Chapitre 24 : Formules de Taylor, développements limités

Obj : 1) savoir calculer des DL

ex : $DL_5(0)$ de $\exp\left((\sin x)^2/3\right)$

2) connaître Taylor intégral et savoir l'appliquer

Notations : $a, b \in \mathbb{R}$ (⚠ $a \leq b$ n'est pas supposé)

$n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\ell(I) > 0$

I, Théorèmes de la moyenne

1) Moyenne uniforme

Déf : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

Osq $a < b$

La moyenne de f est $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

Théorème de la moyenne : $a < b$

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

alors $\exists c \in [a,b] : f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

démo : on applique le TAF à $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

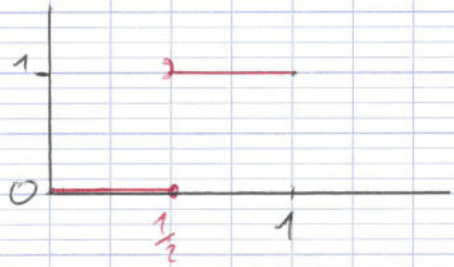
On a $F \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ car f $\mathcal{C}^0$

donc soit $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{\overbrace{F(b)-F(a)}^{\int_a^b f(t)dt,\ F(a)=0}}{b-a} = F'(c) \hookrightarrow f(c) \text{ car } F' = f$$

Rq : . c'est faux si f n'est pas continue

On prend f :



La moyenne de f vaut $\frac{1}{2}$:

c'est $\int_0^{1/2} 0 + \int_{1/2}^{1} 1 = 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

mais $\frac{1}{2} \notin f([0,1])$

. c'est faux si $f : I \to \mathbb{C}$
(le TAF et Rolle sont faux dans $\mathbb{C}$)

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto e^{it}$$

On a $\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt \to \int_0^{2\pi} \underset{\cos}{Re(..)} + i \int_0^{2\pi} \underset{\sin}{Im(...)}$

⚠ f T-périodique $\not\Rightarrow \int_0^T f = 0$ (ctrex : $f = 7$)

Fait : sin et cos sont de moyenne nulle

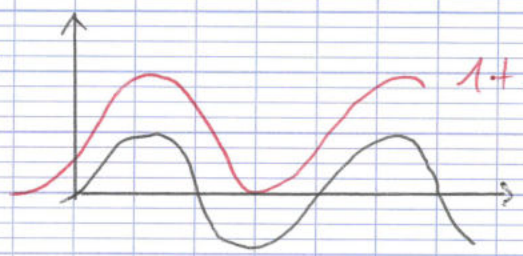
ie $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \cos = 0$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin = 0$$

démo : • $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \cos(t)\,dt = [\sin(t)]_a^{a+2\pi} = 0$

• sin : idem

Rq :



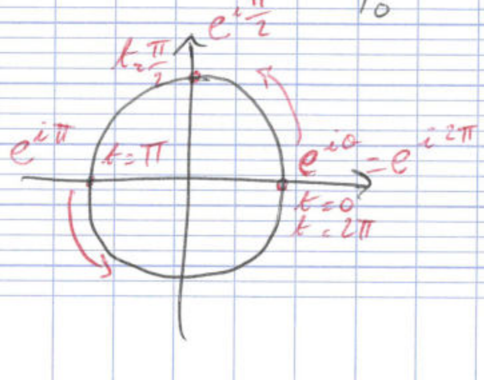
$$\int_0^{2\pi} 1+\sin = [t - \cos(t)]_0^{2\pi} = \underbrace{[t]_0^{2\pi}}_{= 2\pi} - \underbrace{[\cos(t)]_0^{2\pi}}_{= 0}$$

CCL. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1+\sin = 1$

Rq : $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$f \mapsto$ moy de f est linéaire

Autre méthode : $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} = 0$



($\triangle$ $[0,1] \to \mathbb{C}$ est 1-périodique)
$\theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$

<u>Bilan</u> : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = 0$

mais $\forall \theta, e^{i\theta} \neq 0$
(en effet : $\forall \theta, e^{i\theta} \in \mathbb{U}$
ie $\forall \theta, |e^{i\theta}| = 1$

ou $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective

2) Théorème de la moyenne pondérée

Notes : 15 ; 8 ; 17 ; 13
Moy : $\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4}$

Coeffs : coeff 10 ; 1 ; 1 ; 10

Moy : $\frac{\sum_{i=1}^{4} c_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} c_i}$

<u>Déf</u> : Soit $p : [a,b] \to \mathbb{R}_+$
1) p C^0 (il suffit que p soit C^0 par morceaux)
2) $p \neq \tilde{0}$ (il faut $\int_a^b p \neq 0$

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$
La moyenne de f pondérée par p : $\frac{\int_a^b f(t)p(t)\,dt}{\int_a^b p(t)\,dt}$

Rq : ici $p(\cdot)$ est fixé
$f \mapsto$ moy de f pondérée par p est linéaire

Théorème de la moyenne

- $p(\cdot)$ tq $p \geq 0$; p C^0 ; $\int_a^b p \neq 0$
- $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$
- alors : $\exists c \in [a,b]$: $\dfrac{\int_a^b f(t)p(t)\,dt}{\int_a^b p(t)\,dt} = f(c)$

démo : f est C^0. Grâce au thm des bornes atteintes, soient $x_m, x_M \in [a,b]$ tq
$\forall x \in [a,b]$, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

$$\Downarrow$$

$$\inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f$$

Or, $p(\cdot) \geq 0$
donc : $\forall x \in [a,b]$, $f(x_m)p(x) \leq f(x)p(x) \leq f(x_M)p(x)$
On intègre ds le bon sens entre a et b donc :

$$\int_a^b f(x_m)p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x_M)\,p(x)\,dx$$

> 0

d'où : $$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)p(x)\,dx}{\int_a^b \underbrace{p(x)\,dx}_{y}} \leq f(x_M)$$

Grâce au TVI, on sait que y est atteint par f

Rq : thm de la moy. uniforme = thm de la moy pondérée avec p constant

II, Formules de Taylor

1) Puissances divisées

<u>Notation</u> : $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

On note $P_{n,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$t \mapsto \frac{(t-a)^n}{n!}$$

<u>Faits</u> :

1) $P_{n,a}' = P_{n-1,a}$ $\quad n \geq 1$

2) $P_{n,a}(a) = 0$ $\quad$ ⚠ si $n \geq 1$ (F si $n=0$)

3) $P_{0,a} = \tilde{1}$

4) $P_{n+1,a}$ est la primitive de $P_{n,a}$ qui s'annule en a

5) On a donc $\displaystyle\int_a^x P_{n,a}(t)\,dt = \left[P_{n+1,a}(t)\right]_a^x = P_{n+1,a}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

<u>Version polynomiale</u> :

$n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{K}$ impose : $P_{n,a} := \dfrac{(X-a)^n}{n!} \in \mathbb{K}[X]$

. $P_{n,a}' = P_{n-1,a}$ si $n \geq 1$
. $\deg P_{n,a} = n$

<u>Fait</u> : $n \geq 0$; $a \in \mathbb{K}$

Alors $(\underset{1}{P_{0,a}}, \underset{X-a}{P_{1,1}}, \underset{\frac{(X-a)^2}{2}}{\ldots}, P_{n,a})_{\frac{(X-a)^n}{n!}}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

<u>démo</u> : . elle est libre car elle est échelonnée en degré ($\forall i,\ \deg P_i = i$)
. elle est de bonne taille ⚠ $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

CCL : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$
$$\exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \quad P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \frac{(X-a)^i}{i!}$$

2) Formule de Taylor avec reste intégral

<u>Théo</u> : (FTI)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$
Soient $a, b \in I$
Alors : $FTI_{f,n,a}(b)$
$$f(b) = f(a) + f'(a)\cdot(b-a) + f''(a)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} + f'''(a)\,\frac{(b-a)^3}{3!}$$
$$\dots + f^{(n)}(a)\,\frac{(b-a)^n}{n!} + \underbrace{\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt}_{\text{reste intégral}}$$

<u>Rq</u> : a est le pt pivot
$$\text{ie } f(b) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\,\frac{(b-a)^i}{i!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\,\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$$

. $n = 0$:
$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$$

permet de se souvenir que dans $\int_a^b f^{(n+1)}(t)\,\frac{(b-t)^{n}}{(n!)}\,dt$

démo : on fait des IPP successives

- f fixée $\in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$

$$P(\ell) : \text{“ } f(b) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \times (b-a)^i + \int \dots \text{ ”}$$

ie $P(\ell)$: $FTI_{f,\ell,a}(b)$ pour $\ell \in [\![0, n]\!]$

- $\ell = 0$: ok
- Hérédité : Soit $\ell \geq 0$ tq $FTI_{f,\ell,a}(b)$ soit vraie et $\ell \leq n-1$

On note $I := \int_a^b f^{(\ell+1)}(t) \frac{(b-t)^\ell}{\ell!} dt$

On veut $\int_a^b f^{(\ell+2)}$ etc

on fait une IPP en dérivant $f^{(\ell)}$

Calcul de I par IPP

On a $I = \left[f^{(\ell+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \times (-1) \right]_a^b - \int_a^b f^{(\ell+2)}(t) \times (-1) \frac{(b-t)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} dt$

$= f^{(\ell+1)}(a) \frac{(b-a)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} + \int_a^b f^{(\ell+2)}(t) \frac{(b-t)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} dt$

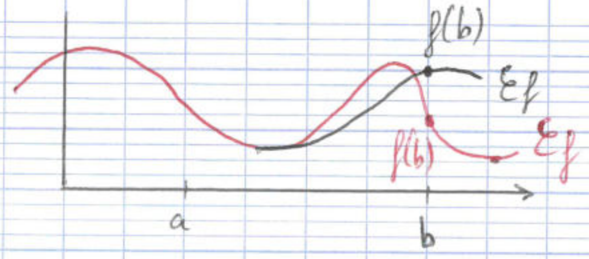
Rq : - l'idée des formules de Taylor : on sait ce qu'il se passe au pt a, on veut déduire une info au point b (proche de a)

- On note $pos_a(b)$ la posi° de b relative^t à a

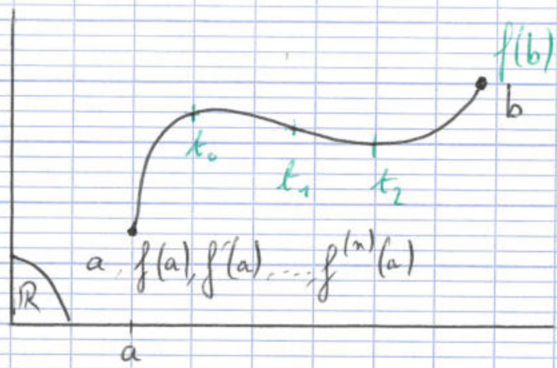
$f(b) =$ “ les valeurs de f au pt a $\times\ pos_a(b)$ ”

mais $f(b)$ est “ libre ” ie si les $f^{(k)}(a)$ sont fixées, $f(b)$ peut prendre nimp valeur

$\mathcal{E}x$:



Pour avoir une formule réaliste :



$$\int_a^b \cdots f^{(n+1)}(t) \; \underset{t}{pos}(b) \; dt$$

$$\int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!} \, dt$$

3) Polynôme de Taylor

Déf : $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$
$a \in I$

$$\underset{\in \mathbb{R}[X]}{T_{f,a,n}} := f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

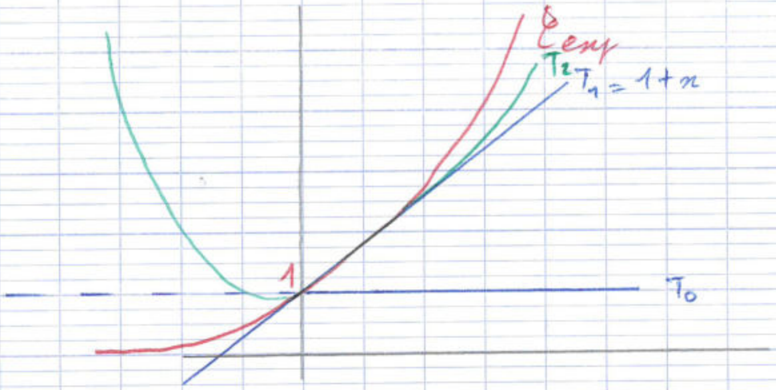
Rq : $f(b) = T_{f,a,n}(b) + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} \, dt$

ex : on a $\forall n, \ exp^{(n)} = exp$
donc $T_{exp,0,n} = \sum_{k=0}^{n} exp^{(k)}(0) \frac{(x-0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Rq : Taylor-Lagrange (C-faux) : $\exists c \in [a,b]$:
$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a) \frac{(b-a)^i}{i!} + f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}$$

Application :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \ \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$



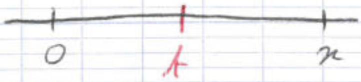
$T_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$$\exp(x) = T_n(x) + \int_0^x \exp^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt$$

On a $\exp^{(n+1)}(t) \geq 0 \ \forall t$

. si $t \in [0, x]$, $(x-t) \geq 0$

donc $\frac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$



donc $\forall t \in [0, x] : \exp^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$

on intègre ds le bon sens : donc $\int_0^x (\dots) \geq 0$ d'où l'inégalité.

? Mq si $n \in 2\mathbb{Z}+1$, alors c'est vrai sur tout $\mathbb{R}$

4) Inégalité de Taylor

Si on sait majorer $|f^{(n+1)}|$ sur I, on pourra contrôler la diff. entre f et $T_{f,a_0,n}$ pour $a_0 \in I$ fixé

ie $\forall x \in I$,

$$|f(x) - T_{f,a_0,n}(x)| \leq \underbrace{\text{contrôle de } |f^{(n+1)}|}_{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a_0 - \frac{1}{2}, a_0 + \frac{1}{2}]}} \frac{|x-a_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

donc si $|x - a_0|$ petit ie si x est proche de a_0, on aura une très bonne approximation de f par $T_{f, a_0, n}$

Prop : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Rq : on notera $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

ie si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on peut mq

$$S_n := I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} \in M_n(\mathbb{R})$$

On a $(S_n)_n \in (M_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$

On peut mq $(S_n)_n \xrightarrow{CV}$

On pose $\exp(A) := \lim\limits_{n \to \infty} S_n$

démo de la prop :

Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\left| \exp(x) - \underbrace{\left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)}_{T_{\exp, 0, n}(x)} \right|$

QR^x, $|l - u_n| \leq \dots \leq \varepsilon_n \to 0$

$$= \left| \int_0^x \exp(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right|$$

FTI

$$\leq \int_0^x \left| \exp(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \right| dt$$

peut être < 0

inégalité triangulaire : vrai si $x \geq 0$

$$\leq \int_0^x |e^x| \cdot \frac{|x-t|^n}{n!}\, dt \qquad |x-t|^n \leq \frac{x^n}{n!}$$

$$\leq e^x \int_0^x \frac{x^n}{n!}\, dt$$

$$\leq e^x \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot x = C \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Or, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $a^n = o(n!)$

$\forall a > 1$

donc $\dfrac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (x fixé)

Rq : meilleure majo :

$$\int_0^x e^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| dt \qquad \text{ici } x-t \geq 0 \text{ si } t \in [0,x] \ (x \geq 0)$$

$\Rightarrow$ on peut enlever $|\cdot|$

$$\text{donc} \ldots = \int_0^x e^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt$$

$$= e^x \cdot \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot (-1) \right]_0^x$$

$$= e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

cas $x < 0$: $\Rightarrow$ on inverse les bornes pr intégrer ds le bon sens

$$\ldots \leq \left| \int_0^x (\ldots) \right| = \left| \int_x^0 (\ldots) \right|$$

$$\leq \int_x^0 |(\ldots)|\ \underbrace{e^t}_{<1} \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt$$

$$\leq 1 \cdot \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!}\, dt \qquad x-t<0$$

$$\leq \int_x^0 \frac{|x|^n}{n!}\, dt = \frac{|x|^n}{n!} \cdot |x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

5) Formule de Taylor-Young

Théo :

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$

Soit $a_0 \in I$

Alors on a $f(a_0+t) \underset{t \to 0}{=} f(a_0) + f'(a_0)\,t + \frac{f''(a_0)}{2!}\,t^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!}\,t^n + o(t^n)$

démo :

1) Ecrire FTI pour f, et pivot a_0, $b = a_0 + t$

FTI $f, a_0, n-1\ (b)$

$$f(a_0+t) = f(a_0) + f'(a_0)\underbrace{(b-a)}_{\substack{= a_0+t-a_0 \\ = t}} + f''(a_0)\frac{t^2}{2} + \dots + f^{(n-1)}(a_0)\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+ \int_{a_0}^{a_0+t} f^{(n)}(\theta)\,\frac{(a_0+t-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\theta$$

On a : $f(a_0+t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a_0)}{k!}\,t^k$

$$= \int_{a_0}^{a_0+t} f^{(n)}(\theta)\,\frac{(a_0+t-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\theta - \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!}\,t^n$$

on fait le changet de variable $\theta = a_0 + x$ ie $x = \theta - a_0$

$$\int_0^t f^{(n)}(a_0+x)\cdot\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx$$

On a : $\int_0^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx$

$$= \left[-\frac{(t-x)^n}{n!}\right]_0^t$$

$$= \frac{t^n}{n!}$$

donc, on a $f(a_0+t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a_0)}{k!} . t^k$

$$= \int_0^t f^{(n)}(a_0+x) \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx - \int_0^t f^{(n)}(a_0) \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

$$= \int_0^t \left(f^{(n)}(a_0+x) - f^{(n)}(a_0) \right) \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx \quad (*)$$

On veut mq cette expression est un $o(t^n)$

On sait que $f^{(n)}$ est C^0 :

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ tq

$$|x| \leq \delta \Rightarrow \left| f^{(n)}(a_0+x) - f^{(n)}(a_0) \right| \leq \varepsilon$$

On suppose $t \geq 0$

On a $\left| f(a_0+t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a_0)}{k!} t^k \right|$

$$= \left| \int_0^t (\ldots) \right| \leq \int_0^t \underbrace{\left| f^{(n)}(a_0+x) - f^{(n)}(a_0) \right|}_{\leq \varepsilon} \frac{|t-x|^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

osq $|t| \leq \delta$

$0 \quad x \quad t \geq 0$

On a si $x \in [0,t]$

On a $|x| \leq |t| \leq \delta$

donc $\left| f^{(n)}(a_0+x) - f^{(n)}(a_0) \right| \leq \varepsilon$

$$\leq \varepsilon \int_0^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

$$= \varepsilon \frac{t^n}{n!}$$

donc : si $0 \leq t \leq \delta$, alors :

$$\left| \frac{f(a_0+t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a_0)}{k!} t^k}{t^n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n!} \leq \varepsilon$$

de même si $-\delta \leq t \leq 0$.

CCL : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall |t| \leq \delta,$

$$\left| \frac{f(a_0+t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a_0)}{k!} t^k}{t^n} \right| \leq \varepsilon$$

$$\underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

ie $f(a_0+t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a_0)}{k!} t^n \underset{t \to 0}{=} o(t^n)$

CCL : FTY

$f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, $a_0 \in I$

$$f(a_0+t) = f(a_0) + f'(a_0)t + \dots + f^{(n)}(a_0) \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$$

Rq : $e^t = 1 + t + o(t)$ FTY : $n = 1$

$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$ FTY : $n = 1$

Rq : on peut écrire : $f(x) \underset{x \to a_0}{=} f(a_0) + f'(a_0)(x-a_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!}(x-a_0)^n + o\left((x-a_0)^n\right)$

III. Développements limités

I intervalle, $x_0 \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ ex : $I =]0,1]$

DL au $v(0)$

1) Déf

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{K}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On dit que f admet un DL d'ordre n en x_0 ssi :

$$\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} :$$

$$f(x_0 + t) \underset{t \to 0}{=} a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + o(t^n)$$

On note $f \in DL_n(x_0)$

L'expression $a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ est appelée partie régulière du DL

La forme normale du DL : on factorise par le + grand t^n possible

ex : la forme normale du DL (0) $f(t) = -t^4 + 5t^5 + 9t^6 + o(t^6)$

ie le meilleur polynôme de $d° \leq 6$ pour "remplacer" f ie pr approximer f est $-X^4 + 5X^5 + 9X^6$

est : $f(t) = t^4(-1 + 5t + 9t^2) + o(t^6)$

Rq : on a $-1 + 5t + 9t^2 \underset{t \to 0}{\sim} -1$

donc $f(t) \sim -t^4$

en effet, $f(t) = t^4(-1 + 5t + 9t^2 + o(t^2))$

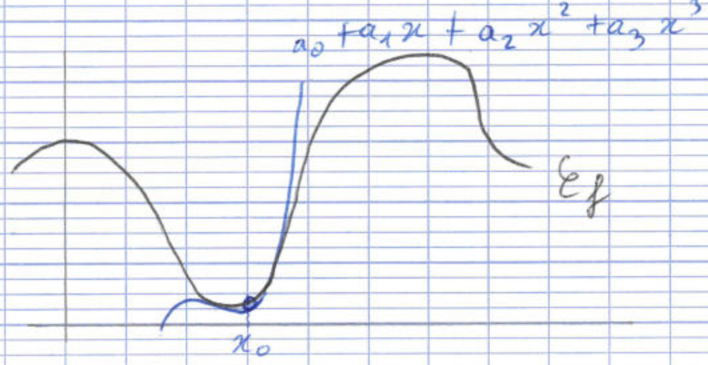
Cas pratique : on a vu la déf $f \in DL_n(x_0)$

En pratiq, on fait les DL au $v(0)$

En effet, si $f : I \to \mathbb{K}$

$x \to f(x)$

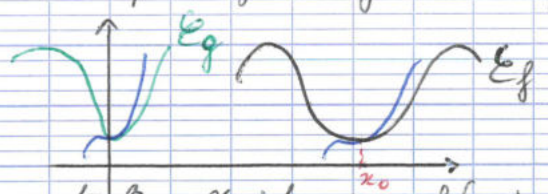
Je veux un DL au $v(x_0)$ de f



je cherche a_0, a_1, a_2, a_3 pour un DL_3

En pratique, je regarde $g : ? \longrightarrow \mathbb{K}$

$t \longmapsto f(x_0 + t)$



$t = 0 \to x_0 + t = x_0 \to f(\dots) = f(x_0)$

$DL_n(x_0)$ de $f \iff DL_n(0)$ de g

2) Unicité du DL

Prop : $f : I \to \mathbb{K}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$

Soient $(a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

tq $f(x_0 + t) \underset{t \to 0}{=} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + o(t^n)$

et $f(x_0 + t) \underset{t \to 0}{=} b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n + o(t^n)$

alors $\forall i$, $a_i = b_i$

démo : par l'absurde

Osq $(a_i)_i \neq (b_i)_i$ ie $\exists i_0 : a_{i_0} \neq b_{i_0}$

Idée : soit $i_0 \in [\![0, n]\!]$ minimal tq $a_{i_0} \neq b_{i_0}$

On a donc $\forall j < i_0 : a_j = b_j$

donc

$$f(x_0+t) \begin{array}{l} = a_0 + a_1 t + \dots + a_{i_0-1} t^{i_0-1} + a_{i_0} t^{i_0} + \dots + o(t^n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \\ = b_0 + b_1 t + \dots + b_{i_0-1} t^{i_0-1} + b_{i_0} t^{i_0} + \dots + o(t^n) \end{array} \quad t \to 0$$

On a $a_{i_0} t^{i_0} + \cdot t^{i_0+1} + \cdot t^{i_0+2} + \dots + \cdot t^n + o(t^n)$ (*)

$= b_{i_0} t^{i_0} + \cdot t^{i_0+1} + \dots + \cdot t^n + o(t^n)$

R : $i > i_0 \Rightarrow t^i \underset{t \to 0}{=} o(t^{i_0})$

ex : $t^3 \underset{t \to 0}{=} o(t^2)$

Pour les DL les t^{i_0} sont des éléments très petits

L'élément le + grand c'est $t^0 = 1$

Dans l'ordre « $1 \gg t \gg t^2 \gg t^3 \gg \dots$ » $t \to 0$

De (*), on déduit : $a_{i_0} t^{i_0} + o(t^{i_0}) = b_{i_0} t^{i_0} + o(t^{i_0})$

donc, en divisant par t^{i_0} :

$$a_{i_0} + o(1) \underset{t \to 0}{=} b_{i_0} + o(1)$$

$\downarrow t \to 0$ a_{i_0} fct de t qui tend vers 0 $\downarrow t \to 0$ b_{i_0}

donc $a_{i_0} = b_{i_0}$: absurde

3) Troncature des DL

Ex : si $f(t) = 2 - t + \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{6} + t^5 + o(t^5)$

c'est un $DL_5(0)$ de f

alors $f(t) = 2 - t + \frac{t^2}{8} + o(t^2)$

Prop : Si $f \in DL_n(x_0)$ alors $f \in DL_p(x_0)$ si $p \leq n$

et le $DL_p(x_0)$ de f est obtenu par troncature du $DL_n(x_0)$ de f

démo : si $i > j$ $\quad t^i \underset{t \to 0}{=} o(t^j)$

$$f(x_0 + t) = a_0 + \dots + a_p t^p + \underbrace{a_{p+1} t^{p+1} + \dots + a_n t^n + o(t^n)}_{\text{c'est un } o(t^p)}$$

4) Cas particuliers des DL_0 et DL_1

Prop : $f : I \to \mathbb{K}$, $a_0 \in I$

$f \in DL_0(a_0) \Leftrightarrow f$ est C^0 en a_0

$f \in DL_1(a_0) \Leftrightarrow f$ est dérivable en a_0

c'est F au delà ie

$\exists f \in DL_2(a_0) : f''(a_0)$ n'existe pas (f' non dérivable en a_0)

<u>Contrex :</u> $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$

$= 0$ sinon

Mq $f \in DL_2(0)$

on a $|\sin| \leqslant 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |x|^3$

$\underset{x\to 0}{=} o(x^2)$

donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$

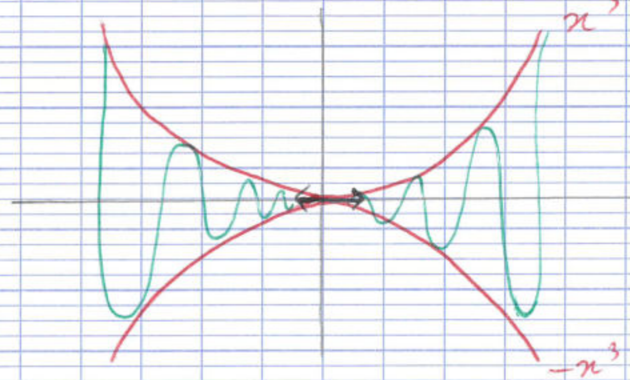
$$\left|\frac{f(x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{|x^3|}{|x|^2} = |x| \xrightarrow{x\to 0} 0$$

ainsi $f(x) = o(x^2)$

$f(x) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + o(x^2)$ donc $f \in DL_2(0)$

(?) eno : calculer $f'(x)$ si $x \neq 0$

$f'(0) =$ cadeau $= 0$



Mq $\frac{f'(x) - f'(0)}{x}$ n'admet pas de lim quand $x \to 0$

donc f' n'est pas dérivable en 0

démo : c'est D2

5) Existence des DL

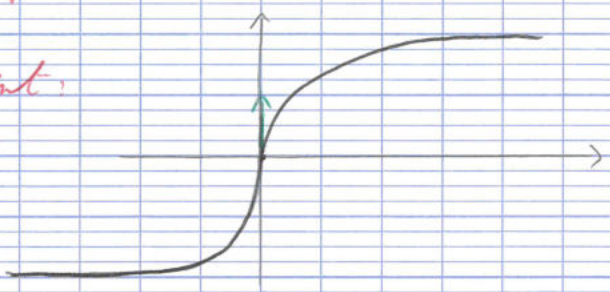
Ex de fct qui n'admet pas de DL

On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq

$n \in \mathbb{N}^*$ $f \notin DL_n(0)$

On prend $f(\cdot) := \sqrt{\cdot}$

Plus précisément :



On prend $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

f n'est pas dérivable en 0

donc $f \notin DL_1(0)$

donc $\forall n \geq 1$, $f \in DL_n(0)$

<u>Théo :</u> $x_0 \in I$

Soit $f : I \to \mathbb{K}$

Alors $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \Rightarrow f \in DL_n(x_0)$

mieux : on a : $f(x_0 + t) \underset{t \to 0}{=} f(x_0) + f'(x_0)\, t + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} t^n + o(t^n)$

Ie la partie régulière du $DL_n(x_0)$ de f est

$t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} t^k$

⚠ Rcpq fausse : ie $f \in DL_n(x_0) \not\Rightarrow f$ est $\mathcal{C}^n$ au $v(x_0)$

(cf $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$)

Corollaire

$f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f \in DL_n(x_0)$

6!!) DL et parité

Prop :

1) f paire $\Rightarrow$ le $DL_n(x_0)$ de f est pair

2) f impaire $\Rightarrow$ le DL de f est impaire

ex : $f(x) = \underbrace{\underbrace{-x}_{\text{impaire}} \cdot \underbrace{(e^{x^2} + 2)}_{\text{paire}}}_{\text{impaire}}$

f est impaire

si on fait un DL de f, on est assuré que ce "sera impair"

$f(t) \underset{t \to 0}{=} 8 - 5t + 2t^2 - 3t^3 + 10t^4 + 5t^5 + o(t^5)$

↳ il ne doit rester que les termes t^k avec k impair

démo : Soit $f \in DL_n(0)$ paire

On écrit :

$f(t) \underset{t \to 0}{=} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + o(t^n)$

Soit donc $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ tq

$\forall t \in I, f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + t^n \varepsilon(t)$ (*)

avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

On remplace t par $-t$ dans (*)

$\forall t \in I \quad \underbrace{f(-t)}_{f(t)} = a_0 - a_1 \cdot t + a_2 t^2 - a_3 t^3 + a_4 t^4$
$+ \dots + (-1)^n a_n t^n + \underbrace{(-1)^n \varepsilon(t) \cdot t^n}_{\to o(t^n)}$

$\tilde{\varepsilon}(t) := (-1)^n \cdot \varepsilon(t)$

$\tilde{\varepsilon}(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

On a $\forall t \in I \ , f(t) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 \dots$

$= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \dots$

donc $a_1 = -a_1 \ , a_3 = -a_3$

donc $\forall k \in [\![0, n]\!] \ , k$ impair $\Rightarrow a_k = 0$

7) DL et $\mathrm{Re}(\cdot)$ et $\mathrm{Im}(\cdot)$

Prop : Si $f(t) \underset{t \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n)$

alors : . $\mathrm{Re}(f(t)) \underset{t \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(a_k) t^k + o(t^n)$

. $\mathrm{Im}(f(t)) \underset{t \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(a_k) t^k + o(t^n)$

IV, Opérations sur les DL

1) Somme

$f, g \in DL_n(x_0) \Rightarrow f + \lambda g \in DL_n(x_0)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

On fait la combi. linéaire terme à terme

2) Produit

Prop : $f, g \in DL_n(x_0) \Rightarrow fg \in DL_n(x_0)$

En pratique : on dispose de 2 polynômes de $d^\circ \leq n$. On fait leur produit en ne gardant que les termes de $d^\circ \leq n$

Exemple : $x_0 = 0$

$n = 3$

$$f(t) \underset{t \to 0}{=} 2 - t + \frac{t^2}{2} - t^3 + o(t^3)$$

$$g(t) \underset{t \to 0}{=} t - t^2 + 3t^3 + o(t^3)$$

modèle de rédac :

on a quand $t \to 0$:

$$\begin{aligned} f(t) \cdot g(t) = 2t & - 2t^2 + 6t^3 \\ & - t^2 + t^3 \qquad\qquad \cancel{-3t^4} \\ & \qquad + \frac{t^3}{2} \qquad - \frac{t^4}{4} + \frac{3t^5}{8} \\ & \qquad\qquad\qquad - t^4 + t^5 - 3t^6 \\ & \qquad + o(t^3) \end{aligned}$$

$$= 2t - 3t^2 + 7{,}5\,t^3 + o(t^3)$$

Exemple :

on a $g(t) \underset{t \to 0}{=} 5t - 2t^2 + 3t^3 + o(t^3)$

$$f(t) = 2 + t^2 - 2t^3 + o(t^3)$$

- Calculer un $DL_3(0)$ de f^5

On commence par calculer un $DL_3(0)$ de f^2 en utilisant l'identité remarquable :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \cdot \text{dble produits}$$

puis on fera un DL de $(f^2)^2$
puis $f^4 \times f$

$$f(t) \underset{t \to 0}{=} 2 + t^2 - 2t^3 + o(t^3)$$

donc $f^2(t) \underset{t \to 0}{=} 4 + 4t^2 - 8t^3 + o(t^3)$

et $f^4(t) \underset{t \to 0}{=} 16 + 32t^2 - 64t^3 + o(t^3)$

donc
$$\begin{aligned} f^5(t) &= f^4(t) \cdot f(t) \\ &= 32 + 16t^2 - 32t^3 \\ &\quad + 64t^2 \quad \cancel{+ 32t^2 \times t^2} \\ &\quad - 128t^3 + o(t^3) \end{aligned}$$

CCL : $f^5(t) = 32 + 80t^2 - 160t^3 + o(t^3)$

Rq : exponentiation rapide (on passe au $(\,)^2$ en décomposant f^n.

Peut-on gagner des ordres en faisant un produit ? ↓ NON

$f(t) = 1 + t + o(t) \quad - t^2 + o(t^2)$

$g(t) = -1 + 2t + o(t) + t^2 + o(t^2)$

$f(t)\,g(t) = -1 + t + 2t^2 + o(t^2)$

$$\begin{aligned} f(t)\,g(t) &= -1 + t + (2t^2 + t^2 + t^2) + o(t^2) \\ &= -1 + t + 4t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

$\bullet\ g(t) = 5t - 2t^2 + 3t^3 + o(t^3)$

$DL_3(0)$ de g^5

On peut faire + rapide que ça

💡 idée : Avec la forme normalisée du DL, on gagne des ordres gratuits lors des produits et quotients

$g(t) = t(5 - 2t + 3t^2 + o(t^3))$

$= t(5 - 2t + 3t^2 + o(t^2))$

donc $g(t)^5 = t^5 (5 - 2t + 3t^2 + o(t^2))^5$

on obtiendrait un $\underline{DL_7}$ de g^5 (avec une expo rapide, on pourrait avoir un DL_2

En particulier, $g(t)^5 = t^5 (5 + o(1))^5$

$= t^5 (3125 + o(1))$

$= 3125 t^5 + o(t^5) = o(t^3)$

$g(t)^2 = t^2 (5 - 2t + 3t^2 + o(t^2))^2$

💡 Ici, je veux un DL_3

donc il me suffit d'avoir un DL_1 de la parenthèse

$\ldots = t^2 (5 - 2t + o(t))^2$

$= t^2 (25 - 20t + o(t))$

$g(t) \underset{t \to 0}{=} 25t^2 - 20t^3 + o(t^3)$

3) Quotient

Prop :

$$\left.\begin{array}{l} f, g \in DL_n(x_0) \\ g(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{f}{g} \in DL_n(x_0)$$

4) !! Composition des DL

Prop :

$$\left.\begin{array}{l} f \in DL_n(x_0) \\ g \in DL_n(f(x_0)) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \in DL_n(x_0)$$

Exemple :

$$f(t) \underset{t \to 0}{=} 3 + \underline{5t - 2t^2 + 3t^3 + o(t^3)}$$

$$g(3+u) \underset{u \to 0}{=} 4 - u - u^2 + 3u^3 + o(u^3)$$

Tout simplement, on remplace u par l'expression verte

On a $g(f(t)) = g\left(3 + \underbrace{5t - 2t^2 + 3t^3 + o(t^3)}_{\text{c'est } u}\right)$

$$= 4 - u - u^2 + 3u^3 + o(u^3)$$

On a $u = t(5 - 2t + 3t^2 + o(t^2))$

on veut un DL_3 de u^2

on a $u^2 = t^2(5 - 2t + o(t))^2$

$$= t^2(25 - 20t + o(t))$$

$$= 25t^2 - 20t^3 + o(t^3)$$

On a $u \underset{t \to 0}{\sim} 5t$ donc $u^3 \sim 125t^3$

ie $u^3 = 125 t^3 + o(t^3)$

donc $g(f(t)) = \quad \ldots \quad - u$

$4 - 5t + 2t^2 - 3t^3$
$\qquad\qquad - 25t^2 + 20t^3$
$\qquad\qquad\qquad + 375 t^3 + o(t^3)$

Bilan : $g(f(t)) = 4 - 5t - 23t^2 + 392 t^3 + o(t^3)$

5) Primitivation des DL

__Lemme :__ $N \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ tq
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(t) \underset{t \to 0}{=} o(t^N) \end{cases}$$

alors : $f(t) \underset{t \to 0}{=} o(t^{N+1})$

__démo :__ Osq $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $f(0) = 0$
et $f'(t) \underset{t \to 0}{=} o(t^N)$

Mq $f(t) \underset{t \to 0}{=} o(t^{N+1})$

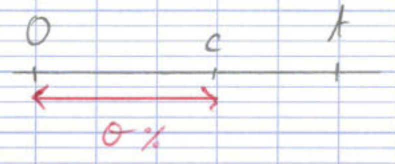
TAF : $f'(c) = \dfrac{f(t) - f(0)}{t}$ avec $c \in [0, t]$ si $t \geq 0$

. Soit $\varepsilon > 0$
on veut mq $\dfrac{f(t)}{t^{N+1}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$
ie : $\left(f(t) = o(t^{N+1}) \right)$

On a $\dfrac{f(t)}{t^{N+1}} = \dfrac{f'(c)}{t^N}$

$c \in [0, t]$

On écrit $c = \theta \cdot t$ où $\theta \in [0, 1]$



$$\frac{f(t)}{t^{N+1}} = \frac{f(\theta \cdot t)}{t^N} = \frac{f'(\theta \cdot t)}{(\theta \cdot t)^N} \cdot \underbrace{\theta^N}_{\leq 1}$$

car $\theta \leq 1$

donc, $\left|\dfrac{f(t)}{t^{N+1}}\right| \leq \left|\dfrac{f'(\theta \cdot t)}{(\theta \cdot t)^N}\right|$

Soit $\delta > 0$ tq $\forall x \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$, $\left|\dfrac{f'(x)}{x^N}\right| \leq \varepsilon$

car $\dfrac{f'(x)}{x^N} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Soit $t \in]0, \delta[$, alors $\forall \theta \in [0, 1]$, $\theta \in]0, \delta[$

Fixons $t \in]0, \delta[$

Soit d'après le TAF, $\theta \in [0, 1]$ tq

$\dfrac{f(t)}{t} = f'(\theta t)$

On a : $\left|\dfrac{f(t)}{t^{N+1}}\right| \leq \left|\dfrac{f'(\theta \cdot t)}{(\theta \cdot t)^N}\right| \leq \varepsilon$

donc $\dfrac{f(t)}{t^{N+1}} \longrightarrow 0$ (le cas $t < 0$ se traite de m̂)

. Cas $f : I \to \mathbb{C}$

on appliq ce qui précède à $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et on conclut.

Prop :

. On peut primitiver les DL
. ⚠ ne pas oublier la constante

Soit $f \in DL_n(x_0)$
On écrit $f(x_0+t) \underset{t \to 0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i t^i + o(t^n)$

Soit F une primitive de f
alors 1) $F \in DL_{n+1}(x_0)$

2) $F(x_0+t) \underset{t \to 0}{=} F(x_0) + \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{t^{i+1}}{i+1} + o(t^{n+1})$

démo :
2) ie $\underbrace{F(x_0+t) - \left[F(x_0) + \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{t^{i+1}}{i+1}\right]}_{\varphi(t)} \underset{t \to 0}{=} o(t^{n+1})$

φ est dérivable car $F(\cdot)$ l'est
. $\varphi(0) = 0$
. $\varphi'(t) = F'(x_0+t) - \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$

$= f(x_0+t) - \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$

$\underset{t \to 0}{=} o(t^n)$

PCSI 3 Lycée Sainte-Geneviève
2019/2020 14 mars 2020

Développements limités usuels

Tous les développements limités suivants sont donnés pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $h \longrightarrow 0$.

Fonction inverse

$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3 + \cdots + h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \cdots + (-1)^n h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

Fonctions puissances

$$(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} h^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} h^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

où on peut aussi utiliser $\displaystyle\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.
où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 - \frac{5}{128}h^4 + \mathrm{o}(h^4)$$

Logarithme

$$\ln(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} - \cdots - \frac{h^n}{n} + \mathrm{o}(h^n)$$

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{h^n}{n} + \mathrm{o}(h^n)$$

Exponentielle et consorts

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + \mathrm{o}(h^n)$$

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(h^{2n+1}\right)$$

$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(h^{2n+2}\right)$$

$$\cosh(h) = 1 + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + \cdots + \frac{h^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(h^{2n+1}\right)$$

$$\sinh(h) = h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \cdots + \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(h^{2n+2}\right)$$

Autres

$$\arctan(h) = h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\left(h^{2n+2}\right)$$

$$\tan(h) = h + \frac{1}{3}h^3 + \frac{2}{15}h^5 + \frac{17}{315}h^7 + \mathrm{o}(h^8)$$

V. DL usuels

1) Fonction inverse

Rappel : SG : $\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ si $\alpha \neq 1$

① Prop. $\boxed{\frac{1}{1-t} \underset{t\to 0}{=} 1 + t + t^2 + \dots + t^n + o(t^n)}$

démo : on calcule, pour $t \in \mathbb{R}$ petit :

$$\frac{1}{1-t} - \left(1 + t + t^2 + \dots + t^n\right)$$

$$= \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

d'où : $\dfrac{\frac{1}{1-t} - (1+t+\dots+t^n)}{t^n} = \frac{t}{1-t} \sim t$

je veux mq cette exp. tend vers 0 qd $t \to 0$

On a bien : $\frac{t}{1-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. d'où le résultat (égal à $o(t^n)$)

② $\boxed{\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n \cdot t^n + o(t^n)}$

démo : on remplace t par $-t$ dans ①

Rq !! : qd $t > 0$, $1 + t > 1$

donc $\frac{1}{1+t} < 1$. donc c'est normal que $\frac{1}{1+t} = 1 - t$

2) Logarithme

On intègre ①

$$\int\left(\quad \frac{1}{1-t} = 1 + t + \dots + t^n + o(t^n)\right.$$

$$-\ln(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^{n+1}}{n+1} + o(t^{n+1})$$

pr $t=0$: $-\ln(1-0)=0$

③ $$\boxed{\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \dots - \frac{t^n}{n} + o(t^n)}$$

④ $$\boxed{\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} + o(t^n)}$$

3) Arctan

Rappel : $\forall t$, $\arctan'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

dans ②, je remplace t par t^2
on obtient :

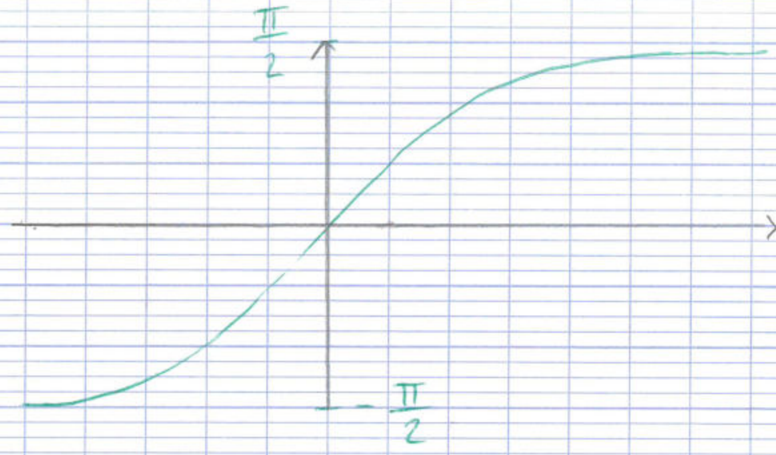
$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + (t^2)^2 - (t^2)^3 + \dots + (-1)^n \cdot (t^2)^n$$

ie $$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n \cdot t^{2n} + o(t^{2n})$$

on intègre :

⑤ $$\boxed{\operatorname{Arctan}(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + o(t^{2n+1})}$$

Rq : Arctan $(\cdot)$ est impaire



C'est donc normal que les termes d'ordre pair du DL soient nuls

4) Exponentielle

⑥ $$\boxed{\exp(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)}$$

démo : On fait Taylor - Young

car $\forall k$, $\exp^{(k)} = \exp$

donc $\dfrac{\exp^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{1}{k!}$

5) Sinus et cosinus

(7) $$\boxed{\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1})}$$

(8) $$\boxed{\cos(t) \underset{t \to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n})}$$

démo : on remplace dans (6) t par it

On a "$o(t)^n = o(t^n)$"

Rq : $g(2+u) = 2 + 3u - u^2 + o(u^3)$

on remplace $u := 3t^2 - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$

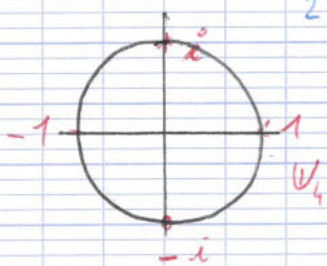
on a $u \sim 3t^2$

donc $u^3 \sim 3^3 t^6$

donc $o(u^3) = o(t^6)$

On obtient $e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2} + \dots + \frac{(it)^n}{n!} + o(t^n)$ (*)

or $i \in \mathbb{U}_4$:



donc $\forall k$, $i^k = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 4p \\ i \text{ si } k = 4p+1 \\ -1 \text{ si } k = 4p+2 \\ -i \text{ si } k = 4p+3 \end{cases}$

on passe (*) à $\mathrm{Re}(\cdot)$

c'est : $1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$

de m̂ en passant à Im.

6) $\cosh(\cdot)$ et $\sinh(\cdot)$

9 $$\boxed{\cosh(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n})}$$

Ex : $DL_5(0)$ de $\cosh(\cdot)$

On a $\cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + o(t^6)$

donc $\cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^5)$

Rq : $\cosh(\cdot)$ est paire

- $f \in \mathcal{C}^\infty$ ($\Rightarrow f \in DL_n \ \forall n$) et f paire alors si j'ai trouvé un DL_2 de f alors j'ai un DL_3 gratuitement

10 $$\boxed{\sinh(t) = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1})}$$

démo : on fait la somme d'un DL de e^t et d'un DL de e^{-t}

On trouve un DL de $2\cosh(t)$

7) Fonction puissance

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on regarde $f_\alpha(t) = (1+t)^\alpha$ $(t > -1)$

On veut un DL de f_α

Si $k \in \mathbb{N}$: $f_\alpha^{(k)}(t)$

Soit $t > -1$. on suppose $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors f_α est polynomiale

cas le + important : $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+t}$

$$f_\alpha'(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1}$$
$$f_\alpha''(t) = \alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}$$
$$f_\alpha'''(t) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+t)^{\alpha-3}$$

On a $\forall t > -1$, $f_\alpha^{(k)}(t) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-?)}_{k \text{ facteurs}} \cdot (1+t)^{\alpha-k}$

$? \to \alpha-(k-1))$

donc $$\frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

déf : coeff. binomiaux généralisés

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$$

(?) formule de Pascal ?

Exemple : $\alpha = 1/2$

. $\forall \alpha, \binom{\alpha}{0} = 1$

. $\forall \alpha, \binom{\alpha}{1} = \alpha$

. $\forall \alpha, \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$

. $\binom{1/2}{0} = 1 \quad , \binom{1/2}{1} = 1 \quad , \binom{1/2}{2} = \frac{1/2 \times (1/2 - 1)}{2!} = -\frac{1}{8}$

$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2 - 2}{3} \binom{1/2}{2} = \frac{-3/2}{3} \cdot \frac{-1}{8} = \frac{1}{16}$

. $\binom{1/2}{4} = \frac{-5/2}{4} \cdot \binom{1/2}{3} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} = -\frac{5}{128}$

(11) $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} t^3$$
$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + o(t^n)$$

ie, $\boxed{(1+t)^\alpha \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} t^k + o(t^n)}$

Rq : on l'utilise p $\alpha = \frac{1}{2}$

Pour $\alpha = -1$, $(1+t)^\alpha = \frac{1}{1+t}$

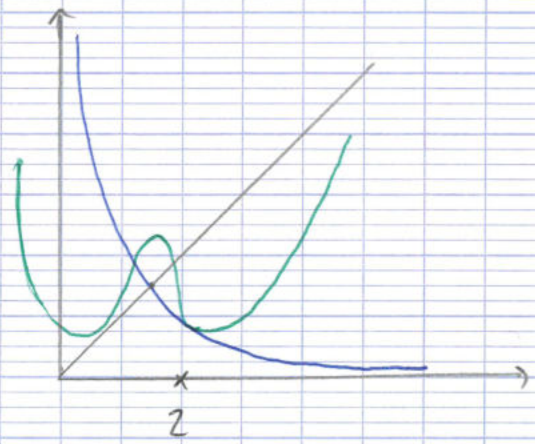
$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{k!} = \frac{(-1)^k k!}{k!} = (-1)^k$$

Application :

$$\sqrt{1+t} \underset{t \to 0}{=} 1 + \frac{t}{2} + o(t)$$ $DL_1(0)$ de $\sqrt{1+t}$

$$\sqrt{1+t} \underset{t \to 0}{=} 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5}{128} t^4 + o(t^4)$$

8) Quotients de DL : cas pratique



$DL_4(2)$ de $\frac{1}{x}$

$\frac{1}{1/x} = x$

A retenir : $\frac{1}{x}$ au $v(2)$

$$\frac{1}{2+t} = 5 - t + 3t^2 + 4t^3 - 5t^4 + o(t^4)$$

Astuce : Soit t petit, on a :

$$\frac{1}{t+2} = \frac{1}{2(1+\frac{t}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{2}}$$

DL connu

$= \frac{1}{1+\theta} = 1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + \theta^4 + o(\theta^4)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^3 + \left(\frac{t}{2}\right)^4 + o(t^4)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{16} + \frac{t^4}{32} + o(t^4)$$

Méthode pour le DL de $\frac{f}{g}$ en x_0 si $f, g \in DL_n(x_0)$ et $g(x_0) \neq 0$.

$f(x_0 + t) = \dots$

$g(x_0 + t) = \underset{\neq 0}{g(x_0)} + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + o(t^n)$

$$\frac{1}{g(x_0+t)} = \frac{1}{g(x_0)} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{a_1}{g(x_0)} t + \frac{a_2}{g(x_0)} t^2 + \dots + \frac{a_n}{g(x_0)} t^n + o(t^n)}_{0}}$$

on compose DL $\frac{1}{1+0}$ et le DL $1 + \frac{a_1}{g(x_0)} + \dots$

ie $$\frac{1}{g(x_0+t)} = \frac{1}{g(x_0)} \left[1 - \left(\frac{a_1}{g(x_0)} t + \dots \frac{a_n}{g(x_0)} t^n \right) + \left(\frac{a_1}{g(x_0)} t + \dots + \frac{a_n}{g(x_0)} t^n \right)^2 + \dots + (-1)^n \left(\frac{a_1}{g(x_0)} t + \dots + \frac{a_n}{g(x_0)} t^n \right)^n + o(t^n) \right]$$

8) Tangente

- On fait un DL_4
- $\tan(\cdot)$ impaire
- $\tan(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty$

donc le terme de degré 4 du DL_4 de $\tan(\cdot)$ est nul

donc on fait un DL_3

Le DL de $\sin(\cdot)$ commence à t donc grâce à la forme normalisée, je gagne gratuit^t un ordre

on a $\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \dots$

$= t\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \dots\right)$

donc $\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{t(1 + \dots +)}{\cos(t)}$

il me suffit d'avoir un DL_2 de cette partie. le

ie DL_3 de sin et d'un DL_2 de cos

. $DL_2(0)$ de $\frac{1}{\cos}$

on a $\frac{1}{\cos(t)} = \frac{1}{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)} = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$\frac{1}{1-\sigma} = 1 + \sigma + \sigma^2 + \dots$

et $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = t\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)$

donc $\tan(t) = t.\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)\left(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)$

$= t\left(1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)t^2 + o(t^2)\right)$

CCL : $\tan(t) = t\left(1 + \frac{1}{3}t^2 + o(t^2)\right)$

$\tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$

or $\tan \in DL_4$ et tan impaire

donc $\tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)$

(?) tan à l'ordre 6

DL de $\frac{1}{1+\sin x}$ en 0 à l'ordre 3

On a $1 + \sin x = 1 + \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{\theta} + o(x^3)$

On a $\frac{1}{1+\theta} = 1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + o(\theta^3)$

et $\theta^2 = x^2 + o(x^2)$

$\theta^3 = x^3 + o(x^3)$

donc $\frac{1}{1+\sin(x)} = 1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3 + o(x^3)$

$= 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$