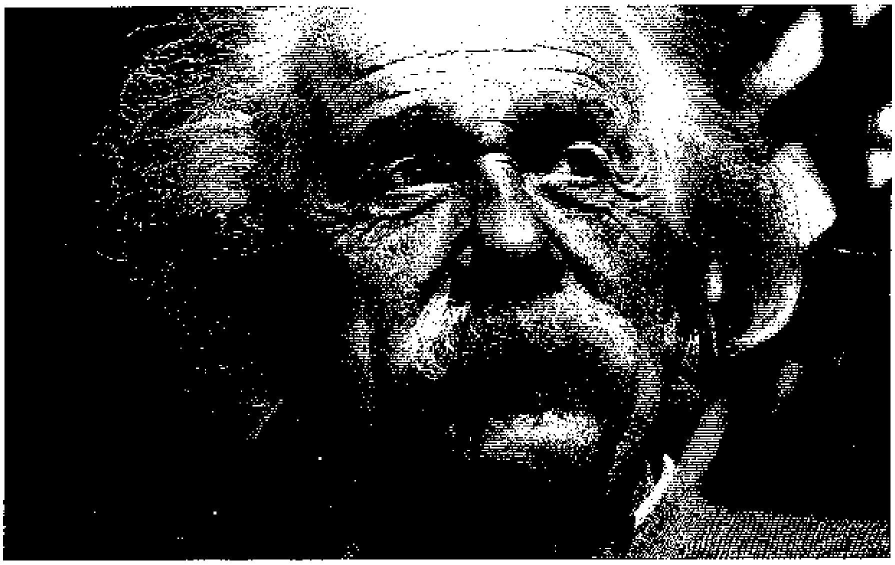
Chapitre 22

Dimension



Albert EINSTEIN
né le 14 mars 1879 à Ulm, et mort le 18 avril 1955 à Princeton.

Albert Einstein

À l'aube du vingtième siècle, il a développé une nouvelle conception de l'espace et du temps dans laquelle l'espace-temps forme une entité indivisible de dimension 4.

De façon tout à fait surprenante, pour construire la théorie de la relativité générale, il a dû apprendre et utiliser des théories de mathématiques pures qui avaient été développées dans les 50 années précédentes.

Dimension

L'espace physique dans lequel nous nous déplaçons est de dimension 3.
Le plan décrit par une feuille est de dimension 2.
Une droite est de dimension 1.

De façon générale, on peut définir la dimension $\dim E$ *d'un espace vectoriel* E*. Elle peut être finie ou infinie, et dans ce chapitre nous étudierons le cas de la dimension finie. Par exemple, on a* $\dim \mathbb{R}^n = n$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 22 : Dimension

. $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{Q}$)
. E, F, G sont des $\mathbb{K}$-ev
. $m, n, p \in \mathbb{N}$
. on identifiera parfois $\mathbb{K}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{K})$
. convention : $\mathbb{K}^0 := \{0\}$

I, Familles : rappels et compléments

1) Combinaisons linéaires

On considère $\mathcal{F} \in E^n$ une famille
On l'écrit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ où $\forall i,\ x_i \in E$

On note
$$CL_{\mathcal{F}} : \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \longrightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \underbrace{\overset{\in \mathbb{K}}{\lambda_i}\, x_i}_{\in E} \end{array}$$

On a $CL_{\mathcal{F}}$ est linéaire

Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$CL_{\mathcal{F}}\big((\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \alpha(\mu_1, \dots, \mu_n)\big) = CL_{\mathcal{F}}\big((\lambda_1 + \alpha\mu_1, \dots, \lambda_n + \alpha\mu_n)\big)$$
$$= \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \alpha\mu_i)\, x_i$$
$$= \sum \lambda_i x_i + \alpha \sum \mu_i x_i$$
$$= CL_{\mathcal{F}}\big((\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big) + \alpha\, CL_{\mathcal{F}}\big((\mu_1, \dots, \mu_n)\big)$$

Ie : $CL_{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, E)$

Prop : $\mathcal{F}$ génératrice dans $E \Leftrightarrow CL_{\mathcal{F}}$ surjective

$\mathcal{F}$ libre dans $E \Leftrightarrow CL_{\mathcal{F}}$ injective

$\mathcal{F}$ base de $E \Leftrightarrow CL_{\mathcal{F}}$ bijective (ie $CL_{\mathcal{F}}$ iso)

démo : exo

2) Coordonnées dans une base

Soit $\mathcal{B} \in E^n$ une base de E

Alors : $CL_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} E$ est un isomorphisme

Notation : si $f : E \to F$ est un iso ; on note $E \underset{f}{\xrightarrow{\sim}} F$

On dispose donc de la bijection réciproque qu'on note $Coords_{\mathcal{B}}$

c'est $Coords_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}^n$

Rq : soit $x \in E$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

On sait que $\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

Fixons cette famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

on a $CL_{\mathcal{B}}((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = x$

donc, en appliquant la réciproque : $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Coords_{\mathcal{B}}(x)$

Bilan : $Coords_{\mathcal{B}}(x)$ est la famille des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$

3) Concaténation

$\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$
$\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_p) \in E^p$

on note $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \in E^{n+p}$

C'est la concaténation de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$

4) Sous-famille

Soient $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ deux familles de E. On dit que $\mathcal{F}_1$ est une sous-famille de $\mathcal{F}_2$ ssi $N_1 \leqslant N_2$ et

$\exists (i_1, \dots, i_{N_1}) \in [\![1; N_2]\!]^{N_1}$:

$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 = (x_1, \dots, x_{N_1}) \\ \mathcal{F}_2 = (y_1, \dots, y_{N_2}) \end{pmatrix}$

. les i_k sont 2 à 2 distincts

. $\forall k \in [\![1; N_1]\!]$, $y_{i_k} = x_k$

ex : (x_1, x_4, x_2) est une sous-famille de (x_1, x_2, x_3, x_4, x)

On note $\underline{\mathcal{F}_1 \leqslant \mathcal{F}_2}$

Rq : $\left.\begin{matrix} \mathcal{F} \leqslant \mathcal{G} \\ \mathcal{G} \leqslant \mathcal{F} \end{matrix}\right\} \not\Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$ en général

5) Cardinal d'une famille

Si $\mathcal{F} \in E^n$ on dit que le cardinal de $\mathcal{F}$, noté $|\mathcal{F}|$ est l'entier n

Fait : $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G} \Rightarrow |\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{G}|$

6) Un lemme

Lemme : Soit F une famille libre de E
Soit $x \in E$ tq $F \vee (x)$ n'est pas libre.

Alors : $x \in Vect(F)$

démo : on note $F := (x_1, \dots, x_n)$
$\hat{c}$ $F \vee (x)$ n'est pas libre, soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha) \in \mathbb{K}^{n+1}$ une famille non nulle
tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \alpha x = 0_E$

. si $\alpha = 0$ alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et on obtient une relaθ de liaison $\neq 0$ entre les x_i : c'est absurde car F libre

. donc $\alpha \neq 0$ et $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\lambda_i}{\alpha} x_i \in Vect(F)$

II, Familles de $\mathbb{K}^n$: rappels et cplts

1) Cardinal des familles libres, génératrices, bases

Théorème (version 1)

Soit $n \geq 1$. Soit F une famille de $\mathbb{K}^n$ alors
1) F libre $\Rightarrow |F| \leq n$
2) F génératrice dans $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow |F| \geq n$
3) F base de $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow |F| = n$

Théorème (version 2)

$|F| > n \Rightarrow F$ n'est pas libre
$|F| < n \Rightarrow F$ n'est pas génératrice dans $\mathbb{K}^n$

2) Injectivité, surjectivité, isomorphisme

Corollaire

$n, m \geq 1$. Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linéaire. Alors :

1) f injective $\Rightarrow n \leq m$
2) f surjective $\Rightarrow m \geq n$
3) f bijective $\Rightarrow n = m$

Démo :

1) Osq f injective

On considère $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$

On sait que l'image d'une famille libre par une applicaO linéaire injective est encore libre

ie : Fait : E, F ev

$u : E \to F \in L(E, F)$ injective

soit $n \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

Alors : $(x_1, \dots, x_n)$ libre $\Rightarrow (u(x_1), \dots, u(x_n))$ libre

démo 1 : Osq $(x_1, \dots, x_n)$ libre Mq $(u(x_1), \dots, u(x_n))$ libre

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i) = 0_F$

On a $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0_F$ or $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$

donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$ or $(x_i)_i$ est libre donc $\forall i\ \lambda_i = 0$

ainsi $(u(x_1), \dots, u(x_n))$ est libre

démo 2 : Soit $\mathcal{F}$ libre. on note $u(\mathcal{F})$ la famille des images de $\mathcal{F}$ par u

On considère $\mathbb{K}^n \xrightarrow{CL_{\mathcal{F}}} E \xrightarrow{u} F$ injective

. De plus si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et si $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$

on a $(u \circ CL_{\mathcal{F}})(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, u(x_i)$

ie on a $u \circ CL_{\mathcal{F}} = CL_{u(\mathcal{F})}$

ĉ $u \circ CL_{\mathcal{F}}$ est inj, on a bien $u(\mathcal{F})$ libre

Retour à la démo :
La famille $(f(\mathcal{E}_1), \dots, f(\mathcal{E}_n))$ est donc libre
ĉ on est dans $\mathbb{K}^n$, on a $n \leq m$

2) idem
3) 1) et 2)

⚠ les réciproques sont fausses :
. famille de petite taille dans $\mathbb{K}^n \not\Rightarrow$ elle est libre

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathbb{K}^3$

$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = O_{3,1}$

. famille nombreuse $\not\Rightarrow$ génératrice

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathbb{K}^3$

$\mathrm{Vect}(\text{famille}) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linéaire, $n < m$ $\not\Rightarrow$ f injective

contrex : $\mathbb{K}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{K}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rappel : pour définir une appli. linéaire, il suffit de déterminer l'image d'une base

ici on impose : $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a alors si $x, y \in \mathbb{K}$: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$= x f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soient $x, y \in \mathbb{K}$ on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x+y = 0 \Leftrightarrow x = -y$

inconnue principale paramètre

d'où $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{K} \right\}$

ie $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Corollaire de la famille liée

Prop : $n \geqslant 1$. Osq E possède une famille génératrice de cardinal n.
Soit F une famille de E, on a : $|F| \geqslant n+1 \Rightarrow F$ liée

démo : on se donne $\mathcal{G} \in E^n$ génératrice dans E
Soit F une famille. On note $p := |F|$. Osq $p \geqslant n+1$
On note $F = (y_1, \dots, y_p)$

Mq $(y_1, \dots, y_{n+1})$ liée

On sait que $CL_{\mathcal{G}} : \mathbb{K}^n \to E$ est surjective

Ainsi, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on choisit $Y_i \in \mathbb{K}^n$ tq
$$y_i = CL_{\mathcal{G}}(Y_i)$$

Or, $(Y_1, \dots, Y_{n+1})$ est une famille à $n+1$ éléments de $\mathbb{K}^n$
Elle est donc liée
Soit donc $(\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$
tq $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i Y_i = 0_{n,1}$

On a donc $CL_{\mathcal{G}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i Y_i\right) = 0_E$

ie $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i y_i = 0_E$

III. Construction de bases

1) Théorème de la base incomplète (TBI)

Théorème :
Soit E ev
Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E
Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E

Alors, $\exists \mathcal{G}' \leq \mathcal{G} : \mathcal{L} \vee \mathcal{G}'$ base de E

démo :
Idée : on ajoute à $\mathcal{L}$ des vecteurs de $\mathcal{G}$ en maintenant le caractère libre jusqu'à ce que ça ne soit plus possible

On note $\mathcal{A} = \left\{ \mathcal{L} \vee \mathcal{G}' \;\middle|\; \begin{array}{l} .\ \mathcal{G}' \leqslant \mathcal{G} \\ .\ \mathcal{L} \vee \mathcal{G}' \text{ libre} \end{array} \right\}$

et $A := \left\{ |F| \;\middle|\; F \in \mathcal{A} \right\}$

. On a $\mathcal{A} \neq \emptyset$

En effet, on prend $\mathcal{G}' := ()$ la sous-famille vide de $\mathcal{G}$

. donc $A \neq \emptyset$

. A est majoré : en effet, si $\mathcal{G}' \leqslant \mathcal{G}$

on a $|\mathcal{L} \vee \mathcal{G}'| = |\mathcal{L}| + |\mathcal{G}'| \leqslant |\mathcal{L}| + |\mathcal{G}|$

donc A possède un plus grand élément $n_0 \in \mathbb{N}$

. Soit donc $\mathcal{G}_0 \leqslant \mathcal{G}$ telle que $n_0 = |\mathcal{L} \vee \mathcal{G}_0|$

et $\mathcal{L} \vee \mathcal{G}_0 \in \mathcal{A}$

. Mq $\mathcal{L} \vee \mathcal{G}_0$ est une base

a) elle est libre par définition

b) Mq elle est génératrice

On note $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{L} \vee \mathcal{G}_0)$

Mq tous les éléments de $\mathcal{G}$ sont dans F

Soit y un élément de $\mathcal{G}$:

deux cas :

. si y est dans $\mathcal{G}_0$: c'est ok

. si y n'est pas dans $\mathcal{G}_0$, on considère $\mathcal{G}_0 \vee (y)$.

c'est une sous-famille de $\mathcal{G}$.

donc $\mathcal{L} \vee \mathcal{G}_0 \vee (y)$ ne peut pas être libre car son cardinal vaut $n_0 + 1$

donc d'après le lemme I, 5), on a $y \in \mathrm{Vect}(\mathcal{L} \vee \mathcal{G}_0) = F$

Ainsi, on a $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}) \subset F$

ie $E \subset F$. donc $\mathcal{L} \vee \mathcal{G}_0$ est génératrice.

Corollaire

De toute famille génératrice, on peut extraire une base

démo 1 :

Dans la démo précédente, on a considéré une famille libre maximale.

Ici, on considère une famille génératrice minimale

On note $\mathcal{A} := \left\{ \mathcal{G}' \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ \mathcal{G}' \leqslant \mathcal{G} \\ \cdot\ \mathcal{G}' \text{ génératrice} \end{array} \right\} \neq \emptyset$

et $A := \left\{ |F| \;\middle|\; F \in \mathcal{A} \right\}$

On a $A \subset \mathbb{N}$ et $A \neq \emptyset$

donc A admet un plus petit élément

Soit donc $\mathcal{G}_0 \leqslant \mathcal{G}$ génératrice et minimale (pour le cardinal)

Mq $\mathcal{G}_0$ est libre : par l'absurde

Osq $\mathcal{G}_0$ est liée

On écrit $\mathcal{G}_0 = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$

Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p \setminus \{0, \dots, 0\}$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$

Soit $i_0 \in [\![1, p]\!]$ tq $\lambda_{i_0} \neq 0$

On a $x_{i_0} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i$

On en déduit que la famille $\mathcal{G}_0$ privée de x_{i_0} est encore génératrice : c'est absurde.

démo 2 : on utilise le TBI avec $\mathcal{L} = ()$ et $\mathcal{G}$

2) Exemple

On considère la famille $\mathcal{F} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\in M_{3,1}(\mathbb{K})^4$

Cette famille $\mathcal{F}$ engendre un sev de $M_{3,1}(\mathbb{K})$ qu'on note F
Evidemment, $\mathcal{F}$ est génératrice dans F
Cherchons une base de F qui soit une sous famille de $\mathcal{F}$

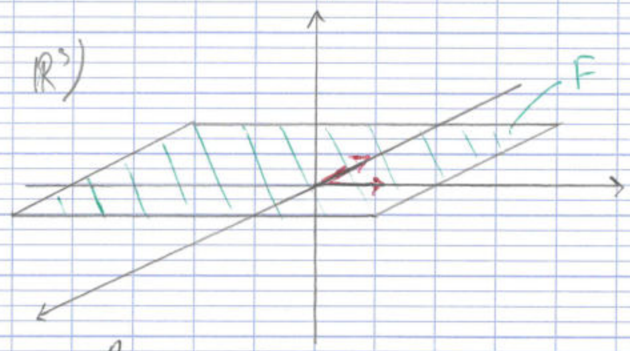
- On a $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc on peut retirer ce vecteur.

  On obtient $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ qui est encore génératrice.

- On a $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc on peut retirer ce vecteur.

  On obtient $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ qui est généractrice dans F

⚠ $\mathbb{R}^3$)



On a bien F sev $\mathbb{R}^3$ mais "F est de dimension 2" et possède une base de taille 2.

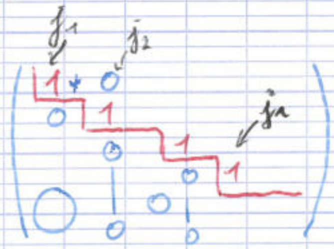
Enfin, ∵ les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, la famille $\mathcal{B}$ est libre : c'est une base.

3) Extraire une base d'une famille génératrice dans $\mathbb{K}^n$

Méthode

. Soient $C_1, \dots, C_p \in M_{n,1}(\mathbb{K})$
. On note $\mathcal{F} := (C_1, \dots, C_p)$ et $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$
. On a F sev $M_{n,1}(\mathbb{K})$
. Donc $\mathcal{F}$ génératrice dans F
. On pose $A := \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \dots \middle| C_p \right) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

. On échelonne et réduit la matrice A
On obtient

$\widetilde{A} =$ 

. On note $r \leq \min(n,p)$ le nb de pivots de $\widetilde{A}$
. On note $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ les indices de colonne des pivots de $\widetilde{A}$

Prop: La famille $(C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_r})$ est une base de F

Démo:
. caractère générateur :
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$
On considère $X = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j C_j$

On a $\forall j, \ C_j = A \cdot E_j$

donc $X = A\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varepsilon_j\right)$ (1)

. Soit $E \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $\tilde{A} = EA$

On obtient $EX = \tilde{A} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varepsilon_j$

Or, pour tout vecteur colonne $C \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, $\tilde{A}C$ a ses coordonnées nulles à partir de la $(r+1)$-ième colonne

Soit donc $(\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{K}^r$ tq $EX = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \varepsilon_j$

.!! Or, d'après la forme de $\tilde{A}$, on a :

$$\forall k \in [\![1, r]\!] \;.\; \varepsilon_k = C_{j_k}(\tilde{A})$$

ie $\forall k \in [\![1, r]\!] \;.\; \varepsilon_k = \underset{M_{n,1}(\mathbb{K})}{\tilde{A}} \cdot \varepsilon_{j_k} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

On a donc $EX = \sum_{k=1}^{r} \mu_k \tilde{A} \varepsilon_{j_k}$

$$= \tilde{A} \cdot \sum_{k=1}^{r} \mu_k \varepsilon_{j_k}$$

$$= EA \sum_{k=1}^{r} \mu_k \varepsilon_{j_k}$$

$$= E \sum_{k=1}^{r} \mu_k \underbrace{A \varepsilon_{j_k}}_{\to C_{j_k}(A)}$$

$$= E\left(\sum_{k=1}^{r} \mu_k C_{j_k}\right)$$

En multipliant par E^{-1} on obtient : $X = \sum_{k=1}^{r} \mu_k C_{j_k}$

donc $F = \mathrm{Vect}(C_{j_1}, \dots, C_{j_r})$

. caractère libre :

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_{jk} = 0_{n,1}$

. Mq $\forall k$, $\alpha_k = 0$

. On écrit $C_{jk} = A \cdot \varepsilon_{jk}$

$$\underset{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}{\hat{A}\,\varepsilon_{jk}} = \underset{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}{\varepsilon_k}$$

On obtient $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A \varepsilon_{jk} = 0_{n,1}$

On multiplie par E : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overbrace{\hat{A}\,\varepsilon_{jk}}^{=\varepsilon_k} = 0_{n,1}$

Or, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est libre

. donc $\forall k$, $\alpha_k = 0$

Exemple :

on considère $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

On note $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K})$

En pratique, il suffit d'échelonner A

On a : $A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$

$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix}$

On a 2 pivots en indice de colonne 1 et 3

donc, $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$

ie $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F

Rq : On a $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc on peut retirer de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rq !! : Ainsi, il n'y a pas unicité de la base

On peut le voir simplement avec

Fait : $\left. \begin{array}{l} (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E \\ (\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^n \\ \forall i, \lambda_i \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$ base de E

IV, Dimension d'un ev

1) Définition

Déf : E $\mathbb{K}$-ev

On dit que E est de dimension finie (au dessus de $\mathbb{K}$)
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists n \in \mathbb{N}, \exists (x_1, \dots, x_n) \in E^n : (x_1, \dots, x_n)$ génératrice de E

ie : E est de dim finie ssi E possède une fam. génératrice finie

Exemples :

- La famille (1) est génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-ev
- Mais (1) n'est pas génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-ev
- Mais $(1, i)$ est génératrice dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-ev
- Bilan : $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dim finie et $\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{R}$-ev de dim finie

(. si E est un $\mathbb{C}$ ev, je peux le voir ĉ un $\mathbb{R}$-ev)

Fait : $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ génératrice dans E en tant que $\mathbb{C}$-ev

Alors $(x_1, \dots, x_p, i \cdot x_1, \dots, i \cdot x_p) \in E^{2p}$ est génératrice dans E en tant que $\mathbb{R}$-ev.

- $\mathbb{K}^n$ (si $n \in \mathbb{N}$) est de dim finie : en effet $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base
- $Sol\,(y' + a(t)\,y = 0)$ où $a(t) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ admet comme famille génératrice $\left(e^{-A(\cdot)}\right)$
- $M_{np}(\mathbb{K})$: en effet $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $M_{np}(\mathbb{K})$
- si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dim finie. En effet : $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ base de $\mathbb{K}_n[X]$
- si E ev, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ Alors $F := Vect(x_1, \dots, x_n)$ est de dim finie

Déf (suite) :

Si E n'est pas de dimension finie, on dit que E est de dimension infinie

Notation : On note E evf si E est un ev de dim. finie.

Exemples :

Sont de dimension infinie :

. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ si $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

. $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ si I intervalle tq $\ell(I) > 0$

. $\underbrace{\{f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}}_{\text{noté } E}$

Notons $év_0 : \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto f(0)$

Alors $év_0 \in L(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \mathbb{R})$

On a $E = \ker(év_0)$

E est de dim. infinie

(?) En admettant que $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ est de dim infinie, mq il en est de m̂ pour E

. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$

démo : on raisonne par l'absurde

Soit $n \in \mathbb{N}$. soit $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^n$ une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$

Idée : on prend le degré maximal

Notons $N := \max_{1 \leq i \leq n} \deg(P_i)$

Alors $\forall i$, $P_i \in \mathbb{K}_N[X]$
donc R^x : $\mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_n)$ sev $\mathbb{K}_N[X]$
ie $\mathbb{K}[X]$ sev $\mathbb{K}_N[X]$
absurde à cause X^{N+1}

Théorème : Tout ev de dim finie possède une base

démo : Soit E evf
On considère $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.
On a vu qu'on pouvait extraire de $\mathcal{G}$ une base

Prop. définition :

Soit E ev
1) Soient $n, m \in \mathbb{N}$
$$\left.\begin{array}{l}(x_1, \dots, x_n) \text{ base de } E \\ (y_1, \dots, y_m) \text{ base de } E\end{array}\right\} \Rightarrow n = m$$

2) Si E evf, on appelle dimension de E et on note $\dim(E)$ (ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$) l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ tq $\exists B \in E^n$: $\mathcal{B}$ base de E

démo :
1) Soient $\mathcal{B} \in E^n$ et $\mathcal{C} \in E^m$ des bases de E
Mq $n = m$
On a $\mathbb{K}^n \xrightarrow[CL_{\mathcal{B}}]{\sim} E$ et $E \xrightarrow[\mathrm{Coords}_{\mathcal{C}}]{\sim} \mathbb{K}^m$

Donc $\mathbb{K}^n \xrightarrow[CL_{\mathcal{B}}]{} E \xrightarrow[\mathrm{Coords}_{\mathcal{C}}]{} \mathbb{K}^m$

ie $\mathrm{Coords}_{\mathcal{C}} \circ CL_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ est un isomorphisme

Donc d'après II, 2), on a $n = m$

💡 Idée ici : on transporte les résultats de $\mathbb{K}^n$ dans E via l'isomorphisme $\text{Coords}_{\mathcal{B}} : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$

Exemples :

. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

on écrit en pratique $\dim \mathbb{R}^n = n$ car $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$

. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$

. $\dim M_{n,p}(\mathbb{K}) = n \cdot p$

💡 Idée : dim E correspond au nb de paramètres sans redondance qu'on peut utiliser pour décrire E

⚠ cela doit rester sur le brouillon. Et formellement, il faut trouver une base (ou utiliser les thm à venir) pour déterminer dim E

Ici, d'après le cours, on sait que $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

ie $(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$

. $T_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$ sev $M_n(\mathbb{K})$

On a $\dim T_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

idée : pour compter le nb d'étoiles, c'est :

" $\# \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{n^2 - n}{2}$ " $+ \# \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} = n$ on obtient $\dfrac{n^2-n}{2} + n$

idée 2 : il y a 1 * en 1ère colonne
2 * en 2e colonne
⋮
n * en dernière colonne

Au total : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

La famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ est une base de $T_n(\mathbb{K})$:

* elle est génératrice par déf de $T_n(\mathbb{K})$
* elle est libre car c'est une sous famille de la base canonique

donc $\dim T_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$

• De $\hat{m}$, on a $\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$

Pour $i \leq j$ on note $M_{i,j} = E_{ij} + E_{ji}$
on a bien $\forall i \leq j$, $M_{ij} \in S_n(\mathbb{K})$
$(E_{ij}^T = E_{ji})$

cette famille est bien génératrice dans $S_n(\mathbb{K})$.
soit $M \in S_n(\mathbb{K})$
On a $M = \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i<j}} m_{i,j} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{i,i}}{2} M_{i,i}$

Mq $(M_{ij})_{i\leq j}$ est libre

Soit $(\lambda_{i,j})_{i\leq j} \in \mathbb{K}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tq $\sum_{i\leq j} \lambda_{ij} M_{i,j} = 0_n$

On a $\sum_{i<j} \lambda_{i,j} E_{ij} + \sum_{i>j} \lambda_{j,i} E_{ij} + \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_{i,i} E_{ii} = 0_n$ (*)

$\hat{C}$ $(E_{i,j})_{i,j}$ est libre, les coeffs de la combinaison linéaire $(*)$ sont nuls

Vocabulaire

- si $\dim E = 1$, on dit que E est une droite vectorielle
- si $\dim E = 2$, on dit que E est un plan (vectoriel)
- si E ev, F sev E

  si E, F evf

  si $\dim F = \dim E - 1$: on dit que F est un hyperplan de E

Fait : si $\dim E = 0$, alors $E = \{0_E\}$

Exemples

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

(?) Si E $\mathbb{C}$ evf. Mq E est $\mathbb{R}$-evf et $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$

⚠ (0_E) n'est pas libre

En effet $1 \cdot 0_E = 0_E$

donc, on a une CL $\neq 0$ entre les élé^{t} de (0_E)

Rappel : $\mathcal{F}$ contenant $0_E \Rightarrow \mathcal{F}$ n'est pas libre

2) Familles dans un evf

Prop : E evf $\quad n := \dim E$
F famille de E

On a :

I 1) F libre $\Rightarrow |F| \leq n$

2) F génératrice dans E $\Rightarrow |F| \geq n$

3) F base de E $\Rightarrow |F| = n$

II 1) $|F| > n \Rightarrow$ F n'est pas libre
2) $|F| < n \Rightarrow$ F n'est pas génératrice dans E

démo :
. II est une reformulation contraposée de I

. I Soit $\mathcal{B}$ une base de E
$\mathcal{B}$ est le pivot permettant de passer de E à $\mathbb{K}^n$

Notons $m := |F|$
1) Osq F libre, on a $CL_F : \mathbb{K}^m \to E$ est injective
donc $\mathbb{K}^m \xrightarrow[\substack{CL_F \\ \text{inj.}}]{} E \xrightarrow[\substack{\text{Coords}_{\mathcal{B}} \\ \text{iso}}]{\sim} \mathbb{K}^n$

donc on a une injection $\text{Coords}_{\mathcal{B}} \circ CL_F : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$
donc $m \leq n$ (cf II, 2)
ie $|F| \leq \dim E$

2) exo
3) = 1) et 2)

Prop !!! R^x

Soit E evf. On note $n := \dim E$
Soit F une famille de E de taille n

Alors 1) F libre $\Rightarrow F$ base de E
2) F génératrice dans $E \Rightarrow F$ base de E

démo :
1) Osq F libre, ainsi $CL_F : \mathbb{K}^n \to E$ est injective
On $\dim(\mathbb{K}^n) = \dim(E)$
Donc on est en situation d'isodimensionnalité
On verra plus loin que dans ce cas-là :
f inj $\Rightarrow f$ iso

1) Deuxième preuve :
Osq F libre. On utilise le TBI dans E. On peut donc étendre F en une base $\mathcal{B}$. Fixons une telle base.
On a $F \subseteq \mathcal{B}$ et $|F| = |\mathcal{B}|$. Donc $F = \mathcal{B}$ à une permutation près des vecteurs.

1) Troisième preuve :
Comme E evf, soit $\mathcal{B}$ une base de E
On a $|\mathcal{B}| = n$. On a $\text{Coords}_{\mathcal{B}} : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$

Donc, on a $\mathbb{K}^n \xrightarrow[CL_F]{inj} E \xrightarrow[\text{Coords}_{\mathcal{B}}]{\sim} \mathbb{K}^n$

Donc $\text{Coords}_{\mathcal{B}} \circ CL_F$ injective de $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$
Donc, $\text{Coords}_{\mathcal{B}} \circ CL_F$ est un iso
Donc, $\underbrace{\underset{iso}{CL_{\mathcal{B}}} \circ \underset{iso}{\text{Coords}_{\mathcal{B}}}}_{Id_E} \circ CL_F$ iso

ie CL_F iso ie F base de E

2) Idem ∎

3) Sous espaces vectoriels en dim finie

Prop : E evf
F sev E Alors :

1) F evf
2) $|F| \leq |E|$
3) $\left.\begin{array}{l} F \text{ sev } E \\ \dim F = \dim E \end{array}\right\} \Rightarrow F = E$

démo :

1) On raisonne c pour le TBI
On note $\mathcal{A} := \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ famille libre de } F \}$

On a $\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $() \in \mathcal{A}$
On pose $A := \{ |\mathcal{F}| \mid \mathcal{F} \in \mathcal{A} \} \subset \mathbb{N}$ ($A \neq \emptyset$ car $\mathcal{A} \neq \emptyset$)

A est majorée par dim E. En effet, si $\mathcal{F}$ est une famille libre de F, c $F \subset E$,
$\mathcal{F}$ est aussi une famille libre dans E.
On sait que $|\mathcal{F}| \leq \dim E$.

Rq : la notion de liberté ne dépend pas de l'espace

Soit donc $\mathcal{F}_0$ une famille libre de F de taille maxi.
Mq $\mathcal{F}_0$ est génératrice
Soit $x \in F$. Alors $\mathcal{F}_0 \vee (x)$ ne peut pas être libre.
c $\mathcal{F}_0$ libre, on a d'après le lemme de I :
$x \in \text{Vect}(\mathcal{F}_0)$

2) Mq $\dim F \leq \dim E$

Soit $\mathcal{B}$ une base de F
Donc $\mathcal{B}$ est libre dans F mais aussi dans E
Donc $|\mathcal{B}| \leq \dim E$ ie $\dim F \leq \dim E$

3) Osq F sev E (evf) et $\dim F = \dim E$
Mq $F = E$

Soit $\mathcal{B}$ une base de F : $\mathcal{B}$ est libre dans E
De plus, $\mathcal{B}$ est de bonne taille : donc c'est une base de E.
Or, $\mathcal{B}$ est une famille de F
donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \subset F$
donc $E \subset F$

Rq : Montrons que $\left.\begin{array}{l} f \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \\ f \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ iso

On considère $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$: elle est libre
Or f inj
donc $(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \dots f(\varepsilon_n))$ est libre. Donc, c'est une base. Donc, elle est génératrice. donc f est surjective :
en effet : soit $Y \in \mathbb{K}^n$. Alors $Y \in \mathrm{Vect}(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n))$
Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\varepsilon_i)$
On a $Y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i\right)$

Rappel : Soit $(C_1, \dots, C_n) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$
a) $(C_1, \dots, C_n)$ libre $\iff \nexists$ $CL_{\neq 0}$ entre les C_i
$\iff$ l'uniq sol. de $AX = 0_{n,1}$ est $Y = 0_{n,1}$
où $A := (C_1, \dots, C_n)$

b) $(C_1, \dots, C_n)$ génératrice dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$

$\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, B peut s'écrire ĉ CL des C_i

$\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = B$

$\Leftrightarrow \forall B$, l'équation $AX = B$ admet au moins une solution

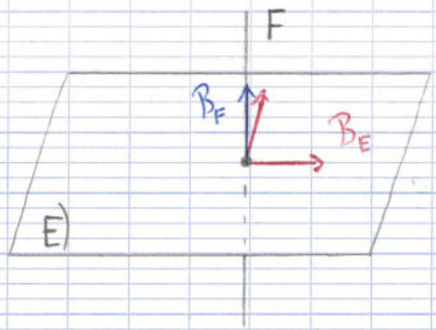
4) $E \times F$ est de dimension finie

Prop : E, F evf

Alors :

1) $E \times F$ evf

2) $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$



idée :

$B_E \vee B_F$ donne une base de $E \times F$

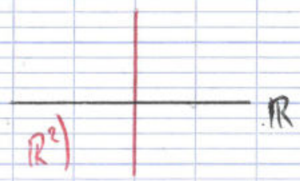
⚠ F : ce n'est pas homogène

cf : $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R}^2$

$\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \in \mathbb{R}^2$?

Pour résoudre ce pb, il faut "inclure $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$" ie "voir $\mathbb{R}$ ĉ une partie de $\mathbb{R}^2$"

Pour cela, on voit $\mathbb{R}$ ĉ $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$



démo : on note $n := \dim E$ et $p := \dim F$

Soit $\underset{B_E}{(e_1, \dots, e_n)}$ base de E

$\underset{B_F}{(f_1, \dots, f_p)}$ base de F

Idée : on voit B_E c une famille de $E \times F$

On pose $B_1 := (\underbrace{(\overset{\in E}{e_1}, \underset{\in F}{0_F})}_{\in E \times F}, \dots, (e_n, 0_F))$

et $B_2 := ((0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p))$

et $B := B_1 \vee B_2$

. Mq B est une base

a) Mq B est libre

Soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^p$ tq :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (0_E, f_j) = (0_E, 0_F)$$

On a : $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j\right) = (0_E, 0_F)$

ie $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j\right) = (0_E, 0_F)$

Donc en première coordonnée : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$

Or $(e_i)_i$ libre. Donc $\forall i, \lambda_i = 0$

De m̂ en 2e coordonnée : $\forall j, \mu_j = 0$

CCL : B est libre

b) Mq B est génératrice dans $E \times F$: m̂ raisonnement

(?) → bateau⁺⁺

. Ainsi, $E \times F$ evf

c $|B| = |B_1| + |B_2| = n + p$

On a $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

Corollaire

E evf, $n \in \mathbb{N}$, E^n evf et $\dim(E^n) = n \dim(E)$

V, Applications linéaires en dimension finie

0) Transport de finitude

. $\left.\begin{array}{l} f : E \to F \text{ inj} \\ F \text{ evf} \end{array}\right\}$ E evf

(démo : $\mathcal{A} = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ famille libre de $E\}$

est $\neq \emptyset$ et majorée en taille ...)

. $\left.\begin{array}{l} f : E \to F \text{ surj} \\ E \text{ evf} \end{array}\right\} \Rightarrow F$ evf

(démo : $\mathcal{F}$ génératrice dans E
ĉ f est surjective : "$f(\mathcal{F})$" génératrice dans F)

1) Injectivité, surjectivité, bijectivité

Prop : E, F evf
$f : E \to F$ linéaire

1) f injective $\Rightarrow \dim E \leqslant \dim F$

2) f surjective $\Rightarrow \dim E \geqslant \dim F$

3) f **isomorphisme** $\Rightarrow \dim E = \dim F$

démo :

1) Ĉ E evf, soit $\mathcal{B}_E$ une base de E : elle est libre.
Ĉ f inj, "$f(\mathcal{B}_E)$" est une famille libre dans F

donc $\underbrace{|\text{"}f(\mathcal{B}_E)\text{"}|}_{= |\mathcal{B}_E| = \dim E} \leq \dim F$

2) Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E : elle est génératrice dans E.
Comme f surjective, "$f(\mathcal{B}_E)$" génératrice dans F

donc $|\text{"}f(\mathcal{B}_E)\text{"}| \geq \dim F$

3) $\Leftarrow$ 1) et 2)

Rq : a) on a aussi des démos par transport de structure

b) Osq f inj

On a
$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^{\dim E} \arrow[r, "\sim", "CL_{\mathcal{B}_E}"'] \arrow[rrr, bend right, "\text{Coords}_{\mathcal{B}_F} \circ f \circ CL_{\mathcal{B}_E}"'] & E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "\sim", "\text{Coords}_{\mathcal{B}_F}"'] & \mathbb{K}^{\dim(F)} \end{tikzcd}$$

$\text{Coords}_{\mathcal{B}_F} \circ f \circ CL_{\mathcal{B}_E}$ inj

2)! La rcpq de 3) est vraie

Soient E, F evf tq $\dim E = \dim F$
Alors E est isomorphe à F

démo :

I, On note " $E \simeq F$ " la relation entre E et F définie par $\exists f \in L(E,F) : f$ iso

Alors : 1°) $\simeq$ est réflexive
$(Id_E : E \to E$ iso$)$

2°) $\simeq$ est transitive
ie $\left.\begin{array}{l} E \simeq F \\ F \simeq G \end{array}\right\} \Rightarrow E \simeq G$

$(f : E \xrightarrow{\sim} F$ et $g : F \xrightarrow{\sim} G$
alors $g \circ f : E \xrightarrow{\sim} G$

3°) $\simeq$ est symétrique
$E \simeq F \Rightarrow F \simeq E$
$(f : E \to F$ linéaire et bij $\Rightarrow f^{-1} : F \to E$ linéaire$)$

CCL : $\simeq$ est une relation d'équivalence

II, Fait !!!
$\left.\begin{array}{r} E \text{ evf} \\ \dim E = n \end{array}\right\} \Rightarrow E \simeq \mathbb{K}^n$

démo : Osq E evf , on pose $n := \dim E$
Pour pivoter de E à $\mathbb{K}^n$, on a besoin de se donner une base $\mathcal{B}$ de E

Alors $\mathrm{Coords}_{\mathcal{B}} : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$ donc $E \simeq \mathbb{K}^n$

? 1) E evf ; $n := \dim E$
Mq $\forall f : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$
$\exists \mathcal{B}$ base de E : $f = \mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}$

2) Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ base de E
A-t-on : $\text{Coords}_{\mathcal{B}} = \text{Coords}_{\mathcal{C}} \Rightarrow$?

3) m̂ question avec $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ familles de m̂ tailles
$CL_{\mathcal{F}_1} = CL_{\mathcal{F}_2} \Rightarrow$?

fin de la preuve :

Osq $\dim E = \dim F = n$
Alors $E \simeq \mathbb{K}^n$
$F \simeq \mathbb{K}^n$
donc $E \simeq F$

Autre démo :
Osq $\dim E = \dim F = n$
Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases
Alors $E \xrightarrow[\text{Coords}_{\mathcal{B}_E}]{\sim} \mathbb{K}^n \xrightarrow[CL_{\mathcal{B}_F}]{\sim} F$

2) Critère de bijectivité en égale dimension !!

Théorème
Soient E, F evf tels que $\dim E = \dim F$
Soit $f : E \to F$ linéaire
Alors :

$$f \text{ inj} \iff f \text{ surj} \iff f \text{ isomorphe}$$

1) . Mq f inj $\Rightarrow$ f surj
Osq f inj. Mq f surj
Deux preuves :
. On note $n := \dim E$

R^x !! Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$\hat{C}$ f inj, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F

Or $\dim F = n$. On sait alors que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F

(C'est une famille libre "de bonne taille")

En particulier, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice dans F $(*)$

Mq f est surjective

Soit $y \in F$

D'après $(*)$, soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$

On a $y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)$ donc f surj.

. Preuve 2

Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases resp. de E et F

Alors, l'application linéaire : $\mathbb{K}^n \xrightarrow[CL_{\mathcal{B}_E}]{} E \xrightarrow[\text{inj}]{f} F \xrightarrow[\text{Coords}_{\mathcal{B}_F}]{} \mathbb{K}^n$

est inj. Donc elle est bijective $(\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n)$

donc f l'est aussi

. Mq f surj $\Rightarrow$ f bij

Osq f surj

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$\hat{C}$ f surj, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice dans F

$\hat{C}$ elle est de bonne taille, c'est une base

Mq f inj $R^x \to$ calcul de $\mathrm{Ker}(f)$

Soit $x \in E$ tq $f(x) = 0_F$

R^x
1) je dois aller voir dans F
2) je sais que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ base de F
3) !!! On a une base $(e_1, \dots, e_n)$ base de E
R^x : je décompose x dans cette base

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

On a $f(x) = 0_F$ ie $\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = 0_F$

or $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ libre, on a $\forall i$, $x_i = 0$
donc, $x = 0$

(Rq : preuve par transport de structure)

. Puis f bij $\Rightarrow$ f inj

Corollaire

E evf, $f \in L(E)$
On a f inj $\Leftrightarrow$ f surj $\Leftrightarrow$ f iso ie f automorphisme

ctrex en dimension infinie

a) $f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$
$\quad P \longmapsto XP$

. f linéaire : $\forall P, Q$, $\forall \lambda$, $X(P + \lambda Q) = XP + \lambda XQ = f(P) + \lambda f(Q)$

. f inj : Soit $P \in \mathrm{Ker} f$ on a $XP = 0$
Rappel : $\mathbb{K}[X]$ est intègre
$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $PQ = 0 \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0$
↳ démo : degré
donc $P = 0$

. f n'est pas surjective
En effet, $1 \notin \mathrm{Im}(f)$

En effet $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(XP) \geq 1$ ou $\deg(XP) = -\infty$

donc $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(XP) \neq 0$

b) ⚠ $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P + X \end{array}$ n'est pas linéaire

car $g(0_{\mathbb{K}[X]}) = X \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$

En plus g est bijective

On note $D : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

$D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$, D est surjective mais $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{K}_0[X]$

Mq D est surjective
Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$
On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$

On pose $Q := \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1}$

On a bien $D(Q) = P$

(on aurait pu prendre $\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$)

$\Delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\geq 0} & \mapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\geq 0} \end{array}$

Δ est surjectif

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ pour $n \geqslant 1$ et $A_0 := 0$

On a $\Delta(A) = a$.

3) L'inversibilité à gauche entraîne l'inversibilité à droite et réciproquement

Prop : E, F evf avec $\dim E = \dim F$

$$E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F$$

Alors, on a :

1) $g \circ f = Id_E \Rightarrow f \circ g = Id_F$

2) Dans ce cas, on a f iso et $g = f^{-1}$

Démo :

On a $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} E = E \xrightarrow{Id_E} E$

En particulier : $g \circ f$ inj donc f inj

Or, $\dim E = \dim F$, donc f bij

A partir de là, on peut utiliser f^{-1}

avec $g \circ f = Id_E$

donc $g = f^{-1}$

En composant à gauche par g : $f \circ g = Id_F$

2) ok

contre-exemple si E, F evf mais $\dim E \neq \dim F$

. On prend $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \end{array}$

On a bien $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$

. $E = \{0_E\}$: $f : \{0_E\} \to F$
$g : F \to \{0_E\}$

4) $L(E,F)$ est de dimension finie

Prop : E, F evf
Alors :
1) $L(E,F)$ evf
2) $\dim(L(E,F)) = \dim E \times \dim F$

Idée :
. $E \simeq \mathbb{K}^p$
. $F \simeq \mathbb{K}^n$
. " $L(E,F) \simeq L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ "

Or, $u : \begin{array}{l} M_{n,p}(\mathbb{K}) \to L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ A \mapsto u_A : \begin{array}{l} \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{array} \end{array}$ iso

. $\dim M_{n,p}(\mathbb{K}) = n \cdot p$

démo 1 : par transport de structure
. Idée !!! Q : $\left.\begin{array}{l} E \simeq \mathbb{K}^p \\ F \simeq \mathbb{K}^n \end{array}\right\} \Rightarrow L(E,F) \simeq L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$
On note $p := \dim E$ et $n := \dim F$

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$ des bases respectives de E et F

On a $\mathbb{K}^p \xrightarrow[CL_{\mathcal{B}}]{\sim} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow[\text{Coords } \mathcal{E}]{\sim} \mathbb{K}^n$

On définit : $\varphi : L(E,F) \to L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$
$f \mapsto \text{Coords } \mathcal{E} \circ f \circ CL_{\mathcal{B}}$

et $\Psi : L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \to L(E,F)$
$u \longmapsto CL_{\mathcal{E}} \circ u \circ \text{Coords}_{\mathcal{B}}$

On a :

. φ et Ψ sont bien définies car la composée d'applis lin. est lin.

. De plus, φ est bien linéaire
(Soient $f, g \in L(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$\text{Coords}_{\mathcal{E}} \circ (f + \lambda g) \circ CL_{\mathcal{B}}$
$= \text{Coords}_{\mathcal{E}} \circ (f \circ CL_{\mathcal{B}} + \lambda g \circ CL_{\mathcal{B}})$

par déf de $f+\lambda g$

$= \text{Coords}_{\mathcal{E}} \circ f \circ CL_{\mathcal{B}} + \lambda \, \text{Coords}_{\mathcal{E}} \circ g \circ CL_{\mathcal{B}}$)

car $\text{Coords}_{\mathcal{E}}$ est linéaire

. De m̂ Ψ est linéaire

. On a $\varphi \circ \Psi = Id_{L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)}$

Soit $u \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, on a :

$$\varphi \circ \Psi(u) = \varphi(\Psi(u)) = \text{Coords}_{\mathcal{E}} \circ \Psi(u) \circ CL_{\mathcal{B}}$$
$$= \underbrace{\text{Coords}_{\mathcal{E}} \circ (CL_{\mathcal{E}}}_{Id_{\mathbb{K}^n}} \circ u \circ \underbrace{\text{Coords}_{\mathcal{B}}) \circ CL_{\mathcal{B}}}_{Id_{\mathbb{K}^p}}$$
$$= u$$

. De même, $\Psi \circ \varphi = Id_{L(E,F)}$

. Conclusion : $L(E,F) \simeq L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

Or, on a mq $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \simeq M_{n,p}(\mathbb{K})$

$u_A \longleftarrow A$

donc, $L(E,F) \simeq M_{n,p}(\mathbb{K})$

Donc, $L(E,F)$ evf

et $\dim(L(E,F)) = n \cdot p = \dim E \times \dim F$

démo 2 :

Rappel : $\Theta : L(E,F) \to F^p$
$f \mapsto (f(e_1), \ldots, f(e_p))$

avec $(e_1, \ldots, e_p)$ base de E

Θ est un iso

ie $\forall (y_1, \ldots, y_p) \in F^p, \exists!\, f \in L(E,F) ; \forall i, f(e_i) = y_i$

R^x ! définition d'une app. linéaire dans une base

| démo du rappel : On cherche la réciproque de Θ
Soit $(y_1, \ldots, y_p) \in F^p$
On cherche $f : E \to F$ tq $\Theta(f) = (y_1, \ldots, y_p)$

Alors "$(y_1, \ldots, y_p) \mapsto f$" sera la recq de Θ

Supposons f trouvée
Soit $x \in E$
On cherche $f(x)$
1°) on décompose x dans $(e_1, \dots, e_p)$: $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$

2°) donc $f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_p f(e_p)$

$$f(x) = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p$$

Ie on a $f(x) = CL_{y_1, \dots, y_p}(x_1, \dots, x_p)$

$$= CL_{y_1, \dots, y_p} \circ Coords_{(e_1, \dots, e_p)}(x)$$

Bilan : la réciproque de Θ est

$$\omega : \begin{array}{ccl} F^p & \longrightarrow & L(E, F) \\ (y_1, \dots, y_p) & \longmapsto & CL_{(y_1, \dots, y_p)} \circ Coords_{(e_1, \dots, e_p)} \end{array}$$

On a : . ω est bien définie
. ω est linéaire
. $\omega \circ \Theta = Id$ et $\Theta \circ \omega = Id$

CCL : $L(E, F) \simeq F^p$

donc , $\dim L(E, F) = p \cdot \dim F$
$= n . p$

démo 3 :

On exhibe une base explicite de $L(E,F)$
On considère $(e_1, \dots, e_p)$ base de E
$(f_1, \dots, f_n)$ base de F

A retenir :

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, on pose :

$$u_{i,j} : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & F \\ e_j & \longmapsto & f_i \\ e_k & \longmapsto & 0_F \text{ si } k \neq j \end{array}$$

? Ex : Mq $u_{i,j}$ est une base de $L(E,F)$

VI, Sommes directes et théorème du rang

1) Dimension d'une somme directe

Prop : E ev et F, G sevf E tq F et G sont en somme directe

Alors :

1) $F \oplus G$ sevf E
2) $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

démo : Soient $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases de F et G, resp.
Alors $\mathcal{B}_F \vee \mathcal{B}_G$ est une base de $F \oplus G$

Rq : ⚠ F est un supplémentaire de G dans F
s'écrit $E = F \oplus G$

Généralisation :

E ev

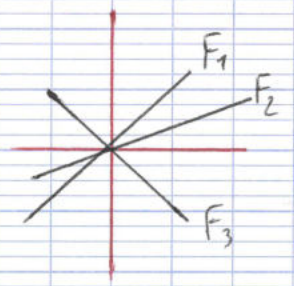
$F_1, \dots, F_p$ sevf E en somme directe

Alors $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \dim F$

démo :

⚠ hyper faux : les F_i sont en somme directe $\cancel{\Leftrightarrow} \bigcap_{i=1}^{p} F_i = \{0_E\}$

Contrex :



A-t-on $\dim(F_1 + F_2 + F_3) = 3$?

Impossible car $F_1 + F_2 + F_3$ sev $\mathbb{R}^2$

déf :

F_i st en somme directe $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$,
$x_1 + \dots + x_p = 0_E \Rightarrow \forall i,\ x_i = 0_E$

ie tt élément de $F_1 + \dots + F_p$ admet une unique écriture

ie $\begin{array}{ccc} F_1 \times \dots \times F_p & \longrightarrow & F_1 + \dots + F_p \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + x_2 + \dots + x_p \end{array}$ est un iso.

on a bien $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$

2) Supplémentaires en dim finie

Prop : E evf
F sev E
Alors F admet un supplémentaire dans E

démo :
. F evf
. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ base de F
. D'après le TBI, on la complète en une base $(\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\text{base de } F}, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E

. On pose $S := \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$
. On vérifie que
1°) $S \cap F = \{0_E\}$

2°) $S + F = E$

3) Rang

Def : E, F ev
$f \in L(E,F)$
On dit que f est de rang fini ssi
$\mathrm{Im}(f)$ (sev F) est un evf
On appelle alors rang de f et on note $rg(f)$ l'entier déf par :

$$rg(f) := \dim \mathrm{Im}(f)$$

Exemples:

- On regarde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

Calculons le rang de f

. On cherche $\operatorname{Im}(f)$
. On a $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base de $\mathbb{R}^2$
. Donc, $(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$

. Ie, on a $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

donc $\dim \operatorname{Im}(f) \leq 2$

Or, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre   Rq : En effet, ces vecteurs ne sont pas colinéaires

. Bilan : $\operatorname{rg}(f) = 2$

c) Premières propriétés

Fait :

a) F evf $\Rightarrow$ f est de rang fini
b) E evf $\Rightarrow$ f est de rang fini

Prop : Qsq E, F evf

1) $rg(f) \leq \dim E$

2) $rg(f) \leq \dim F$

ie 3) $rg(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$

démo :

2) On a $Im f$ sev F
donc $\dim(Im(f)) \leq \dim F$

1) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

On a alors $Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_n))$

donc $Im(f)$ possède une famille génératrice finie
donc $Im(f)$ evf
D'après le TBI, on peut extraire de cette famille génératrice une base

d) Quelques cas particuliers

- $f : E \to F$
Qsq $rg(f) = 0$
on a $\dim(Im(f)) = 0$
donc $Im(f) = \{0_E\}$
donc $\forall x \in E, f(x) = 0_F$
donc $f = 0_{L(E,F)}$

Bilan : $rg(f) = 0 \iff f$ est nulle

. E evf ($\dim E = n$)

$f \in L(E)$: on a $rg(f) \leqslant \dim E$

Dsq $rg(f) = n$

Alors : . $Im(f)$ sev E

. $\dim(Im(f)) = \dim E$

. R^{x} dimensionnel : on a $Im(f) = E$

ie <u>f est surjective</u>

. Cas où f est un endo. en dim finie

donc f est un iso

Bilan :

Soit $f \in L(E)$ ($\dim E = n$)

$rg(f)$	0	1	2	...	n
f	f nulle				f iso

e) Rang de la composée

<u>Lemme</u> : E, F ev $f : E \to F$ linéaire

E' sevf E

Alors : . $f(E')$ evf

. $\dim f(E') \leqslant \dim E'$

<u>démo</u> : plus haut (avec base)

Prop : E, F, G evf

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

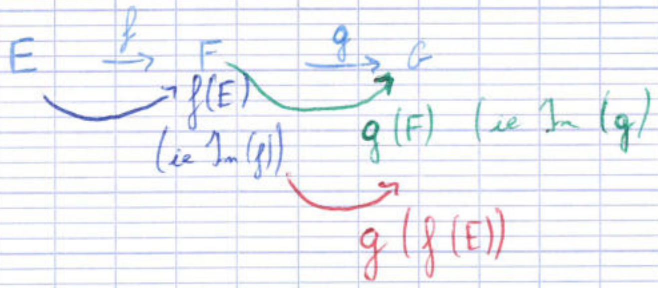
Alors :

1°) $rg(g \circ f) \leq rg(g)$

2°) $rg(g \circ f) \leq rg(f)$

démo :

1°)



On a $Im(g \circ f) = (g\circ f)(E) = g(f(E))$

Or $f(E) \subset F$

donc $g(F(E)) \subset g(F) = Im(g)$

donc $Im(g \circ f)$ sev $Im(g)$

. En passant aux dimensions : $rg(g\circ f) \leq rg(g)$

2°) On a $Im(g \circ f) = g(Im(f))$

On applique le lemme précédent : $g : F \to G$ $\quad \underset{sev}{Im(f)} \to g\underset{sev}{(Im(f))}$

donc on a $\underbrace{\dim(g(Im(f)))}_{rg(g\circ f)} \leq \underbrace{\dim Im f = rg(f)}_{\leq\, rg(f)}$

f) Invariance du rang par isomorphisme par composition avec un iso

<u>Prop:</u> On considère $E \xrightarrow{f} F$ un diag. d'evf

1) Soit $F \underset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}} F'$ un iso

Alors $rg(\varphi \circ f) = rg(f)$

2) $E' \underset{\psi}{\xrightarrow{\sim}} E$

Alors $rg(f \circ \psi) = rg(f)$

<u>démo :</u>

1) D'après e), $rg(\varphi \circ f) \leq rg(f)$

De m, $rg(\underbrace{\boxed{\varphi^{-1} \circ (\varphi} \circ f)}_{f}) \leq rg(\varphi \circ f)$ avec $\boxed{\varphi^{-1} \circ \varphi} = Id_F$

ie $rg\ f \leq rg(\varphi \circ f)$

2) idem

4) Formule du rang

a) Théorème du rang

<u>Théo:</u> E, F ev
$f : E \to F$ linéaire
Soit S un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E

Alors $f|_S^{\mathrm{Im}(f)} : S \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ est un iso

démo : on note $\tilde{f} : S \to \mathrm{Im}(f)$
$x \mapsto f(x)$

. Mq $\tilde{f}$ inj

On a $\mathrm{Ker}\left(f|_S^{\mathrm{Im}(f)}\right) = \mathrm{Ker}(f|_S)$

Or $\mathrm{Ker}(f|_S) = \mathrm{Ker}(f) \cap S$

Or . $S \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$
donc , $S \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

ie $\mathrm{Ker}(f|_S) = \{0_E\}$ ie $f|_S$ injective

de m̂ pour $\tilde{f}$

. Mq $\tilde{f}$ surj.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Soit donc $x \in E$ tq $y = f(x)$

On décompose $x = x_k + x_s$ où $x_k \in \mathrm{Ker} f$ et $x_s \in S$

On a $f(x) = 0 + f(x_s) = y$

donc $y = \tilde{f}(x_s)$

b) Formule du rang

Théo : E evf ; F ev ; $f : E \to F$ linéaire

Alors, $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{rg}(f)$

démo :

$\hat{C}$ E evf, soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$

On a $\tilde{f} : \begin{array}{l} S \to \operatorname{Im} f \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ est un iso

donc $\dim S = \dim \operatorname{Im} f$

ie $\dim S = \operatorname{rg}(f)$

Or $E = \operatorname{Ker} f \oplus S$

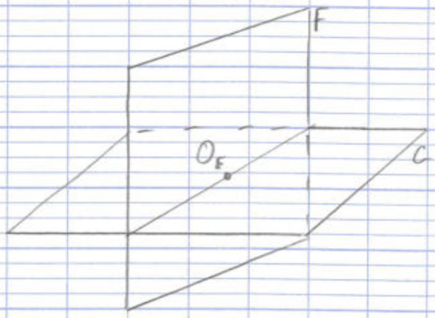
donc $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim S$

5) Formule de Grassman

Prop : E ev ; F, G sevf E

Alors : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

démo 1 : (facile)



. $F \cap G$ est bien sev E

. On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $F \cap G$

. Soit S_1 un supplémentaire de $F\cap G$ dans F
. Soit S_2 un supplémentaire de $F\cap G$ dans G
. On a $S_1 \oplus (F\cap G) = F$ et $S_2 \oplus (F\cap G) = G$

Mq $S_1 \oplus F\cap G \oplus S_2 = F+G$

a) Mq la somme est pleine

. On a bien $S_1 \oplus (F\cap G) \oplus S_2$ sev $F+G$
car S_1 sev F, $F\cap G$ sev F et S_2 sev G
. Réciproquement :
1°) On a $F = S_1 \oplus F\cap G$
et $G = S_2 \oplus F\cap G$
donc $F+G = (S_1 + F\cap G) + ((F\cap G) + S_2)$

$$= S_1 + \underbrace{((F\cap G) + (F\cap G))}_{F\cap G} + S_2$$

ou 2°) Soit $x_F + x_G \in F+G$ où $x_F \in F$, $x_G \in G$
On écrit $x_F = x_{S_1} + x_{FG}$ où $x_{S_1} \in S_1$, $x_{FG} \in F\cap G$

et $x_G = x'_{FG} + x_{S_2}$ où $x'_{FG} \in F\cap G$ et $x_{S_2} \in S_2$

d'où $x_F + x_G = x_{S_1} + (x_{FG} + x'_{FG}) + x_{S_2}$

b) Mq la somme est directe
Soient $(x_{S_1}, x_{FG}, x_{S_2}) \in S_1 \times (F\cap G) \times S_2$
tq $x_{S_1} + x_{FG} + x_{S_2} = 0_E$
On a $x_{S_1} + x_{FG} \in F$ car S_1 sev F, $F\cap G$ sev F
et $x_{S_2} \in G$
On écrit $x_{S_2} = -(x_{S_1} + x_{FG})$

donc on a $x_{S_2} \in F$; mais $x_{S_2} \in S_2$ sev G
donc $x_{S_2} \in F \cap G$. Or S_2 et $(F \cap G)$ sont en somme directe

donc $x_{S_2} = 0_E$
donc $x_{S_1} + x_{FG} = 0_E$
Or S_1 et $F \cap G$ sont en $\oplus$
donc $x_{S_1} = x_{FG} = 0_E$

Rq : En g^{al} si $E = E_1 \oplus E_2$
et si $E_1 = F_1 \oplus F_2$ et si $E_2 = G_1 \oplus G_2$, alors
on a : $E = F_1 \oplus F_2 \oplus G_1 \oplus G_2$ (etc..)

. Maintenant, soient $\mathcal{B}_{FG}$ une base de $F \cap G$
$\mathcal{B}_1$ — S_1
$\mathcal{B}_2$ — S_2

$\hat{E}$ $F + G = S_1 \oplus (F \cap G) \oplus S_2$
On a $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_{FG} \vee \mathcal{B}_2$ base de $F + G$

CCL : avec les tailles des bases car : $|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_{FG}| = \dim F$
$|\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_{FG}| = \dim G$
et $|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_{FG}| = \dim(F+G)$
et $|\mathcal{B}_{FG}| = \dim(F \cap G)$

<u>démo 2</u> : (+ abstraite)
On considère $\varphi : F \times G \longrightarrow F + G$
$(x_F, x_G) \longmapsto x_F + x_G$
φ est surjective (par déf de $F + G$)
formule du rang : $\underbrace{\dim(F \times G)}_{\dim F + \dim G} = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(\varphi))}_{= \dim F + G} + \dim(\mathrm{Ker}\, \varphi)$

Mq $\operatorname{Ker} \varphi = \{ (x, -x) \mid x \in F \cap G \}$

$\supseteq$: On a $\{ (x, -x) \mid x \in F \cap G \} \subset F \times G$

$x \in F \cap G$, $\in F$; $-x \in F \cap G$, $\in G$

de plus, si $x \in F \cap G$, on a $\varphi(x, -x) = x - x = 0_E$

$\subseteq$: soit $(x_F, x_G) \in \operatorname{Ker} \varphi$

on a $x_F + x_G = 0_E$

donc $\underset{\in F}{x_F} = \underset{\in G}{-x_G}$

donc, $x_F \in F \cap G$

et $(x_F, x_G) = (x_F, -x_F)$

Mq $\operatorname{Ker} f$ est iso à $F \cap G$

On considère $\psi : F \cap G \to \operatorname{Ker} \varphi$
$x \mapsto (x, -x)$

déjà, ψ est linéaire

ψ est surjective d'après (*)

ψ est injective : si $x \in F \cap G$ et $\varphi(x) = 0_{F \times G}$, alors on a $(x ; -x) = (0_F, 0_G)$

donc $x = 0_E$, donc ψ est injective

CCL : $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim (F \cap G)$

6) ! CNS de somme directe pleine

Prop : E evf F, G sev E tq $\dim F + \dim G = \dim E$

Alors :

1) Si la somme F + G est directe, alors elle est pleine

2) Si la somme F + G est pleine, elle est directe.

ie 1) $F \cap G = \{0_E\} \Rightarrow E = F \oplus G$

2) $F + G = E \Rightarrow E = F \oplus G$

démo :

1) Oxq F et G sont en somme directe

On a donc $F \cap G = \{0_E\}$

donc $\dim(F \cap G) = 0$

. Mq $F + G = E$

on a (Grassmann) $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

$= \dim E$ par hypothèse

On a F + G sev E avec égalité des dimensions

donc $F + G = E$

2) Oxq $F + G = E$

on a donc $\dim(F+G) = \dim E$

Or, $\underbrace{\dim(F+G)}_{= \dim E \text{ par somme pleine}} = \underbrace{\dim F + \dim G}_{= \dim E \text{ par hypothèse}} - \dim F \cap G$

donc $\dim(F \cap G) = 0$

donc $F \cap G = \{0_E\}$

Généralisation :

Si E evf $F_1, \dots, F_p$ sev E

$$\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

Alors :

1) si la somme est pleine
   ie si $E = F_1 + \dots + F_p$ alors la somme est directe

2) Rcpt, si la somme est directe, elle est pleine

démo : exo