol}(E_0)$ tg $\Psi_{t_0}(f) = y_0$

$$\text{Ie on cherche } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tg } \underbrace{\Psi_{t_0}(\lambda e^{-A(\cdot)})}_{\lambda e^{-A(t_0)}} = y_0$$

$$\text{Il suffit de prendre } \lambda := \frac{y_0}{e^{-A(t_0)}}$$

e) Un corollaire

Corollaire: (on quitte provisoirement $\text{EDL}_1^{(2)}$ pour EDL_1)

Soient $f, g \in \text{Sol}(E_1)$

$$\exists t_0 \in I : f(t_0) = g(t_0) \Rightarrow f = g$$

⚠ $\text{Sol}(E_{1(\cdot)})$ n'est pas un ev. En effet, $\tilde{0}$ n'est pas solution en général

démo:

On utilise le principe de superposition

$$f, g \in \text{Sol}(E_{h,1}) \Rightarrow f - g \in \text{Sol}(E_0)$$

On a ici $Y_{t_0}(f - g) = 0$. D'où le résultat.

2) Cas général : résolution des EDL

a) Méthode de la variation de la constante

On veut résoudre $y' + a(t)y = b(t)$

1°) On résout $(E_0) : y' + a(t)y = 0$
On a $\text{Sol}(E_0) = \left\{ \lambda e^{-A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

2°) On cherche une solution particulière de (E_0)
de la forme $f(t) = \lambda(t) e^{-A(t)}$ où $\lambda(\cdot) \in \mathcal{C}^1$

3°) On calcule, pour $t \in I$, on a:

$$f'(t) = \lambda'(t) e^{-A(t)} - \lambda(t) a(t) e^{-A(t)}$$

$$f'(t) + a(t)f(t) = \lambda'(t) e^{-A(t)} - \lambda(t) a(t) e^{-A(t)} + a(t)\lambda(t) e^{-A(t)}$$

⚡ Ça se simplifie! En pratique, c'est le signe qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul

$$\text{ie : } f'(t) + a(t)f(t) = \lambda'(t)e^{-A(t)}$$

4°) Ainsi :

$$f \text{ solution de } (E_b) \Leftrightarrow \forall t \in I, \lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(\cdot) = b(\cdot)e^{A(\cdot)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\cdot) \text{ primitive de } b(\cdot)e^{A(\cdot)}$$

5°) De façon théorique, on peut prendre

$$\begin{aligned} \lambda(\cdot) : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds \end{aligned}$$

où $t_0 \in I$

Conclusion :

La fonction $f_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_p : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \underbrace{\int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds}_{\lambda(t)} \cdot e^{-A(t)}$$

est solution particulière de $(E_{b(\cdot)})$

b) Bilan

$$\text{Sol}(E_{b(1)}) = f_p + \text{Sol}(E_0)$$

c) Conséquences

On a résolu $(E_{b(1)})$

On a mg $\text{Sol}(E_{b(1)}) \neq \emptyset$: toute E.D.L. admet des solutions (même: admet une ∞^{te} de solutions)

d) Exemples

Réolvons $t y' - 2y = t^3 \sin(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Notons $(E_0) : y' = \frac{2}{t} y$

On a $\text{Sol}(E_0) = \text{Vect} \left(t \mapsto \exp(2 \ln(t)) \right)$

On si $t > 0$, on a $\exp(2 \ln(t)) = e^{2 \ln(t)} = (e^{\ln(t)})^2 = t^2$

Donc, $\text{sol}(E_0) = \text{Vect} \left(t \mapsto t^2 \right)$

Cherchons une solution particulière de (E)

On la cherche sous la forme $t \mapsto \lambda(t) t^2$

Soit $\lambda \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

On note $f : t \mapsto \lambda(t) t^2$ on note $y_0(t) = t^2$ si $t > 0$

Soit $t > 0$: on a

$$f'(t) = \lambda'(t) y_0(t) + \lambda(t) y_0'(t)$$

$$f'(t) - \frac{2}{t} f(t) = \lambda'(t) y_0(t) + \lambda(t) y_0'(t) - \frac{2}{t} \lambda(t) y_0(t)$$

$$f'(t) - \frac{2}{t} f(t) = \lambda'(t) y_0(t) + \lambda(t) \left(y_0'(t) - \frac{2}{t} y_0(t) \right)$$

$\hookrightarrow = 0$ car $y_0 \in \text{Sol}(E_0)$

On veut que $\lambda'(t) y_0(t) = t^5 \sin(t)$

ie $\lambda'(t) = \sin(t)$

donc $\lambda(\cdot) = -\cos(\cdot)$ convient

Bilan: On a

$$\text{Sol}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto -\cos(t) t^2 + \lambda t^2 \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarques :

• Si $b(t) = t^5 \sin(t)$

On aurait du chercher une primitive de $t \mapsto t^2 \sin(t)$ par IPP

• Résolvons (E) sur $\mathbb{R}$

On cherche $f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\forall t \in \mathbb{R}, t f'(t) - 2f(t) = t^3 \sin(t)$

On raisonne par analyse-synthèse

Soit f une telle solⁿ

Alors $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ est solⁿ de (E)_{>0}

soit donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tq $\forall t > 0, f(t) = -\cos(t) t^2 + \lambda_1 t^2$

• $f|_{\mathbb{R}^+}$ est sol^o de $(E)_{<0}$

On pourrait mg $\text{Sol}(E)_{<0} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto -\cos(t)t^2 + \mu t^2 \end{array} \middle| \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Soit donc $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall t < 0, f(t) = -t^2 \cos(t) + \mu_1 t^2$$

Question : A-t-on $\lambda_1 = \mu_1$?

Si $t > 0$, on a $f'(t) = -2t \cos(t) + t^2 \sin(t) + 2t \lambda_1$

Si $t < 0$, on a $f'(t) = \text{-----} \mu_1$

Pas de contrainte particulière

Synthèse

Soient $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}$

on note $f_{\lambda_1, \mu_1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \begin{cases} -t^2 \cos(t) + \lambda_1 t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ -t^2 \cos(t) + \mu_1 t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On a $f_{\lambda_1, \mu_1} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$

$$\text{et } \frac{f_{\lambda_1, \mu_1}(t) - f_{\lambda_1, \mu_1}(0)}{t} = t \cos(t) + \lambda_1 t \quad \text{si } t > 0$$

de même si $t < 0$

donc $f_{\lambda_1, \mu_1}'(0) = 0$

CCL: $f_{\lambda_1, \mu_1} \in \text{Sol}(E)$

3) Problème de Cauchy :

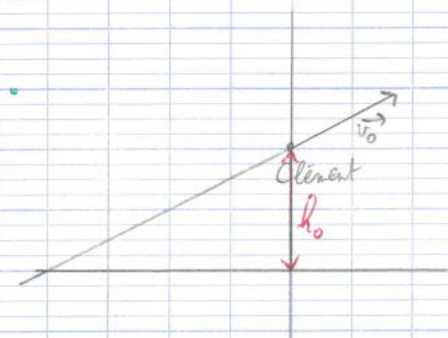
Un pb de Cauchy est la donnée d'une E.D._n et de n conditions initiales

Exemples :



$$h''(x) + \omega_0^2 h(x) = 0$$

$$h(x_A) = 0 \text{ et } h(x_B) = 0$$



$$\begin{cases} m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F} \\ M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + t y = \sin(t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 50y = \cos h(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Idée : Un problème de Cauchy possède une unique solution.

Proof : I intervalle

$$t_0 \in I ; x_0 \in \mathbb{R}$$

alors le pb de Cauchy $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

démo:

Unicité : Soient f, g deux solutions

On a $f, g \in \text{Sol}(E_{b(t)})$ et $f(t_0) = g(t_0)$

On a vu que $f = g$

Existence: Soit $f_p \in \text{Sol}(E_{b(t)})$ (grâce à la variat° de la cste)

On a $f_p + \lambda e^{-A(t)}$ sol° de $(E_{b(t)})$ si $\lambda \in \mathbb{R}$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f_p(t_0) + \lambda e^{-A(t_0)} = x_0$

On prend $\lambda = \frac{x_0 - f_p(t_0)}{e^{-A(t_0)}}$

4) Extension à $\mathbb{C}$

Tout ce qui précède fonctionne avec $a(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{C}$
 $b(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{C}$

IV, Résolution des EDL₂, R/C

1) Cadre d'étude

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$

Soit $b(\cdot) \in \mathcal{E}^0(I, \mathbb{C})$

On considère $(E_0), (E) : ay'' + by' + cy = b(\cdot)$

$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$

On pose $P := aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$: c'est le polynôme caractéristique de (E)

On va étudier le lien $Z_{\mathbb{C}}(P) \leftrightarrow \text{Sol}(E_0)$

2) Fonctions polynomiales - exponentielles

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, on note

$$e_{\lambda} : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{\lambda t} \end{array}$$

$$f_{\lambda} : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto te^{\lambda t} \end{array}$$

Rq: si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\forall t \in I, e_{\lambda}(t) \in \mathbb{R}$ et $f_{\lambda}(t) \in \mathbb{R}$

3) Énoncé complexe

Théorème: On a deux cas

cas n° 1: P admet deux racines distinctes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\text{Alors, } \text{Sol}(E_0) = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \end{array} \mid A, B \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\text{ie } \text{Sol}(E_0) = \text{Vect}(e_{\lambda}, e_{\mu})$$

cas n° 2: P admet une racine double $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\text{Alors, } \text{Sol}(E_0) = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} \end{array} \mid A, B \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\text{ie } \text{Sol}(E_0) = \text{Vect}(e_{\lambda}, f_{\lambda})$$

4) Énoncé réel

Théorème : Osg. $a, b, c \in \mathbb{R}$

On note $\Delta := b^2 - 4ac$

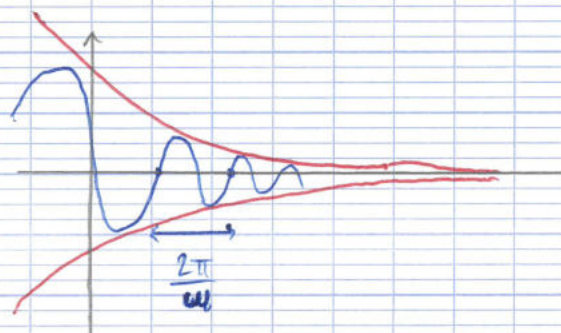
$\Delta > 0$: λ, μ racines de P . $\text{Sol}(E_0) = \text{Vect}(e_\lambda, e_\mu)$

$\Delta = 0$: λ racine double. $\text{Sol}(E_0) = \text{Vect}(e_\lambda, f_\lambda)$

$\Delta < 0$: On a deux racines complexes conjuguées
 $\lambda \pm i\omega$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$

Alors $\text{Sol}(E_0) = \begin{cases} \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \end{cases}$
avec $A, B \in \mathbb{R}$

Rq : si $\lambda < 0$



5) Éléments de démo !!

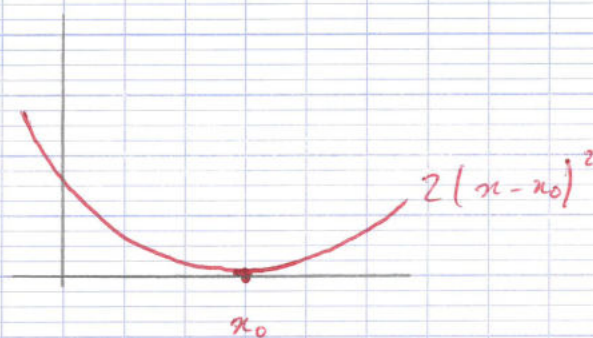
a) Préliminaire polynomial

Prop: $P = aX^2 + bX + c$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

Alors, λ racine double de $P \iff \begin{cases} P(\lambda) = 0 \\ P'(\lambda) = 0 \end{cases}$

Dessin (cas $\mathbb{R}$)



Rq: Ceci se généralise aux racines de multiplicité ≥ 3

démo:

$\Rightarrow$ On a $\Delta = 0$ et $\lambda = -\frac{b}{2a}$

On, $P' = 2aX + b$

donc, on a bien $P'(\lambda) = 0$

$\Leftarrow$ On a $P'(\lambda) = 0$ donc $\lambda = -\frac{b}{2a}$

On, $P(\lambda) = 0$

ie $a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$

$$\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = 0$$

Donc, $b^2 - 4ac = 0$

b) Préliminaire algébrique

Prop : 1) $\lambda \neq \mu \Rightarrow (e_\lambda, e_\mu)$ liée
2) (e_λ, f_λ) liée

démon :

1) On q $\lambda \neq \mu$

Soient $A, B \in \mathbb{C}$ tq $Ae_\lambda + Be_\mu = \tilde{0}$ (*)

Soit $t_0 \in I$, on évalue (*) en t_0 .

On a $Ae^{\lambda t_0} + Be^{\mu t_0} = 0$ (1)

On dérive : $e_\lambda' = \lambda e_\lambda$

et on évalue en t_0

$A\lambda e_\lambda(t_0) + B\mu e_\mu(t_0) = 0$ (2)

(2) - λ (1) : $B(\mu - \lambda) \underset{\neq 0}{e^{\mu t_0}} = 0$ exp: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$

donc $B = 0$

puis avec (1) : $A = 0$

2) $\Pi_q(e_\lambda, f_\lambda)$ liée

Généralisons : on note $f_{\lambda, i} : I \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto t^i e^{\lambda t}$ où $i \in \mathbb{N}$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$\Pi_q(f_{\lambda, 0}, f_{\lambda, 1}, \dots, f_{\lambda, N})$ liée rq, $f_{\lambda, 0} = e_\lambda$

Soit $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ tq $\sum_{k=0}^N a_k f_{\lambda, k} = \tilde{0}$

$$\text{donc } \forall t \in I, \sum_{k=0}^N a_k t^k e^{\lambda t} = 0$$

$$\text{ie } \forall t \in I, \left(\sum_{k=0}^N a_k t^k \right) e^{\lambda t} = 0$$

$$\text{On note } Q := \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$$

$$\text{On, } \forall t, e^{\lambda t} \neq 0$$

$$\text{donc } \forall t \in I, Q(t) = 0$$

On, I est infini donc d'après le critère radical de nullité : $Q = 0$

$$\text{donc } \forall k, a_k = 0$$

c) Une première inclusion

$$\text{Fait 1 : } P(\lambda) = 0 \Rightarrow e_\lambda \in \text{Sol}(E_0)$$

$$\text{démon : Soit } \lambda \text{ tq } P(\lambda) = 0$$

$$\text{On a } e'_\lambda = \lambda e_\lambda \text{ et } e''_\lambda = \lambda^2 e_\lambda$$

$$\begin{aligned} \text{donc } a e''_\lambda + b e'_\lambda + c e_\lambda &= a \lambda^2 e_\lambda + b \lambda e_\lambda + c e_\lambda \\ &= e_\lambda (a \lambda^2 + b \lambda + c) \\ &= P(\lambda) \cdot e_\lambda \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{Fait 2 : } \lambda, \mu \text{ racines de } P \Rightarrow e_\lambda, e_\mu \in \text{Sol}(E_0)$$

$$\Downarrow R^x$$

$$\text{Vect}(e_\lambda, e_\mu) \subset \text{Sol}(E_0)$$

$$\text{Fait 3 : } \lambda \text{ racine double } \Rightarrow P(\lambda) = 0 \Rightarrow f_\lambda \in \text{Sol}(E_0)$$

$$P'(\lambda) = 0$$

démo : On a $f_\lambda' = e_\lambda + \lambda f_\lambda$

$$\begin{aligned}\text{donc } f_\lambda'' &= e_\lambda' + \lambda f_\lambda' \\ &= \lambda e_\lambda + \lambda(e_\lambda + \lambda f_\lambda) \\ &= 2\lambda e_\lambda + \lambda^2 f_\lambda\end{aligned}$$

$$\text{donc } a f_\lambda'' + b f_\lambda' + c f_\lambda = \underbrace{(2a\lambda + b)}_{P'(\lambda)} e_\lambda + \underbrace{(a\lambda^2 + b\lambda + c)}_{P(\lambda)} f_\lambda \stackrel{!!}{=} 0$$

Fait 4 : λ racine double de $P \Rightarrow \text{Vect}(e_\lambda, f_\lambda) \subset \text{Sol}(E_0)$

d) !! Détermination des solutions par 2 CI

Prop : Soit $t_0 \in I$

$$\begin{array}{ccc}\text{On note } \varphi_{t_0} : & \text{Sol}(E_0) & \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ & f & \longmapsto \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}\end{array}$$

Alors :

- 1) φ_{t_0} est linéaire
- 2) φ_{t_0} est injective

démo

1) ok

2) $\mathbb{Q}R^*$: Soit $f \in \text{Ker}(\varphi_{t_0})$

$$\text{On a } f(t_0) = 0 \text{ et } f'(t_0) = 0$$

♣ Astuce : Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ les 2 racines de P

$$\text{On a } P = a(X^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_1\alpha_2)$$

$$\text{On a } af'' + bf' + cf = 0$$

$$\text{donc } f'' + \frac{b}{a}f' + \frac{c}{a}f = 0$$

$$\text{donc } f'' - (r_1 + r_2)f' + r_1 r_2 f = 0$$

$$(f'' - r_1 f') - r_2 f' + r_1 r_2 f = 0$$

$$\text{et } (f' - r_1 f)' - r_2 (f' - r_1 f) = 0$$

$$\text{On note } q := f' - r_1 f$$

$$\text{On a } q' - r_2 q = 0 \leftarrow \text{EDL}_1^{(R)}$$

$$\text{et } q(t_0) = f'(t_0) - r_1 f(t_0) = 0$$

$$\text{donc } q = 0$$

$$\text{donc } f' - r_1 f = 0$$

$$\hat{C} \quad f(t_0) = 0, \text{ on a } f = 0$$

$$\text{Idée : } f \in \text{Sol}(E_0) \Leftrightarrow (aD^2 + bD + c\text{Id}_E)(f) = 0$$

$$\Leftrightarrow P(D)(f) = 0$$

$$\text{On } P = a(X - r_1)(X - r_2)$$

$$\text{donc } P(D) = a(D - r_1 \text{Id}_E) \circ (D - r_2 \text{Id}_E)$$

e) Conclusion

$$\text{On a } \varphi_{t_0} : \text{Sol}(E_0) \rightarrow \mathbb{K}^2 \text{ injective}$$

$$\text{donc } \dim(\text{Sol}(E_0)) \leq 2$$

$$\underbrace{\text{Vect}(e_\lambda, e_\mu)}_{\dim = 2} \text{ sur } \underbrace{\text{Sol}(E_0)}_{\dim \leq 2}$$

donc on a égalité

f) Cas réel ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

Lemme:!! Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C} \in \text{Sol}(E_0)$
alors, $\text{Im}(f)$ et $\text{Re}(f): I \rightarrow \mathbb{R} \in \text{Sol}(E_0)$

démon:

$$\text{on a } a f'' + b f' + c f = 0$$

On passe à $\text{Re}(\cdot)$ et à $\text{Im}(\cdot)$, on obtient :

$$\underbrace{a \text{Re}(f'')} + b \underbrace{\text{Re}(f')} + c \text{Re}(f) = 0$$

car $a \in \mathbb{R}$ $\text{Re}(f)'$ par def.

démon du théo. réel:

si $\Delta > 0$: tout ce qui précède marche encore :

1. $e_\lambda, e_\mu \in \text{Sol}(E_0)$
2. (e_λ, e_μ) libre
3. $\text{Sol}(E_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective

• $\Delta = 0$: de m

• $\Delta < 0$:

on regarde (E_0) dans $\mathbb{C}$

on note $r \pm i\omega$ les racines de P avec $r \in \mathbb{R}, \omega > 0$

on est dans le cas où il y a deux racines cplx distinctes.

on a $e_{r+i\omega}$ solution complexe de (E_0)

$$\text{On, } \operatorname{Re}(e_{\omega+i\omega}) : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\omega t} \cos(\omega t)$$

$$\text{et } \operatorname{Im}(e_{\omega+i\omega}) : t \mapsto e^{\omega t} \sin(\omega t)$$

De plus, $\left(\begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(\omega t) \end{array}, \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(\omega t) \end{array} \right)$ est libre
 $\mathbb{R}(\text{dérivée})$

6) Problème de Cauchy

Théorème : I intervalle tq $l(I) > 0$

$$t_0 \in I$$

$$a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tq } a \neq 0$$

$$P(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}$$

$$\text{Soient } x_0, x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Alors le pt de Cauchy } \begin{cases} a y'' + b y' + c y = P(t) \\ y(t_0) = x_0 \\ y(t_1) = x_1 \end{cases}$$

admet une unique solution

démo : Unicité : ok

Existence : (?) utilise l'astuce

7) Cas particulier des seconds membres exponentiels

$$\text{Soit } c, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$(E) : a y'' + b y' + c y = c e^{\alpha t}$$

Prop :

• si $P(\alpha) \neq 0$:

(E) possède une sol. particulière de la forme $\lambda e^{\alpha t}$

• si $P(\alpha) = 0$ et α racine simple

(E) a une sol. part. de la forme $\lambda t e^{\alpha t}$

• si α est racine double : $\lambda t^2 e^{\alpha t}$

Rq : • on trouve λ en remplaçant $\lambda e^{\alpha t}$ dans (E)

• cette méthode permet aussi de trouver des solutions particulières quand $\varphi(t) = A \cos(\omega t)$ ou $B \sin(\omega t)$

Exemples :

résoudre : a) $y'' + 2y' - y = 42e^t$ (E)

b) $y'' + 2y' - y = 24 \sin(t)$

correction dans le cahier de td.

Le polynôme caractéristique de (E) est $P = X^2 + 2X - 1$

dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$

et les racines de P sont $-1 \pm \sqrt{2}$

D'après le cours, on sait que

1°) $\text{Sol}(E_0) = \text{Vect} \left(t \mapsto e^{-(1+\sqrt{2})t}, t \mapsto e^{(\sqrt{2}-1)t} \right)$

2°) Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $t \mapsto \lambda e^t$ soit solution de (E)

Finons un tel $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda + 2\lambda - \lambda)e^t = 42e^t$

donc $2\lambda = 42$ ie $\lambda = 21$.

CCL: $\text{Sol}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 21e^t + A e^{-(1+\sqrt{2})t} + B e^{(\sqrt{2}-1)t} \end{array} \middle| A, B \in \mathbb{R} \right\}$

Réolvons (E) : $y'' + 2y' - y = 24 \sin(t)$

On a déjà résolu (E₀)

D'après le cours, on sait que $\exists \lambda \in \mathbb{R} : t \mapsto \lambda e^{it} \in \text{Sol}(E_0)$

Faisons un tel λ

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$(-\lambda + 2i\lambda - \lambda)e^{it} = 24e^{it}$$

$$\text{donc } (1-i)\lambda = -12$$

$$\text{donc } \lambda = \frac{12}{i-1} = \frac{12(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} = \frac{-12(1+i)}{2}$$

$$\text{donc } \lambda = -6(i+1)$$

Bilan : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est solution de (E)

$$t \mapsto -6(i+1)e^{it}$$

Notons la f_p

$$\text{On a } \forall t \in \mathbb{R}, f_p''(t) + 2f_p'(t) - f_p(t) = 24e^{it}$$

donc $\text{Im}(f_p)$ est solution de (E).

On calcule si $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Im}(f_p(t)) = -6 | 1 \cdot \cos(t) + 1 \cdot \sin(t) |$$

$$\text{Bilan: } \text{Sol}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto -6(\cos(t) + \sin(t)) + Ae^{-(1+i)t} + Be^{(1-i)t} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{A, B} \in \mathbb{R} \\ \text{+ B.C.} \end{array}$$