Chapitre 23

Dénombrement

0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Les sept premières lignes du triangle de Pascal

Soit E un ensemble.

On dit que E est fini *s'il existe $n \in \mathbb{N}$ un entier et $f : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ une application bijective. On appelle alors n le* cardinal *de E et on le note* $\operatorname{Card} E := n$.

Le dénombrement consiste en l'étude des cardinaux des ensembles. Dénombrer un ensemble, c'est calculer son cardinal.

Chapitre 23 : Dénombrement

I, Entiers naturels $\mathbb{N}$

1) Construction de $\mathbb{N}$

Elle est admise et hors programme

Idée : . $0 := \emptyset$

. si E est un ens, on note $s(E) = E \cup \{E\}$
successeur

. $1 := s(0)$, $2 := s(1)$; $3 := s(2)$ ...

. et enfin : $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Rq : cf également les 5 axiomes de Peano

Soit (E, s, a) un triplet tq

1°) E ensemble

2°) $s : E \to E$

3°) $a \in E$

On dit que ce triplet est un ens d'entiers ssi

(A1) s est injective

(A2) a n'est pas atteint par $s(\cdot)$

(A3) $\forall x \in E \ . \ x \neq a \Rightarrow \exists x' \in E : x = s(x')$

(A4) Soit $A \subset E$ tq . $a \in A$

. $\forall x \in A, \ s(x) \in A$

alors $A = E$

$$\left(\text{ie } \forall A \in \mathcal{P}(E), \ \left.\begin{array}{l} a \in A \\ \forall x \in A, s(x) \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = E \right)$$

2) Relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

Def : Soient $n, m \in \mathbb{N}$
on dit que $n \leq m$ ssi $\exists k \in \mathbb{N} : m = n + k$

3) Principe de récurrence

C'est l'axiome A4

4) $\mathbb{N}$ est bien ordonné

Théo : Soit $A \subset \mathbb{N}$ tq $A \neq \emptyset$
Alors A admet un plus petit élément pour $\leq$

II, Cardinaux

1) Notation

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n := [\![1, n]\!]$
ie $E_n := \{ k \in \mathbb{N} \mid k \geq 1 \text{ et } k \leq n \}$

Idée : E_n est de cardinal n
on va utiliser E_n ĉ modèle pour déf le cardinal

ev	ensembles
. $\mathbb{K}^n$	. E_n
. E evf	. E est fini (Δ E : ensemble)
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\exists\, E \underset{\text{iso}}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{K}^n$	$\exists f : E \underset{\text{bijec}^{\circ}}{\xrightarrow{\sim}} E_n$
. $\dim E = n$	. $\text{card } E = n$

2) Définition

Proposition - définition :

Soit E un ensemble

1) On dit que E est fini ssi$\overset{\Delta}{}$
$\exists n \in \mathbb{N}, \exists f : E_n \to E$: f bijective

2) Soient $n, m \in \mathbb{N}$; soit $f : E_n \to E$
$g : E_m \to E$

Alors : si $\left.\begin{matrix} f \text{ est bijective} \\ g \text{ est bijective} \end{matrix}\right\} n = m$

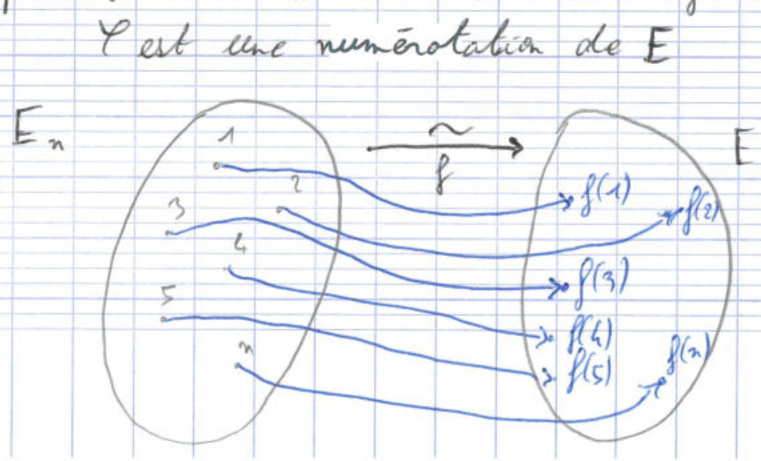
3) Si E est fini, l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\exists f : E_n \to E$ bijective est appelé le cardinal de E et est noté $\mathrm{Card}(E)$, $|E|$ ou $\#E$

démo : polycopié

Rq : il suffit de mq $\forall m, n \in \mathbb{N}, (\exists f : E_n \to E_m \text{ bij} \Rightarrow m = n)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: " $\forall m \in \mathbb{N}, \exists f : E_n \to E_m \text{ bij} \Rightarrow m = n$ "
On mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ par récurrence sur n.

Rq : Si $\varphi : E_n \to E$ est une bijection, on dit que φ est une numérotation de E



Si E est fini et si $n := |E|$ alors, on peut écrire $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Rq : Une énumération de E est une bijection $f : \mathbb{N} \to E$

3) Transfert de finitude

Prop : Soit $f : E \to F$ une application

1) $\left.\begin{array}{l} F \text{ fini} \\ f \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} .\ E \text{ est fini} \\ .\ |E| \leq |F| \end{array}$

2) $\left.\begin{array}{l} E \text{ fini} \\ f \text{ surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} .\ F \text{ est fini} \\ .\ |E| \geq |F| \end{array}$

démo : voir poly

4) Cardinaux et inclusions

Prop : Soit E un ens. fini alors :

1) $A \subset E \Rightarrow \begin{cases} A \text{ est fini} \\ |A| \leq |E| \end{cases}$

2) $\left.\begin{array}{l} A \subset E \\ |A| = |E| \end{array}\right\} \Rightarrow A = E$

démo : 💡 Une inclusion peut être comme une injection

Soit $A \subset E$

On définit : $i : A \to E$
$a \mapsto a$

alors i est injective

suite sur poly

5) Cardinal, union et intersection

Prop : Soit $(A_i)_{i\in I}$ famille finie d'ensembles finis et deux à deux disjoints

Alors $\left| \bigsqcup_{i\in I} A_i \right| = \sum_{i\in I} |A_i|$

Rappel : si la famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ est 2 à 2 disjoints, on note $\bigsqcup_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} A_i$

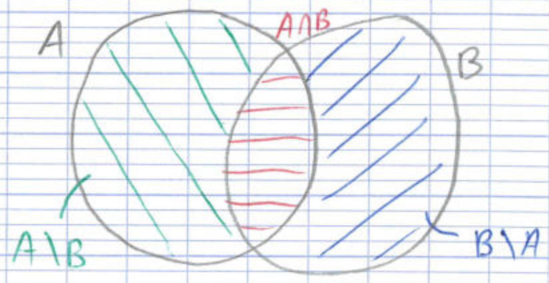
démo : poly

Théorème (formule d'inclusion, exclusion)

Soient A, B des ensembles finis.

Alors $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

démo : On dessine



On a :

. $A = (A\setminus B) \sqcup (A\cap B)$

donc $|A| = |A\setminus B| + |A\cap B|$

de m̂ : $B = (B\setminus A) + (A\cap B)$

dc : $|B| = |B\setminus A| + |A\cap B|$

Enfin $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$

donc $|A \cup B| = \underbrace{|A \setminus B|}_{|A| - |A \cap B|} + |A \cap B| + \underbrace{|B \setminus A|}_{|B| - |A \cap B|}$

6) Formule du crible

a) Cas de trois ensembles

Si A, B, C ens finis, on a :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

démo :

On a $|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$

Méthode : on décompose le calcul

On a $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$|(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|$

Enfin, $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$

b) Cas des 4 ensembles

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = (|A_1| + \dots) - (|A_1 \cap A_2| + \dots) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|)$$

c) Formule du crible (Poincaré)

Prop : Soit $p \in \mathbb{N}^*$

Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ des ens finis

Alors $\left|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right| = \sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,p]\!])} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| (-1)^{\operatorname{card}(I)+1}$

$$= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}([\![1,p]\!]) \\ tq\ |I| = k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

démo :

on procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$

. $p = 1$: ok

. Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tq la propriété soit vraie pour p ensembles. Montrons-la pour $p+1$ ensembles

Soient $A_1, \dots, A_{n+1}$, des ensembles finis

Idée : on écrit :

$$A_1 \cup \dots \cup A_p \cup A_{p+1} = (A_1 \cup \dots \cup A_p) \cup A_{p+1}$$

On pose $A := \bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $B := A_{p+1}$

On a $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

et $A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \cap A_{p+1}$

$$= \bigcup_{i=1}^{p} (A_i \cap A_{p+1})$$

D'après l'hyp de réc, on a :

1) $|A| = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}([\![1,p]\!]) \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$

2) $|A \cap B| = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}([\![1,p]\!]) \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_{p+1}) \right|$

Soit $k \in [\![1,p]\!]$

Il y a deux types de parties à k éléments de $[\![1,p+1]\!]$:

a) celles qui ne contiennent pas $(p+1)$: ce sont exactement les parties de $[\![1,p]\!]$ à k éléments

b) celles qui contiennent $(p+1)$:
elles s'écrivent $I' \cup \{p+1\}$
$I' \in \mathcal{P}([\![1,p]\!])$ à $(k-1)$ éléments

On a :

$$\sum_{\substack{I \in \mathcal{P}([\![1,p+1]\!]) \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

$$= \sum_{\substack{I' \in \mathcal{P}([\![1,p]\!]) \\ |I|=k-1}} \left| \bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_{p+1}) \right|$$

On peut écrire :

$$-|A \cap B| = \sum_{l=2}^{p+1} (-1)^{l+1} \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}([\![1,p+1]\!]) \\ \cdot |I|=l \\ \cdot p+1 \in I}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

donc, $$|A \cup B| = \sum_{k=2}^{p} (-1)^{k+1} \left(\sum_{\substack{I \subset [\![1,p+1]\!] \\ |I| = k \\ p+1 \notin I}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + \sum_{\substack{I \subset [\![1,p+1]\!] \\ |I| = k \\ p+1 \in I}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \right)$$

$$+ (-1)^{p+1+1} \left|\bigcap_{i \in [\![1,p+1]\!]} A_i\right|$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} |A_i| + |A_{p+1}|$$

III. Applications entre ensembles finis

1) Conditions nécessaires d'injectivité, etc

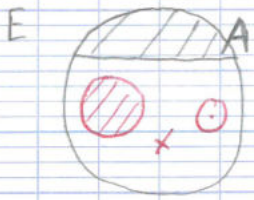
Prop : E, F ens. finis
$f : E \to F$ application

Alors :
1) f inj $\Rightarrow |E| \leq |F|$
2) f surj $\Rightarrow |E| \geq |F|$
3) f bij $\Rightarrow |E| = |F|$

démo : poly

Exemple d'exo :
Soit E un ensemble fini
Soit $A \subset E$
a) Combien y a-t-il de parties de E disjointes de A ?
b) Combien y a-t-il de parties de E d'intersection $\neq \emptyset$ avec A ?
c) Combien y a-t-il de parties de E contenant A ?

a) Notons $N := |E|$ et $p := |A|$



⚠ On a pas : $|X| \leq N-p \Rightarrow X \subset E \setminus A$

Soit X une partie de E

On a $X \cap A = \emptyset \iff X \subset E \setminus A$

Ainsi, les parties de E disjointes de A sont exactement les parties de $E \setminus A$

Le nombre cherché est donc :

$$\mathrm{Card}\,(\mathcal{P}(E\setminus A)) = 2^{\mathrm{card}(E \setminus A)} = 2^{N-p}$$

Application : <u>principe des tiroirs</u>

Soit $n \geq 1$, soit $p > n$

Alors, si on veut ranger p foulards dans n tiroirs alors il y aura nécessairement un tiroir avec au moins deux foulards

<u>démo :</u> On considère $f : \{\text{foulards}\} \to \{\text{tiroirs}\}$

$x \mapsto$ le tiroir où est rangé x

On a $|\{\text{foulards}\}| = p > |\{\text{tiroirs}\}| = n$

donc f ne peut pas ê injective.

Application.

Soit $(x_1, \dots, x_{11}) \in [0,1]^{11}$

Alors $\exists k \neq l : |x_k - x_l| \leqslant \frac{1}{10}$

démo : on découpe $[0,1]$ en 10 intervalles

$[0, \frac{1}{10}],]\frac{1}{10}, \frac{2}{10}], \dots,]\frac{9}{10}, 1]$

C'est une partition de $[0,1]$
D'après le principe des tiroirs, il existe $k \neq l$ des indices tq x_k et x_l soient dans le m̂ sous intervalle.

Exo : Mq $\exists k \neq l : |x_k - x_l| < \frac{1}{10}$ $\rightarrow$ V ou F

- si $(x_1, \dots, 10) \in [0,1]^{10}$ alors $\exists k \neq l : |x_k - x_l| \leqslant \frac{1}{10}$:
V ou F ?

2) Bijectivité en cas d'égale cardinalité !!

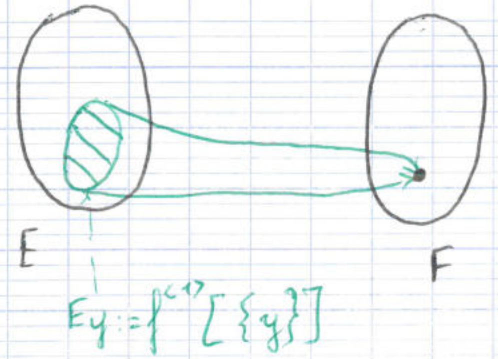
Théo :

Soient E, F des ensembles finis tq $|E| = |F|$
Soit $f : E \rightarrow F$
Alors, on a : f inj $\Leftrightarrow$ f surj $\Leftrightarrow$ f bij

démo :

1) Mq f inj $\Rightarrow$ f surj

Idée :



et $|E_y| = 0$ ou 1 car f inj

Si $y \in F$, on pose $E_y := f^{<-1>}[\{y\}]$
On a $\forall y \in F$, $|E_y| \leq 1$
De plus, les $(E_y)_{y\in F}$ sont 2 à 2 disjoints
En effet : soient $y_1, y_2 \in F$ tq $E_{y_1} \cap E_{y_2} \neq \emptyset$

Soit $x \in E_{y_1} \cap E_{y_2}$. On a $\begin{cases} f(x) = y_1 \text{ car } x \in E_{y_1} \\ f(x) = y_2 \text{ car } x \in E_{y_2} \end{cases}$

donc $y_1 = y_2$
Par contraposée : $\forall y_1, y_2 \in F$, $y_1 \neq y_2 \Rightarrow E_{y_1} \cap E_{y_2} = \emptyset$

De plus, la famille $(E_y)_{y\in F}$ recouvre E
Mq si $x \in E$, alors x est dans l'un des E_y
En effet, $\forall x \in E$, $x \in E_{f(x)}$

On a donc $E = \bigsqcup_{y \in F} E_y$

donc $|E| = \sum_{y\in F} |E_y|$

Or, $|E| = |F| = \sum_{y\in F} 1$

donc $|F| - |E| = 0 = \sum_{y \in F} 1 - |E_y|$

$\hat{C}$ f inj, $\forall y \in F$, $1 - |E_y| \geq 0$

Rappel : $\left.\begin{array}{l} \forall i, \alpha_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall i, \alpha_i = 0$

donc, $\forall y \in F$, $|E_y| = 1$

Or, dire que $E_y \neq \emptyset$ équivaut à dire que y est atteint par f

CCL : f est surj

Mq f surj $\Rightarrow$ f bij

Osq f surj.

On raisonne par l'absurde et osq f n'est pas inj.

Soient donc $a_1, a_2 \in E$ tq $f(a_1) = f(a_2)$ et $a_1 \neq a_2$

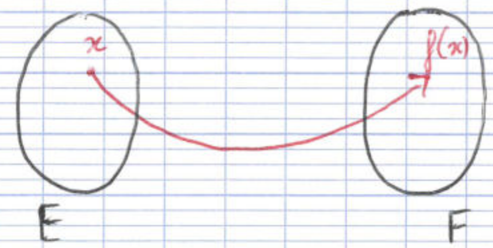
On note $\tilde{f} := f|_{E \setminus \{a_2\}} : E \setminus \{a_2\} \longrightarrow F$

Alors, $\tilde{f}$ est surjective

donc, $|E \setminus \{a_2\}| \geq |F|$

c'est absurde

Rq :



On pose $F_x = \{f(x)\}$

$\bigcup_{x \in E} F_x \subset F$

donc, $\left| \bigcup_{x \in E} F_x \right| \leq |F|$

Ici, on pourrait utiliser les E_y.

$\hat{C}$ f surj : $|E_y| \geq 1$ pour tous les y

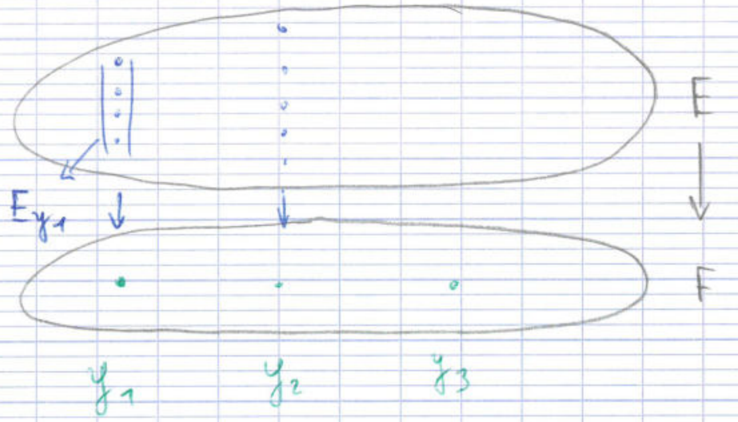
donc, $|E| = \sum_{y \in F} |E_y| = \sum_{y \in F} 1$

3) Principe des Bergers

Prop : $E \xrightarrow{f} F$ (E, F finis) ; $p \in \mathbb{N}^*$

Osq $\forall y \in F, \left| f^{<-1>} [\{y\}] \right| = p$

Alors : $|E| = p \cdot |F|$



Démo :

On a vu : $|E| = \sum_{y \in F} |E_y|$

$= \sum_{y \in F} p = p \cdot |F|$

IV, Cardinaux des principales constructions ensemblistes

E, F : ensembles finis. On note $n := |E|$; $m := |F|$

1) Produit cartésien

Prop : $|E \times F| = |E| \times |F|$

démo 1 :

Pour construire un élément (x,y) de $E \times F$, on procède comme suit :

1°) on choisit un élément x de E : on a $|E|$ choix possibles

2°) ——————— y de F : —— $|F|$ ——

De plus, ce procédé de construction est exhaustif et sans redondance.

Donc, on a $|E \times F| = |E| \times |F|$

démo 2 :

Pour $x_0 \in E$, on note $A_{x_0} := \{x_0\} \times F$

On a donc $A_{x_0} := \left\{ (x,y) \in E \times F \;\middle|\; x = x_0 \right\}$

$$= \left\{ (x_0, y) \;\middle|\; y \in F \right\} \subset E \times F$$

. Les $(A_x)_{x \in E}$ sont 2 à 2 disjoints et recouvrent E.

donc $|E \times F| = \sum_{x \in E} |A_x|$

. Or, fixons $x_0 \in E$, A_{x_0} est en bijection avec F

donc $|A_{x_0}| = |F|$

$$\left(\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & A_{x_0} \\ y & \longmapsto & (x_0, y) \end{array} \right)$$

. Donc, $|E \times F| = \sum_{x \in E} |F| = |E| \cdot |F|$

Généralisation :

$$|E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|$$

2) Applications de E dans F

Rappel : $\mathcal{F}(E,F)$ se note aussi F^E

Prop : $|\mathcal{F}(E,F)| = |F^E| = |F|^{|E|}$

démo : On écrit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$
Pour construire une application $f : E \to F$, on procède comme suit :
1°) on choisit l'image de x_1 par f : on a $|F|$ choix possibles
2°) ——————— x_2 par f : on a $|F|$ choix possibles
⋮
n°) Enfin, on choisit $f(x_n)$, on a tjrs $|F|$ choix pos.

De plus, ce procédé de construction est exhaustif et sans redondance.
donc $|F^E| = \underbrace{|F| \times \ldots \times |F|}_{n \text{ fois}} = |F|^n = |F|^{|E|}$

exo : donner une démo + formelle

3) $\mathcal{P}(E)$

Prop : $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

démo :

• On écrit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$

Pour construire une partie A de E, on procède c̄ suit :

1°) on décide si x_1 est dans A ou non : 2 choix pos.

2°) on fait la m̂ chose pour x_2 : 2 choix pos.

⋮

n°) on décide si $x_n \in A$ ou $x_n \notin A$

De plus, ce procédé de construction est exhaustif et sans redondance.

donc, $|\mathcal{P}(E)| = \underbrace{2 \times \dots \times 2}_{n \text{ choix possibles}} = 2^n$

• On a une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$

On définit : $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$
$A \mapsto \mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$
$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin A \\ 1 \text{ si } x \in A \end{cases}$

f° indicatrice de A

et $\psi : \{0,1\}^E \to \mathcal{P}(E)$
$f \mapsto \{x \in E \mid f(x) = 1\}$ ↳ $f^{\langle -1 \rangle}[\{-1\}]$

On vérifie que φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre donc, $|P(E)| = \left| \{0,1\}^E \right| = |\{0,1\}|^{|E|} = 2^{|E|}$

V, Permutations, listes sans répétition

1) Permutation

Déf : Soit E un ensemble. Une permutation de E est une bijection de E

On note S_E ou $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des permutations de E

On note aussi $\mathfrak{S}_n := S_{[\![1,n]\!]}$

Rq : . n = 5

Les éléments de $\mathfrak{S}_5$ se notent généralement :

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

. $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe dont le neutre est $Id_{[\![1,n]\!]}$

si $f, g : E \to E$ bij alors $g \circ f : E \to E$ bij

on dispose de $f^{-1} : E \to E$

on pose $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

on a $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Ainsi, $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est non commutatif

. Cycles :

pour $n = 5$, un ex de cycle est :

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

et 4, 5 invariants : c'est un 3-cycle de $\mathfrak{S}_5$ de support $\{1, 2, 3\}$

C'est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, on le note $(1\ 3\ 2)$
$= (3\ 2\ 1)$
$= (2\ 1\ 3)$

. Prop.

a) Deux cycles à support disjoints commutent

b) Toute permutation s'écrit c un produit (unique à l'ordre près) de cycles à supports disjoints.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 5\ 2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 6\ 2)$

Rq : on note P_n "la proba qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ soit un cycle"

$P_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Rq : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \exists k \in \mathbb{N} : \gamma^k = \sigma$

. Un 2-cycle est une transposition

On a $[(1 2)(5 6)]^2 = (1 2)^2 (5 6)^2 = Id$

Prop : On suppose E fini, $E = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$|\mathfrak{S}_E| = |E|!$$

démo : Pour construire une permuta° σ de E, on procède comme suit :

1°) On choisit $\sigma(x_1)$: on a n choix possibles

2°) on choisit $\sigma(x_2)$: on a n-1 choix possible
on ne peut pas avoir $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$ mais tous les autres choix sont possibles

3°) pour $\sigma(x_3)$, de m̂, n-2 choix possibles

⋮

n°) Pour $\sigma(x_n)$, il ne reste qu'un seul choix pos.

Ce procédé de construction est exhaustif et sans redondance

donc, on a $|\mathfrak{S}_E| = n \times (n-1) \times \dots \times 1 = n!$

2) Listes sans répétitions

Def : E ens ; $p \in \mathbb{N}^*$

Une p-liste sans répétitions d'éléments de E est un élé^t $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tq $\forall i \neq j,\ x_i \neq x_j$

⚠ l'ordre compte

ex : $E = \{a, b, c, d\}$
On aura (a, b, c, d) est bien une 4-liste sans répétition mais ce n'est pas le cas de (a, c, b, a)

. $(a, b, c, d) \neq (b, c, a, d)$

Fait : une p-liste sans répétition de E correspond à $f : [\![1,p]\!] \to E$ injective.

démo : $(x_1, \dots, x_p) \longleftrightarrow f : [\![1,p]\!] \to E$
$i \longmapsto x_i$

Prop : $n := |E|$; $p \in \mathbb{N}^*$
1) Si $p > n$, il n'y a pas de p-liste sans répétition
2) si $1 \leq p \leq n$, il y a :

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n! \to n \text{ facteurs}}{(n-p)! \to n-p \text{ facteurs}}$$

p-listes sans répétition dans E

démo : Pour construire une telle liste :
1) on choisit son 1er élément : on a n choix
2) on choisit son 2ème élément : on n'a plus que $(n-1)$ choix
⋮
p) pour le p-ième choix : $n-(p-1)$ choix

Q C'est : $\underbrace{n(n-1)\dots(n-?)}_{p \text{ facteurs}}$

Corollaire : E, F ensembles finis

$$\#\{f : E \to F \mid f \text{ inj}\} = \frac{|F|!}{(|F|-|E|)!}$$

Rq : on connait $\#\{f : E \to F \mid f \text{ bij}\}$

$= 0$ si $|E| \neq |F|$; $= |E|!$ (ça correspond aux permutations)

+ dem : $\# \{ f : E \to F \text{ surj} \}$

3) Parties à k éléments

E ens ; $k \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$)

On note $\mathcal{P}_k(E) := \{ A \subset E \mid |A| = k \}$

On note $\binom{n}{k} = \# \mathcal{P}_k(E)$

Formule de Pascal

$E := [\![1, n+1]\!]$; $a := n+1$

On veut dénombrer $\mathcal{P}_k(E)$.

On a :

$$\Phi : \overbrace{\mathcal{P}_k([\![1,n]\!])}^{1} \sqcup \overbrace{\mathcal{P}_{k-1}([\![1,n]\!])}^{2} \to \mathcal{P}_k(E)$$

$$X \longmapsto \begin{cases} X \text{ si } |X| = k & \text{(cas 1)} \\ X \cup \{n+1\} \text{ si } |X| = k-1 \end{cases}$$

$$\Psi : \mathcal{P}_k(E) \to \mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \sqcup \mathcal{P}_{k-1}([\![1,n]\!])$$

$$Y \longmapsto \begin{cases} Y \text{ si } n+1 \notin Y \\ Y \setminus \{n+1\} \text{ si } n+1 \in Y \end{cases}$$

On a Φ et Ψ bijectives réciproques

Ainsi :

$$|\mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \sqcup \mathcal{P}_{k-1}([\![1,n]\!])| = |\mathcal{P}_k([\![1,n+1]\!])|$$

ie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Rq : au lieu de prendre $E := [\![1, n+1]\!]$, il est + clair de prendre E tq $|E| = n+1$ et $a \in E$ un élé^t fixé

Fait : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

démo : $\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$

Fait : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

démos : . récurrence

. lemme des bergers :

$\varphi :$ p-liste ss répét de E $\longrightarrow \mathcal{P}_p(E)$

$x = (a_1, \dots, a_p) \longmapsto \{a_1, \dots, a_p\}$

"fibre de φ au dessus d'une partie $A \in \mathcal{P}_p(E)$"

ce sont ttes les p-listes "de support A"

ex : $E = \{a, b, c, d\}$

$p = 2$

$A = \{a, c\}$

Quelles sont les p-listes de E tq $\varphi(x) = A$?

Ce sont (c, a) et (a, c)

Il y en a $p!$

Donc d'après le lemme des Bergers :

$\underbrace{\left| \text{p-listes sans répét} \right|}_{\frac{n!}{(n-p)!}} = p! \binom{n}{p}$ d'où le résultat

PCSI 3 — Lycée SAINTE-GENEVIÈVE
2019/2020 — 12 mars 2020

Dénombrement

Synthèse, preuves et résultats complémentaires.

« Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'Homme. »

Leopold Kronecker (1823 – 1891)
Mathématicien allemand

1 Une notation

Dans tout ce qui suit, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{E}_n := [\![1, n]\!]$.
En particulier, on a $\mathbf{E}_0 = \varnothing$.

2 Un complément de théorie des ensembles

Proposition 1
Soient E et F des ensembles. Alors,

a) $\exists f : E \longrightarrow F$ *injective* $\Longrightarrow$ $\exists g : F \longrightarrow E$ *surjective*
b) $\exists g : F \longrightarrow E$ *surjective* $\Longrightarrow$ $\exists f : E \longrightarrow F$ *injective*

Démonstration. —

a) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective.
Construisons une application $g : F \longrightarrow E$, qui s'avèrera être surjective.
Avant de faire quoi que ce soit, on choisit un $a \in E$.
Soit $y \in F$.

- Si $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme f est injective, ce x est même unique. On pose $g(y) := x$.
- Si $y \notin f(E)$, on pose $g(y) := a$.

Vérifions que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On aura donc construit un inverse à gauche de f. Soit $x \in E$. On pose $y := f(x)$. Par définition de g, on a $g(y) = x$. Donc, $(g \circ f)(x) = x$.
Donc, $g \circ f$ est surjective ; donc, g est surjective.

b) Soit $g : F \longrightarrow E$ une application surjective.
Construisons une application $f : E \longrightarrow F$, qui s'avèrera être injective.
Soit $x \in E$. Comme g est surjective, on sait qu'il existe $y \in F$ tel que $g(y) = x$. On choisit un tel y et on pose $f(x) = y$.
Vérifions que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On aura donc construit un inverse à droite de g. Soit $x \in E$. On considère $f(x)$. Par définition de f, on a $g(f(x)) = x$. Donc, on a bien $(g \circ f) = \mathrm{Id}_E$. En particulier, $g \circ f$ est injective ; donc, f est injective.

On a bien montré ce qu'on voulait. ∎

3 Trois lemmes de dénombrement

Lemme 2
Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\exists \varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_m \text{ injective} \implies n \leqslant m.$$

Démonstration. du lemme 4 - On raisonne par récurrence forte. On note

$$P(n) := \text{« } \forall m \in \mathbb{N},\ \left(\exists \varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_m \text{ injective} \implies n \leqslant m\right) \text{ »}.$$

Initialisation : $n = 0$
Soit $m \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : \mathbf{E}_0 \longrightarrow \mathbf{E}_m$ une application. Comme $E_0 = \varnothing$, on a $\varphi(E_0) = \varnothing$. Si $m \geqslant 1$, on a $\mathbf{E}_m \neq \varnothing$ et donc φ ne peut être surjective. Donc, $m = 0$, *ie* $n = m$, ce qu'on voulait montrer.

Hérédité :
Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \Big(\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(k)\Big) \implies P(n-1).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(n-1)$ est vraie. Soit donc $m \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : E_{n+1} \longrightarrow \mathbf{E}_m$ une bijection. On va montrer que $n + 1 = m$. Pour cela, on distingue trois cas.

- Cas $m \leqslant n$.
  On sait que $P(m)$ est vraie. On dispose de la réciproque de φ ; c'est $\varphi^{-1} : \mathbf{E}_m \longrightarrow E_{n+1}$. En appliquant $P(m)$, on obtient que $m = n + 1$, ce qui est absurde. Ce cas est donc impossible.
- Cas $m > n + 1$.
  On a donc $m \geqslant n + 2$. On va construire à partir de φ une bijection $\psi : \mathbf{E}_n \longrightarrow E_{m-1}$. On note $a := \varphi(n-1)$. Puis, on considère l'application $\theta : \mathbf{E}_m \longrightarrow \mathbf{E}_m$ qui échange a est m. *Ie*, on considère :

$$\theta : \begin{cases} \mathbf{E}_m \longrightarrow \mathbf{E}_m \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \neq a \text{ et } x \neq m \\ m & \text{si } x = a \\ a & \text{si } x = m \end{cases} \end{cases}$$

  L'application θ est bijective car c'est une involution : on a $\theta \circ \theta = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}_m}$.
  On considère l'application $\theta \circ \varphi$:

$$E_{n+1} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{E}_m \xrightarrow{\theta} \mathbf{E}_m.$$

  En tant que composée de bijections, c'est une bijection. Par ailleurs, on a

$$(\theta \circ \varphi)(n+1) = \theta(\varphi(n-1)) = \theta(a) = m.$$

  Comme $\theta \circ \varphi$ est injective, on a donc $(\theta \circ \varphi)(\mathrm{E}_n) = \mathbf{E}_{m-1}$. On peut donc considérer

$$\psi := (\theta \circ \varphi)_{|\mathbf{E}_n}^{|\mathbf{E}_{m-1}} : \mathrm{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_{m-1}.$$

  C'est encore une bijection. Par hypothèse de récurrence, on a donc $n = m - 1$, ce qui est absurde.
- Dernier cas : $m = n + 1$.
  Le seul cas restant, et donc le seul possible, est $m = n - 1$, ce qu'on voulait montrer.

Ainsi, on a bien montré que $n + 1 = m$, ce qui conclut l'hérédité. ■

Lemme 3
Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\exists \varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_m \text{ surjective} \quad \Longrightarrow \quad n \geqslant m.$$

Démonstration. — On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_m$ surjective. D'après la proposition 1, il existe $\psi : \mathbf{E}_m \longrightarrow \mathbf{E}_n$ injective. D'après le lemme 2, on a $m \leqslant n$, ce qu'on voulait. ∎

Lemme 4
Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\exists \varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_m \text{ bijective} \quad \Longrightarrow \quad n = m.$$

Démonstration. — Il suffit de combiner les lemmes 2 et 3. ∎

4 Définition du cardinal

Proposition-Définition 5
Soit E un ensemble.

1) *Soient $n, m \in \mathbb{N}$.*
   On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow E$ et $\psi : \mathbf{E}_m \longrightarrow E$ des bijections.
   Alors, $n = m$.

2) *On dit que E est fini $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$*

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists \varphi : E_n \longrightarrow E \text{ bijective.}$$

S'il existe, un tel entier n est unique ; on l'appelle alors cardinal *de E et on le note :*

$$\operatorname{Card} E \quad \text{ou} \quad |E| \quad \text{ou} \quad \#E.$$

3) *Dans le cas contraire, on dit que E est* infini.

Démonstration. — Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et soient $\varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow E$ et $\psi : \mathbf{E}_m \longrightarrow E$ des bijections. Alors, l'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est une bijection de $\mathbf{E}_n$ dans $\mathbf{E}_m$. D'après le lemme 4, on a donc $n = m$. ∎

5 Ensembles privés d'un élément

Lemme 6
Soient E un ensemble fini et soit $a \in E$. Alors,

$$E \setminus \{a\} \text{ est fini} \quad \text{et} \quad \big|E \setminus \{a\}\big| = |E| - 1.$$

Démonstration. — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow E$ une bijection. Soit $k_0 \in \mathbf{E}_n$ tel que $\varphi(k_0) = a$. On considère $\theta : \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_n$ définie par

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{E}_n & \longrightarrow & \mathbf{E}_n \\ k & \longmapsto & \begin{cases} k & \text{si } k \neq k_0 \text{ et } k \neq n \\ k_0 & \text{si } k = n \\ n & \text{si } k = k_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Tout simplement, θ est l'application qui échange k_0 et n. On a $\theta \circ \theta = \operatorname{Id}_{\mathbf{E}_n}$ (on dit que θ est une involution) : donc, θ est une bijection. On a $(\varphi \circ \theta)(n) = a$: on peut donc restreindre et corestreindre $\varphi \circ \theta$ et considérer

$$(\varphi \circ \theta)_{|\mathbf{E}_{n-1}}^{|E \setminus \{a\}} : \mathbf{E}_{n-1} \longrightarrow E \setminus \{a\} \ ;$$

c'est une bijection. Donc, $E \setminus \{a\}$ est fini et $|E \setminus \{a\}| = |E| - 1$. ∎

6 Cardinaux d'unions

6.1 Unions disjointes

Lemme 7
Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints, alors $A \cup B$ est fini et on a $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Démonstration. — On note $n := |A|$ et $m := |B|$ et on considère $\varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow A$ et $\psi : \mathbf{E}_m \longrightarrow B$ deux bijections. On pose

$$\theta : \begin{cases} \mathbf{E}_{n+m} \longrightarrow A \cup B \\ k \longrightarrow \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ \psi(k-n) & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant n+m \end{cases} \end{cases}.$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que θ est bijective. Ainsi, $A \cup B$ est fini et $|A \cup B| = |A| + |B|$. ■

Proposition 8
Soit E un ensemble.
Soient I un ensemble fini et $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{P}(E)^I$ une famille de parties finies de E deux à deux disjointes.
Alors,

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i \text{ est fini} \quad \text{et} \quad \left|\bigsqcup_{i\in I} A_i\right| = \sum_{i\in I} |A_i|.$$

Démonstration. — On démontre ce résultat par récurrence sur $n := |I|$.
Initialisation : $|I| = 1$
Dans ce cas, I a un seul élément i_0 et on a $E = A_{i_0}$.
Hérédité :
Soit $i_0 \in I$. Alors, $I \setminus \{i_0\}$ est de cardinal $|I| - 1$, d'après le lemme 6. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $(A_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$, on obtient

$$\left|\bigsqcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} A_i\right| = \sum_{i\in I\setminus i_0} |A_i|.$$

On applique ensuite le lemme 7 aux ensembles $\bigsqcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} A_i$ et A_{i_0} qui sont bien disjoints. On obtient :

$$\left|\bigsqcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} A_i \sqcup A_{i_0}\right| = \left|\bigsqcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} A_i\right| + |A_{i_0}| = \sum_{i\in I} |A_i|$$

ce qui conclut la preuve. ■

6.2 Inclusions, cardinal d'un sous-ensemble, égalité

Lemme 9
Soit E un ensemble.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une injection $f : E \longrightarrow \mathbf{E}_n$. Alors, E est fini.

Démonstration. — On raisonne par récurrence par n. On note

$$\mathscr{P}(n) := \text{« } \big(\exists f : E \longrightarrow \mathbf{E}_n \text{ injective}\big) \implies E \text{ fini »}.$$

<u>Initialisation</u> : $n = 0$
On a $\mathbf{E}_0 = \varnothing$. S'il existe $f : E \longrightarrow \varnothing$, c'est nécessairement que $E = \varnothing$. En particulier, E est fini.
<u>Hérédité :</u>
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Soit donc $f : E \longrightarrow \mathbf{E}_{n+1}$ une injection. On distingue deux cas.

- <u>$n+1 \notin f(E)$</u>
  Dans ce cas, on peut corestreindre f à $\mathbf{E}_n$: on obtient une injection $f^{|\mathbf{E}_n} : E \longrightarrow \mathbf{E}_n$. L'hypothèse de récurrence s'applique : E est fini.
- <u>$n+1 \in f(E)$</u>
  Soit donc $a \in E$ tel que $f(a) = n+1$. Comme f est injective, la restriction de f à $E \setminus \{a\}$ « n'atteint pas $n+1$ ». On peut donc considérer $f^{|\mathbf{E}_n}_{|E\setminus\{a\}} : E \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{E}_n$. C'est une injection. Par hypothèse de récurrence, $E \setminus \{a\}$ est fini. Or, $E \setminus \{a\}$ et $\{a\}$ sont disjoints. Donc, d'après le lemme 7, E est fini.

Dans tous les cas, E est fini ; donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. ■

Théorème 10
Soient E un ensemble fini et $A \subset E$. Alors,

a) A est fini

b) $|A| \leqslant |E|$

c) si $|A| = |E|$ alors $A = E$

Démonstration. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow E$ une bijection. On considère « l'injection canonique de A dans E » ; c'est l'injection

$$i : \begin{array}{l} A \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}.$$

En composant, on obtient : $\varphi^{-1} \circ i : A \longrightarrow \mathbf{E}_n$, qui est injective. Donc, d'après le lemme 9, A est fini.
De même, $E \setminus A$ est fini. Ensuite, on remarque que $E = A \cup (E \setminus A)$, cette union étant disjointe. Le lemme 7 s'applique bien ; on peut écrire

$$|E| = |A| + |E \setminus A|. \tag{$*$}$$

En particulier, on a $|A| \leqslant |E|$.
Pour terminer, toujours d'après $(*)$, si $|A| = |E|$ alors on a $|E \setminus A| = 0$ *ie* $E \setminus A = \varnothing$, *ie* $A = E$. ■

6.3 Unions

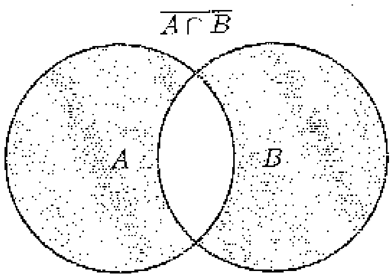
Théorème 11
Soit E un ensemble et soient $A, B \subset E$ des parties finies de E.
Alors, $A \cup B$ est fini et

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Démonstration. — On considère les trois parties

$$E_1 := A \setminus B$$
$$E_2 := B \setminus A$$
$$E_3 := A \cap B$$

qu'on peut représenter dans le diagramme de Venn suivant :



Les parties E_1, E_2 et E_3 sont disjointes. De plus, $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = A \cup B$. Donc, en appliquant la proposition 8, on a :

$$|E_1| + |E_2| + |A \cap B| = |A \cup B|.$$

Il nous reste à déterminer $|E_1|$ et $|E_2|$.

- On a $E_1 \cup E_3 = A$. De plus, E_1 et E_3 sont disjoints. Donc, $|E_1| + |A \cap B| = |A|$.
- De même, $|E_2| + |A \cap B| = |B|$.

En combinant ces identités, on obtient le résultat voulu. ■

7 Applications entre ensembles finis

Proposition 12
Soient E et F des ensembles finis et soit $f : E \longrightarrow F$.
Alors,

$$\begin{array}{lll} a)\ f \text{ injective} & \Longrightarrow & |E| \leqslant |F| \\ b)\ f \text{ surjective} & \Longrightarrow & |E| \geqslant |F| \\ c)\ f \text{ bijective} & \Longrightarrow & |E| = |F| \end{array}$$

Démonstration. — On note $n := |E|$ et $m := |E|$. Soient donc

$$\varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow E \quad \text{et} \quad \psi : \mathbf{E}_n \longrightarrow F$$

des bijections. On considère, naturellement, l'application :

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi := \mathbf{E}_n \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\psi^{-1}} \mathbf{E}_m$$

a) Si f est injective, alors $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_m$ l'est aussi. On a donc $n \leqslant m$, *ie* $|E| \leqslant |F|$.
b) Si f est surjective, alors $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbf{E}_n \longrightarrow \mathbf{E}_m$ l'est aussi. On a donc $n \geqslant m$, *ie* $|E| \geqslant |F|$.
c) Si f est bijective, elle est injective et surjective. Donc, on a $|E| = |F|$.

■

Théorème 13
Soient E et F des ensembles finis tels que $|E| = |F|$.
Soit $f : E \longrightarrow F$.
Alors,

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

Démonstration. — On montre que l'on a une boucle d'implications.
f injective $\Longrightarrow$ f surjective :
On suppose injective. On écrit :

$$f(E) = \bigcup_{x \in E} f(\{x\}).$$

Pour $x \in E$, on note $F_x := f(\{x\})$. Les ensembles F_x sont des singletons : pour tout $x \in E$, on a $F_x = \{f(x)\}$ *ie* $|F_x| = 1$, et c'est toujours vrai. De plus, comme f est injective, les F_x sont deux à deux disjoints. Donc, la proposition 8 et on peut écrire

$$|f(E)| = \sum_{x \in E} |F_x| = \sum_{x \in E} 1 = |E|.$$

D'après le théorème 10, on a donc $f(E) = E$: f est surjective.
f surjective $\Longrightarrow$ f bijective :
On suppose f surjective. On écrit :

$$E = f^{(-1)}(F) = \bigcup_{y \in F} f^{(-1)}(\{y\}).$$

Pour $y \in F$, on note $E_y := f^{(-1)}(\{y\})$. Les ensembles E_y sont deux à deux disjoints : c'est toujours le cas. On a donc

$$|E| = \sum_{y \in F} |E_y|. \qquad (*)$$

Comme f est surjective, pour tout $y \in F$, $E_y \neq \varnothing$. Comme $|E| = |F|$, il serait donc absurde qu'il existât un $y \in F$ tel que $|E_y| > 1$. Si l'on veut, on peut le voir plus formellement de la façon suivante : en soustrayant à $(*)$ de chaque côté $|E| = \sum_{y \in F} 1$, on a

$$0 = \sum_{y \in F} \underbrace{\left(\left|E_y\right| - 1\right)}_{\geqslant 0}.$$

Or, on pourrait montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \left[\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \left(\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0\right)\right].$$

(exercice : le faire). Ainsi, on a bien : $\forall y \in F,\ \left|E_y\right| = 1$; donc, f est injective ; donc, f est bijective.
<u>f bijective $\implies$ f injective :</u>
Par définition, c'est clair.

■