Chapitre 25

Matrices 2

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{t^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{t^4} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} & a_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{t^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{t^4} \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \mathbf{t}\cdot a_{1,2} & \mathbf{t^2}\cdot a_{1,3} & \mathbf{t^3}\cdot a_{1,4} & \mathbf{t^4}\cdot a_{1,5} \\ 0 & a_{2,2} & \mathbf{t}\cdot a_{2,3} & \mathbf{t^2}\cdot a_{2,4} & \mathbf{t^3}\cdot a_{2,5} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \mathbf{t}\cdot a_{3,4} & \mathbf{t^2}\cdot a_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} & \mathbf{t}\cdot a_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} \end{pmatrix}$$

Dans ce chapitre, on poursuit l'étude des matrices à l'aide des outils de l'algèbre linéaire : théorie des espaces vectoriels, applications linéaires et théorie de la dimension.

En fait, il est possible de transposer tout problème d'algèbre linéaire de dimension finie en problème sur les matrices. Nous expliquerons ici ces techniques et montrerons plusieurs applications.

Chapitre 25 : Matrices 2

I, Applications linéaires associées à une matrice

$A \in M_{np}(\mathbb{K})$

On note $u_A : M_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$
$\qquad X \longmapsto AX$

On a $u_A \in L(M_{p,1}(\mathbb{K}), M_{n,1}(\mathbb{K}))$

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

donc : $u_A : M_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2,1}(\mathbb{R})$
$\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$

ici, on a $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}$

Bilan : ici : $u_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

identifié à $M_{3,1}(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}$

Prop : on considère $u : M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$
$\qquad A \longmapsto u_A$

1) u est linéaire
2) u est un isomorphisme

II, Matrice d'une application linéaire

1) Matrice d'un vecteur dans une base

E evf . $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E (= pivot)

$x \in E$

QR^x : on décompose x dans $\mathcal{B}$

on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $\forall i, x_i \in \mathbb{R}$

La matrice de $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ sera

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Exemple :

a) on se place dans $\mathbb{R}^3$

on pose $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on pose $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

exo : . Mq $\mathcal{B}$ base

. déterminer $Mat_{\mathcal{B}}(x)$

si $\mathcal{B}$ est une base on cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ie tq $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 3 \end{cases}$

ie on veut résoudre un système

la matrice A associée à ce système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rappel : n vecteurs colonne $C_1, \dots, C_n$ de $\mathbb{K}^n$ forment une base ssi

$$\left(C_1 \middle| C_2 \middle| \dots \middle| C_n \right) \text{ est inversible}$$

ssi l'échelonnée réduite de $(C_1 | \dots | C_n)$ a n pivots

ssi on peut échelonner $(C_1 | C_2 | \dots | C_n)$ en une matrice à n pivots

(ie ssi $\exists A'$ échelonnée $A \sim_L A'$, A' a n pivots)

on pose $$\tilde{A} := \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & x \end{array} \end{array}$$

on échelonne réduit $\tilde{A}$, on a :

$$\tilde{A} \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

Ainsi, comme cette matrice a 3 pivots, $\mathcal{B}$ est une base

D'autre part, l'unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$tq \quad \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est $(2, -1, 2)$

CCL : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Rq : . $\underset{\text{base de } E}{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}}(\underset{\in E}{x}) = \mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}(x)$

. donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) : E \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$
$\qquad x \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

est linéaire

b) on se place dans $\mathbb{R}^n$

On note $\mathbb{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$

On a :

$$\mathbb{B}_n = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Soit $X \in \mathbb{R}^n$

Alors on a : $\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(X) = X$

démo : on écrit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où les $x_i \in \mathbb{R}$

on a $X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \, E_i$

c) E evf
$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E
$i \in [\![1, n]\!]$

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i) = \mathbf{e_i}$

démo : on a $e_i = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0\, e_{i-1} + 1 \cdot e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \dots + 0 \cdot e_n$

2) Matrice d'une application linéaire

E, F evf
$\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{E}$ une base de F
$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{E} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

$f \in L(E, F)$

Déf : La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$, notée ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(e_i))$ pour $i \in [\![1, p]\!]$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \mathcal{B}: f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \quad \mathcal{E}: \\
{}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = & \begin{pmatrix} * & & & \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ * & & & \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \\ f_n \end{array}
\end{array}
$$

$$
\underset{\mathcal{B}}{\underset{(e_1, \dots, e_p)}{E}} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{E}}{\underset{(f_1, \dots, f_n)}{F}}
$$

Rq : ie ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est l'unique matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ tq :

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ C_j(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(e_j))$$

Exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x - y + z \\ x - 2y \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculer 1. ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f)$

2. $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ base de $\mathbb{R}^2$

$A_3 := {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f)$

3. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ base de $\mathbb{R}^3$

$A_2 := {}_{\mathcal{B}_2}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

4. $A_4 = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

1°) $$A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /\varepsilon_1 \\ /\varepsilon_2 \end{array}$$

$f(\varepsilon_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad f(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2°) $A_3 = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$f(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\rightsquigarrow \quad 1 \quad\quad 0$

$f(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$-2 \quad\quad -1$

$f(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$0 \quad\quad -1$

3°) $A_2 = {}_{\mathbb{B}_2}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4°) $A_4 = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Prop</u> : E evf, $\mathcal{B}$ base de E. $p := \dim E$ ie $|\mathcal{B}|$
F evf, $\mathcal{E}$ base de F $\quad n := \dim F$ ie $|\mathcal{E}|$

on note ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) : L(E,F) \longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K})$

$f \longmapsto {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Alors :

1) ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ est linéaire

2) ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ est un isomorphisme

démo :

1) ok

2) Mq ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ est injective

Soit $f : E \to F$ linéaire tq ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 0_{n,p}$

Mq f est nulle

On a si $j \in [\![1,p]\!]$, $\underbrace{C_j\left({}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)}_{\text{par déf, c'est } \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(e_j))} = 0_{n,1}$

On a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(e_j)) = 0_{n,1}$

Or E evf

$\mathbb{R}^{\times}$ $\forall x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0_{n,1} \iff x = 0_E$

donc $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $f(e_j) = 0_F$

donc, $f = 0_{L(E,F)}$

On a mq $\mathrm{Ker}\left({}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)\right) = \left\{0_{L(E,F)}\right\}$

ie ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ est injective

. Or $\dim L(E,F) = n \cdot p$

et $\dim M_{n,p}(\mathbb{K}) = n \cdot p$

donc ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ est une appli injective entre des espaces de $\hat{m}$ dimension

donc, c'est un isomorphisme

⚠ Application importante de la surjectivité

on peut interpréter une matrice comme une appli. linéaire et rcqq^{t}

"On dispose de $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit E un evf dimension p et $\mathcal{B}$ base E
Soit F un evf dimension n et $\mathcal{E}$ base F

Soit $u \in L(E,F)$ dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$ est A
Puis, on travaille avec u"

3) Matrice d'un endomorphisme

Déf : E evf
$\mathcal{B}$ base de E
$f \in L(E)$
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, noté $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est $Mat_{\mathcal{B}}(f) := {}_{\mathcal{B}}Mat_{\mathcal{B}}(f)$

Dessin : si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} * & & & \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ * & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ \vdots \\ /e_n \end{array} \end{array}$$

Exemples :

. $Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$

où E evf
$\mathcal{B}$ base de E

en effet $\forall i$, $Mat_{\mathcal{B}}(e_i) = \mathcal{E}_i$

$$\text{donc} \quad \begin{array}{cccc} Id_E(e_1) & Id_E(e_2) & & Id_E(e_n) \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{array}$$

$$Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} = I_n$$

. $n \in \mathbb{N}^*$
$A \in M_n(\mathbb{K})$
$\mathbb{B}_n$ base canonique de $\mathbb{K}^n$

Calculer $Mat_{\mathbb{B}_n}(u_A)$

$$\text{c'est} \quad \begin{array}{cccc} u_A(\mathcal{E}_1) & u_A(\mathcal{E}_2) & \cdots & u_A(\mathcal{E}_n) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} /\mathcal{E}_1 \\ \vdots \\ /\mathcal{E}_n \end{array}$$

$$u_A(\mathcal{E}_i) = A \cdot \mathcal{E}_i = C_i(A)$$

Or $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $Mat_{\mathbb{B}_n}(X) = X$ $(*)$
donc $Mat_{\mathbb{B}_n}(u_A(\mathcal{E}_i)) = Mat_{\mathbb{B}_n}(A \cdot \mathcal{E}_i) = Mat_{\mathbb{B}_n}(C_i(A)) = C_i(A)$

or, $C_i(\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(u_A)) = \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(u_A(\varepsilon_i))$

CCL : $\forall i$, $C_i(A) = C_i\left(\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(u_A)\right)$

CCL : $\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(u_A) = A$

Plus généralement : $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$
$u_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$

On a $_{\mathbb{B}_n}\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_p}(u_A) = A$

(?) Peut-on interpréter $\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(u_A) = A$ ĉ un résultat du type $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$?

On a la "rcq" de l'ALCA.

On a $E \xrightarrow{f} F$

et $E \simeq \mathbb{K}^p$ d'où $\mathcal{B}$ base de E

$F \simeq \mathbb{K}^n$ d'où $\mathcal{E}$ base de F

Alors on peut associer à f une matrice : $_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

1°) $u : M_{n,p}(\mathbb{K}) \to L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$
$A \mapsto u_A$

2°) $_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : L(E,F) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$
$f \mapsto {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Direction : on va étudier la fonctionalité de cette fonction

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} & \mathcal{E} & \mathcal{D} \\ n \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & m & p \end{tikzcd}$$

On a ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) \in M_{p,m}(\mathbb{K})$, ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$

On peut faire : ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) \times {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$

Cela veut dire que le produit matriciel correspond à la composée d'app. linéaires

$$M_{n,p}(\mathbb{K}) \xrightarrow{u} L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \xrightarrow{{}_{\mathbb{B}_p}\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(\cdot)} M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$A \longmapsto u_A \qquad f \longmapsto {}_{\mathbb{B}_n}\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_p}(f)$$

donc ${}_{\mathbb{B}_n}\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_p} \circ u = \mathrm{Id}_{M_{n,p}(\mathbb{K})}$

on savait que c'était possible car on a montré que ${}_{\mathbb{B}_n}\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_p}(\cdot)$ iso

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

donc $u_A : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est l'unique $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ tq ${}_{\mathbb{B}_n}\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_p}(f) = A$

Fait : ${}_{\mathbb{B}_n}\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_p}(\cdot)^{-1} = u$

4) $\mathrm{Mat}(f) \cdot \mathrm{Mat}(x) = \mathrm{Mat}(f(x))$

On étudie la compatibilité de $\mathrm{Mat}(\cdot)$ avec les opérations

Prop : $\underset{\mathcal{B}}{x \in E} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{E}}{F}$

alors, on a :

$$ {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(x)) $$

Rq : on pourrait vérifier que le produit matriciel est bien compatible

${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ où $p := \dim E = |\mathcal{B}|$
$n := \dim F = |\mathcal{E}|$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in M_{p,1}(\mathbb{K})$
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(x)) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

démo :

cette relation $\mathrm{Mat}(f) \cdot \mathrm{Mat}(x) = \mathrm{Mat}(f(x))$ est linéaire en x (aussi linéaire en f)
Il suffit de vérifier l'égalité sur une base
on veut faire apparaître des AL en x : $E \to \dots$

On considère $E \longrightarrow M_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$

$x \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

$X \longmapsto {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot X$

c'est une cste

On compose deux AL donc c'est linéaire

On pose $\varphi = u_A \circ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

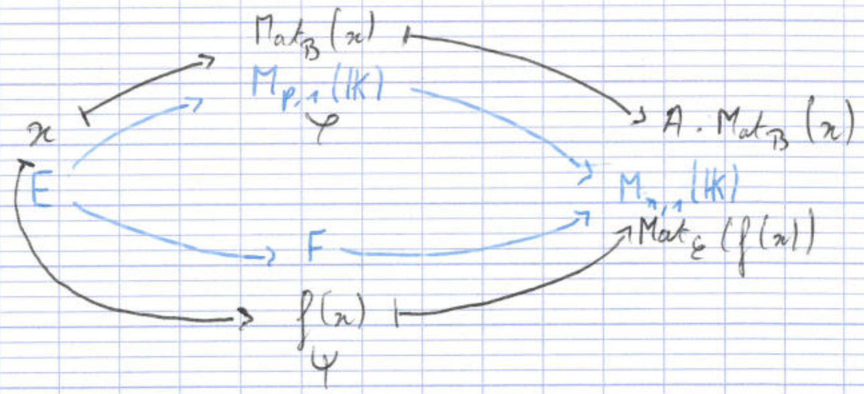
où $A := {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

On a $\varphi : E \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ linéaire

On considère
$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & f(x) & & \\ & & y & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(y) \end{array}$$

Il s'agit de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\cdot) \circ f$, on la note ψ, ψ est linéaire.

Bilan :



On a $\varphi, \psi : E \to M_{n,1}(\mathbb{K})$
On va mq $\varphi = \psi$

Rx : on mq φ et ψ coïncident sur $\mathcal{B}$

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$
Soit $j \in [\![1,p]\!]$
Mq $\varphi(e_j) = \psi(e_j)$

Calculons $\varphi(e_j)$

c'est $\varphi(e_j) = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_j) = C_j\left({}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$

$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(e_j))$

$= \psi(e_j)$

Bilan : $\forall j,\ \varphi(e_j) = \psi(e_j)$

5) $\mathrm{Mat}(g) \times \mathrm{Mat}(f) = \mathrm{Mat}(g \circ f)$

Prop : $\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ \mathcal{B} & & \mathcal{E} & & \mathcal{D} \end{array}$ evf

alors : ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) \times {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$ (*)

démo :

1) Vérifier que les tailles sont bien compatibles

2) $\mathbb{Q}$!! on utilise la m̂ idée

la relation * est linéaire !!

on utilise la linéarité en $f \in L(E,F)$

on va construire 2 AL : $L(E,F) \longrightarrow M\ (\mathbb{K})$

$n := \dim E$; $p := \dim F$; $q := \dim G$

on a $g \circ f$: $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ n & & q \end{array}$

${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) \in M_{q,n}(\mathbb{K})$

1°) $\varphi : \begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & M_{q,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) \times {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$

φ est bien linéaire, c'est la composée de ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ avec la multiplication à gauche

par $A := {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g)$

$\psi : \begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & M_{q,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) \end{array}$

Elle est linéaire : c'est la composée de

. $\begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & L(E,G) \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{array}$

et $\begin{array}{ccc} L(E,G) & \longrightarrow & M_{q,n}(\mathbb{K}) \\ h & \longmapsto & {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) \end{array}$

Bilan : on dispose de

$$\begin{tikzcd} L(E,F) \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[r, bend right, "\psi"'] & M_{q,n}(\mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

On veut mq $\varphi(f) = \psi(f)$
On va mq $\varphi = \psi$
Q R^x : on mq φ et ψ coïncident sur une base de $L(E,F)$

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p)$
et pour $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,p]\!]$

je note $u_{i,j} : E \to F$
l'AL déf par : $u_{i,j}(e_i) = f_j$
et $\forall i' \neq i$, $u_{i,j}(e_{i'}) = 0_F$

Rq : on est en train de construire une équivalence entre $L(E,F) \leftrightarrow M_{p,n}(\mathbb{K})$

base canonique

$$u_{i,j} \leftrightarrow E_{i,j}$$

Mq φ et ψ coïncident sur $(u_{i,j})_{i,j}$

Soient $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$

On calcule :

$$\varphi(u_{i,j}) = {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) \cdot {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{i,j})$$

On a ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = E_{j,i}$

donc $\underset{\mathcal{D}\ \mathcal{E}}{\mathrm{Mat}}(g) \cdot E_{j,i}$

la j ième colonne de ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g)$

ie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(g(f_j))$

on obtient $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \end{pmatrix} \\ \text{colonne } i \end{array}$ ligne j

car toutes les colonnes de $E_{j,i}$ sont nulles sauf la i-ième en ligne j

et $\psi(u_{i,j}) = \underset{\mathcal{D}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g \circ u_{i,j})$

$$= \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(g \circ u_{i,j}(e_1)) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(g \circ u_{i,j}(e_n)) \right)$$

si $i' \neq i$, on a $u_{i,j}(e_{i'}) = 0_F$

donc $g \circ u_{i,j}(e_{i'}) = 0_G$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(g \circ u_{i,j}(e_{i'})) = 0$

donc toutes les colonnes de $\psi(u_{i,j})$ sont nulles sauf la i-ième.

La i-ème colonne est $\mathrm{Mat}(g \circ u_{i,j}(e_i))$

$$\downarrow$$

$$g(u_{i,j}(e_i))$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(g(f_j))$$

6) Cas des endomorphismes

Corollaire : . E evf . $f, g \in L(E)$

. $\mathcal{B}$

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

La matrice de la composée c'est le produit des matrices

Corollaire : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^n$

Rappel : si $f \in L(E)$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$, je sais calculer $P(f)$

ex : si $P = 5X^3 - \frac{3}{2}X^2 + 5X - 8$

On a $P(f) = 5f^3 - \frac{3}{2}f^2 + 5f - 8 \cdot \underline{Id_E}$

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f + \lambda g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

Corollaire: $f \in L(E)$
$P \in \mathbb{K}[X]$
alors $Mat_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(Mat_{\mathcal{B}}(f))$

démo :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où $n \in \mathbb{N}$, et $\forall k$, $a_k \in \mathbb{K}$

On a $\underset{\in L(E)}{P(f)} = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$

donc :

$$Mat_{\mathcal{B}}(P(f)) = Mat_{\mathcal{B}}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k f^k}_{\in L(E)}\Big)$$

$$\underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \, Mat_{\mathcal{B}}(f^k)$$

$$\underset{\substack{\text{compatibilité}\\ \text{au produit}}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \, \underbrace{(Mat_{\mathcal{B}}(f))^k}_{\text{matrice carrée}}$$

$$= P(Mat_{\mathcal{B}}(f))$$

7) $Mat(f^{-1}) = Mat(f)^{-1}$ si f est inversible

Prop: E evf ; $\mathcal{B}$ base, $f \in L(E)$

alors, on a : $f \in GL(E)$ ie f est un automorphisme de E
ie $f : E \to E$ iso
ie f inversible

$\Updownarrow$

$Mat_{\mathcal{B}}(f) \in GL_n(\mathbb{K})$

et dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$$

<u>démo :</u>

$(\Rightarrow)$ Osq $f : E \to E$ iso
on dispose donc de $f^{-1} : E \to E$
On a $f \circ f^{-1} = Id_E$ $(*)$

On applique $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ à cette égalité

On obtient : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E)}_{I_n}$

de même, $\mathrm{Mat}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n$

donc 1) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible

2) l'inverse de cette matrice est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$

3) ie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$

$(\Leftarrow)$ Osq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible. on note $A \in M_n(\mathbb{K})$ l'inverse de cette matrice

On a $A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n$
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times A = I_n$
On veut mq f est inversible.

On utilise le fait que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) : L(E) \to M_n(\mathbb{K}) \quad \text{est un iso !}$$

donc est surjective

donc $A \in M_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ pour un certain g

R^{x} : toute matrice peut être interprétée comme la $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ d'une appli. linéaire

Bilan : C $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) : L(E) \to M_n(\mathbb{K})$ est un iso
soit $g \in L(E)$ tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = A$

On a $A \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n$

ie $\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)} = I_n$

$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E)$

or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ est injective

donc $g \circ f = Id_E$

de m̂, $f \circ g = Id_E$

CCL : f inversible ie $f \in GL(E)$

Rq : De même on peut montrer :

<u>Prop :</u> $\underset{\mathcal{B}}{E}, \underset{\mathcal{E}}{F}$ evf dim n

$f : E \to F$

f iso $\iff {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible $(\in GL_n(\mathbb{K}))$

2) Dans ce cas, ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$

8) Matrice d'une famille de vecteurs

Déf : E evf ; $\mathcal{B}$ base de E, $p \in \mathbb{N}^*$
$n := \dim E$

Soit $\mathcal{F} \in E^p$ une famille de p vecteurs de E

Alors la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$, notée $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, est la matrice :

$$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) := \left(Mat_{\mathcal{B}}(f_1) \middle| \dots \middle| Mat_{\mathcal{B}}(f_p) \right)$$

où on a noté $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$

Prop : E evf, $\mathcal{B}$ base, $n := \dim E$, $\mathcal{F} \in E^n$

alors $\mathcal{F}$ base $\iff Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ inversible

démo : $(\Rightarrow)$ Qsq $\mathcal{F}$ base
Mq $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ inversible. On note $A := Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $AX = O_{n,1}$
Q R^X : $(\forall X, AX = 0 \Rightarrow X = 0) \Rightarrow A$ inv

On note $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. On a : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i(A) = O_{n,1}$

ie : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Mat_{\mathcal{B}}(f_i) = O_{n,1}$

donc $Mat_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right) = O_{n,1}$

Or, $Mat_{\mathcal{B}}(\cdot) : E \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ est un iso
donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0_E$

Or $(f_i)_i$ est libre car c'est une base

donc, $\forall i$, $\lambda_i = 0$ donc $X = 0$

On sait alors que $A \in GL_n(\mathbb{K})$

$(\Leftarrow)$ Osq $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Mq $\mathcal{F}$ base.

Mq $\mathcal{F}$ libre

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0_E$ $(*)$

Mq $\forall i$, $\lambda_i = 0$

On a, en passant $(*)$ à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i) = 0_{n,1}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \cdot X = 0_{n,1}$

En **multipliant** par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})^{-1}$ à gauche, on obtient $X = 0_{n,1}$

Ie, on a : $\forall i$ $\lambda_i = 0$

donc $\mathcal{F}$ est libre

$\mathcal{Q}R^{\times}$: caractère générateur par dimension

$$\left.\begin{array}{l} |\mathcal{F}| = \dim E \\ \mathcal{F} \text{ libre} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{F} \text{ base}$$

Rq : l'image d'une base par un iso est une base

$\mathcal{F}$ base $\Rightarrow$ $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1), \dots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_n))$ base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$

$\Downarrow$

A inv $\Leftrightarrow$ $(C_1(A), \dots, C_n(A))$ libre

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ inversible

Sens réciproque avec $CL_{\mathcal{B}}(\cdot)$

9) Changement de base

Pb : on part de $f \in L(E)$

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ si $\mathcal{B}$ base de E

Si on prend une autre base $\mathcal{B}'$ de E, quel est le lien entre $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

a) Matrice de changement de base

Déf : E evf, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ base de E

⚠ $\mathcal{B}$ base initiale (svt base canonique)
$\mathcal{B}'$ nouvelle base, c'est une base bien choisie, adaptée à notre problème

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée P, est définie par

$$P := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Rq : $\mathcal{B}$ est la base "facile"

P est la matrice des nvx vecteurs dans la base facile.

b) Propriétés

Fait : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \underset{\mathcal{B}\ \mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(Id_E)$

démo : On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$
$\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$

On a $\underset{\mathcal{B}\ \mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(Id_E) = $

$$\begin{array}{cccc} Id_E(e'_1) & & Id(e'_n) & \\ \left(\begin{matrix} \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \end{matrix} \right. & & \left. \begin{matrix} \ \\ \ \\ \ \end{matrix} \right) & \begin{matrix} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_n \end{matrix} \end{array}$$

c'est

$$\overbrace{\begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 \dots & e'_n \end{array}}^{\mathcal{B}'}$$

$$\begin{pmatrix} \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}\right\} \mathcal{B}$$

C'est $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1) \mid \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_2) \mid \dots \mid \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_n) \right)$

ie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

Prop : E evf, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ base de E

L'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

démo : on note $P := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ et $Q := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$

!
matrice de la base
facile des nouv vecteurs

On calcule : $P \cdot Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$

$$= {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Id_E) \cdot {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E)$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E \circ Id_E)$$

$$PQ = I_n$$

De même, $Q \cdot P = I_n$

Rq : on sait cependant que $(AB = I_n \Rightarrow BA = I_n)$

$$\Downarrow$$
$$A^{-1} = B$$

CCL : $P = Q^{-1}$

c) Formules de changement de base

Prop : E evf, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases

Soit $x \in E$, on note $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$
$X' := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$

On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
ie $P := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

Alors : $\underline{X = P \cdot X'}$

Est-ce $X = P \cdot X'$ ou $X' = P \cdot X$

1ère rép : $P = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} e'_1 & \cdots & e'_n \\ & & \end{pmatrix}\begin{array}{c} e_1 \\ e_n \end{array}$

donc P mange des e'_i : PX non H $\neq PX'$ H

donc $X = PX'$

2e rép : on écrit $P = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Id_E)$, on écrit $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

$PX' = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Id_E) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X$

ex : $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_3$

$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Alors on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Prop : E evf, $\mathcal{B}$ base initiale, $\mathcal{B}'$ nouvelle base

On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

ie $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

Soit $f \in L(E)$, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

Alors $\boxed{A = P A' P^{-1}}$

Rq : difficulté à retrouver la formule

dans $A = P^{-1} A' P$, on a un pb d'H

car $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \cdots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \\ e_n \end{array}$

donc $A'P$ n'est pas cohérent car A' mange du $\mathcal{B}'$

- On note M la matrice initiale ie $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
- $\mathcal{B}'$ est une base adaptée à la situation, ici $\mathcal{B}'$ est une base adaptée à f
- dans la base adaptée "f devient diagonale", on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est diagonale

On note $D := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

. bonne formule : $MP = PD$

<u>démo :</u> C'est facile

On a $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$A' = {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

$P = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Id_E)$

$P^{-1} = {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E)$

On calcule :

$A \cdot P = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Id_E)$

$= {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f \circ Id_E) = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

et $P \cdot A' = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(Id_E) \cdot {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

$= {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

CCL : $MP = PD$

ici $AP = P \cdot A'$

$A = P A' P^{-1}$

10) Matrices semblables

A retenir :

Si A et B sont les matrices de $f \in L(E)$ dans des bases différentes alors :

a) "intuitivement" A et B vont avoir les m̂ propriétés

b) On a mq : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

Déf : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$
On dit que A et B sont semblables ssi
$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

Rq : ici, formule facile :
on a si A et B sont fixés $\in M_n(\mathbb{K})$

$$(\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : A = PBP^{-1}) \Leftrightarrow (\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : A = P^{-1}BP)$$

démo : $\Rightarrow$ Osq $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : A = PBP^{-1}$
on fixe un tel P
on a donc $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$
or $P = (P^{-1})^{-1}$
on pose $Q = P^{-1}$, on a donc $A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$

donc $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K}) : A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$

<u>Prop</u> : La relation de similitude qui est définie sur $M_n(\mathbb{K})$, est une relation d'équivalence

<u>démo</u> : Dans cette démo : on note $A \sim B$ ssi A est semblable à B

On veut mq :

a) $A \sim A$ ok $P = I_n$

b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ ok avec P^{-1}

c) $\left.\begin{matrix} A \sim B \\ B \sim C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \sim C$

Osq $A \sim B$ et $B \sim C$

Soient donc

Donc, on a $A = P(Q \cdot C \cdot Q^{-1})P^{-1}$
$= PQ\ C\ Q^{-1}P^{-1}$

Or $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

donc on a $A = (PQ) \cdot C\, (PQ)^{-1}$

donc $A \sim C$

Soient A, B deux matrices semblables, alors :

- A inv $\Leftrightarrow$ B inv
- $\forall k$, A^k semblable à B^k "via P"
- $\forall f \in \mathbb{K}[X]$, $f(A)$ semblable à $f(B)$
- $A = 0 \Leftrightarrow B = 0$
- $A = I_n \Leftrightarrow B = I_n$
- $tr(A) = tr(B)$
- $det(A) = det(B)$

démo : Osq $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$

On a : $det(A) = det(P \cdot B \cdot P^{-1})$
$= det(P) \cdot det(B) \cdot \underbrace{det(P^{-1})}_{= \frac{1}{det(P)}}$

$= \det P \cdot \frac{1}{\det P} \cdot \det B = \det B$

- A nilpotente $\Leftrightarrow$ B nilpotente et les indices de nilpotence sont égaux
- A^T et B^T semblables (via P^T)
- si A inv : . B inv
  . A^{-1} semblable à B^{-1}

III. Image, noyau et rang d'une matrice

1) Image

Déf : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose $\mathrm{Im}(A) := \mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A))$

C'est l'ev engendré par les colonnes de A

C'est un sev de $M_{n,1}(\mathbb{K})$

Fait : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(u_A)$

démo : on utilise le R^x suivant :

si $f : E \to F$ linéaire alors :
$\mathcal{B}$ base de E

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

donc ici : $\mathrm{Im}(u_A) = \mathrm{Vect}(u_A(\varepsilon_1), \dots, u_A(\varepsilon_n))$

$u_A(\varepsilon_1) = A \cdot \varepsilon_1 \to C_1(A)$

$$u_A : M_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$$
$$X \longmapsto \underset{n,p}{\underline{A}}\ \underset{p,1}{\underline{X}}$$

Rappel : $M_{p,1}(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \middle| \ \forall i,\ x_i \in \mathbb{K} \right\}$

on prend $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c'est la base canonique de $M_{p,1}(\mathbb{K})$

On la note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$

On a $A \cdot \varepsilon_j = C_j(A)$

d'où : $\mathrm{Im}(u_A) = \mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A)) = \mathrm{Im}(A)$

2) Noyau d'une matrice

Déf : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ le noyau de A, noté $\mathrm{Ker}(A)$, est déf par :

$$\mathrm{Ker}\, A = \left\{ X \in M_{p,1}(\mathbb{K}) \ \middle| \ AX = 0_{n,1} \right\}$$

Fait : $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(u_A)$

démo : ok

Corollaire : $\mathrm{Ker}(A)$ sev $M_{p,1}(\mathbb{K})$

Rq: Soit E evf
B, B' base de E
$(e_1, \dots, e_n) \to (e'_1, \dots, e'_n)$
Soit $f \in L(E)$ déf par $\forall i, f(e_i) = e'_i$
alors f est un iso. On a $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible

Rq: cas 30.7
on peut définir $tr(f)$ si $f \in L(E)$
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ base de E
alors $Mat_{\mathcal{B}}(f) = P \cdot Mat_{\mathcal{B}'}(f) \cdot P^{-1}$
si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

donc $tr(Mat_{\mathcal{B}}(f)) = tr(Mat_{\mathcal{B}'}(f))$

CCL: le nb $tr(Mat_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie
on note ce scalaire $tr(f)$
Fait: $tr(f \circ g) = tr(g \circ f)$

3) Rang d'une matrice

E ev ; $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de E. Alors le rang de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est
$rg(x_1, \dots, x_p) := \dim Vect(x_1, \dots, x_p)$

Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille de ces colonnes.
Ie $rg\, A = \dim(C_1(A), \dots, C_p(A)) = \dim \operatorname{Im} A$

4) Formule du rang

Prop : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

💡 R^x → espace de départ, c'est p

On a $p = \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A$

démo : on considère $u_A : \begin{array}{rcl} M_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$

On a $u_A \in \mathcal{L}(M_{p,1}(\mathbb{K}), M_{n,1}(\mathbb{K}))$

La formule du rang pour u_A :

$$\underbrace{\dim M_{p,1}(\mathbb{K})}_{p} = \dim \underbrace{\operatorname{Ker} u_A}_{= \operatorname{Ker} A} + \operatorname{rg} u_A$$

$\dim \operatorname{Im} u_A \longrightarrow \operatorname{Im} u_A = \operatorname{Im} A$

$\searrow \dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rg} A$

5) Propriétés du rang des matrices

Plus le rang est petit, moins la matrice est inversible.

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Fait 1 : $\operatorname{rg} A = 0 \iff A = 0_{n,p}$

Fait 2 : $\operatorname{rg}(A) \leqslant 1$

toutes les colonnes de A sont colinéaires entre elles $\iff \exists j_0 \in [\![1,p]\!] : \forall j \in [\![1,p]\!], \exists \lambda_j \in \mathbb{K} :$

$$C_j(A) = \lambda_j C_{j_0}(A)$$

Ex :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ | & | & \cdots & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

démo : $\Uparrow$ ok

Osq toutes les colonnes sont colinéaires

Soit donc j_0 tq $\forall j$, $C_j(A) \in \mathrm{Vect}(C_{j_0}(A))$

On a donc :

$$\mathrm{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_p(A)) \underset{\text{sev}}{\subset} \mathrm{Vect}(C_{j_0}(A))$$

donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant \dim \mathrm{Vect}(C_{j_0}(A)) \leqslant 1$

peut ê nul si $A = 0_{n,p}$

$\Downarrow$. $\mathrm{rg}(A) = 0$: ok

. si $\mathrm{rg}(A) = 1$. On a $\dim \mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A)) = 1$

On utilise le TBI qui dit que de tte famille génératrice, on peut extraire une base

Toute fam. est génératrice de l'espace qu'elle engendre

donc $\exists j_0 \in [\![1,p]\!]$: $(C_{j_0}(A))$ base de $\mathrm{Im}(A)$

. si $j \in [\![1,p]\!]$, $C_j(A) \in \mathrm{Im}(A)$

donc $\exists \lambda_j \in \mathbb{K}$, $C_j(A) = \lambda_j C_{j_0}(A)$

ex $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1

Fait 3 : $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

On a $\quad rg(A) \leq p$

$\qquad\quad rg(A) \leq n$

démo : ok

Fait 4 : $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$A \text{ inversible} \iff rg\, A = n$$

démo : ?

Fait 5 : A, B matrices qu'on peut multiplier entre elles

$$rg(AB) \leq rg\, A$$
$$rg(AB) \leq rg\, B$$

démo : $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

On a $u_{AB} = u_A \circ u_B$

$\hookrightarrow u_B$ d'abord

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^q \arrow[r, "u_B"'] \arrow[rr, bend right, "u_{AB}"'] & \mathbb{K}^p \arrow[r, "u_A"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$ est un diag commutatif

Or, on a vu $rg(g \circ f) \begin{array}{l} \leq rg(g) \\ \leq rg(f) \end{array}$

donc $rg(\underbrace{u_A \circ u_B}_{u_{AB}}) \begin{array}{l} \leq rg(u_A) = rg(A) \\ \leq rg(u_B) = rg(B) \end{array}$

$\qquad\quad \shortparallel$

$\quad rg(AB)$

Fait 6 : $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$
$P \in GL_p(\mathbb{K})$
$Q \in GL_n(\mathbb{K})$

$$rg(AP) = rg(A)$$
$$rg(QA) = rg(A)$$

Fait 7 : théorème de Cramer - Fermane

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
alors : A inversible $\iff \operatorname{Ker} A = \{0_n\}$
$\iff \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0$

démo : th (formule du rang)
$\Downarrow$
si $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$, le rang est plein, donc A inv

6) Forme réduite en rang d'une matrice

a) Notation

$n, p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$ et $r \leq p$ (ie r est un rang)

$$J_r^{(n,p)} := \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{I_r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

Elle a r 1 en diagonale

b) Enoncé

Prop : Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

On note $r := rg(M)$
alors $\exists P \in GL_p(\mathbb{K})$
$\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$:

$$M = Q \cdot J_r^{(n,p)} \cdot P$$

démo : on démontre ce théorème en passant dans le monde des espaces vectoriels

Idée : $M \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \longleftrightarrow f : \underset{\dim p}{E} \longrightarrow \underset{\dim n}{F}$

. Soit E un ev de dim p et $\mathcal{B}$ une base de E
. Soit F un ev de dim n et $\mathcal{E}$ une base de F

Soit $f \in L(E,F)$ tq $\underset{\mathcal{E}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = M$

En effet, $\underset{\mathcal{E}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\cdot) : L(E,F) \longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K})$ ($\exists f$ tq $\longrightarrow M$)
$g \longmapsto \underset{\mathcal{E}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g)$

est un iso.

On va considérer des bases de E et F adaptées à f

1) Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E
2) On sait que $f|_S^{|\mathrm{Im} f} : S \longrightarrow \mathrm{Im} f$ est un iso

donc, $\dim S = \dim \mathrm{Im} f = rg\, f$

3) Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de S

Soit $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$

$$E = \underbrace{S}_{(e_1,\dots,e_r)} \oplus \underbrace{\operatorname{Ker} f}_{(e_{r+1},\dots,e_n)}$$

On a $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

On la note $\tilde{\mathcal{B}}$

4) Je sais que $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$

En effet $f|_S^{|\operatorname{Im} f} : S \to \operatorname{Im} f$ est un iso

$$(e_1, \dots, e_r) \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_r))$$

5) On complète cette famille en une base $(f(e_1), \dots, f(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n)$ de F qu'on note $\tilde{\mathcal{E}}$

6) On a

$$\tilde{\mathcal{B}} \quad f(e_1) \quad f(e_2) \quad \dots \quad f(e_r) \quad \underbrace{f(e_{r+1}) \quad \dots \quad f(e_p)}_{=0}$$

$$_{\tilde{\mathcal{E}}}\operatorname{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 1 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} f(e_1) \\ f(e_2) \\ \vdots \\ f(e_r) \\ f_{r+1} \\ \vdots \\ f_n \\ \tilde{\mathcal{E}} \end{array}$$

Car $(e_{r+1}, \dots, e_p) \to$ base de Ker f

7) CCL : $_{\tilde{\mathcal{E}}}\operatorname{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(f) = J_r^{(n,p)}$

8) On a $\underbrace{_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathrm{Id}_F)}_{\in GL_n(\mathbb{K}) \text{ car } \mathrm{Id}_F \text{ iso}} \; \underbrace{_{\tilde{\mathcal{E}}}\operatorname{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(f)}_{\to J_r^{n,p}} \; {}_{\tilde{\mathcal{B}}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \to \in GL_p(\mathbb{K})$ car Id_E est un iso

$$= {}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E)$$

$= \leftarrow$ par déf de f

$${}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M \text{ par déf de } f$$

donc $\exists P \in GL_p(\mathbb{K})$, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$: $M = Q \cdot J_r^{n,p} \cdot P$

J_r est la Σ de r matrices de rang 1

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) + \dots + \begin{array}{c} r\text{-ième} \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots \; 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

7) Calcul pratique du rang

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ qu'on écrit $A = (C_1 | \dots | C_p)$

On a vu qu'en échelonnant A, on pouvait extraire de la famille $(C_1, \dots, C_p)$ une base de $Vect(C_1, \dots, C_p)$ ie une base de $Im(A)$

Cela permet de calculer $rg(A)$

. Autre façon de voir le m̂ résultat

1°/ Si M est échelonnée, alors $rg(M) =$ nb de pivots de M

$$\begin{pmatrix} 0 - 0 \; * & \text{———} \\ 0 \text{———} 0 \; * & \text{———} \\ 0 \text{———} 0 \; * & \text{———} \end{pmatrix} = (C_1, \dots, C_p)$$

On note $C_{i_1}, \dots, C_{i_r}$ les colonnes où il y a un pivot avec $i_1 < i_2 < \dots < i_r$

Mq $(C_{i_1}, \dots, C_{i_r})$ est libre

On peut le voir par récurrence descendante

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tq $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k C_{i_k} = 0_{n,1}$

. On a $\lambda_r = 0$

En effet, si on considère l'indice $l \in [\![1, n]\!]$ du pivot de C_{i_r}, alors C_{i_r} est la seule colonne ayant un coeff $\neq 0$ en cet indice

donc $\lambda_r = 0$

. On considère l'assertion :

$P(k)$: " $\forall m \in [\![k, r]\!], \lambda_m = 0$ "

On a mq $P(r)$ est vraie

Mq $\forall k \in [\![2, r]\!]$, $P(k) \Rightarrow P(k-1)$

Soit $k \in [\![2, r]\!]$ tq $P(k)$ est vrai

On a donc $\sum_{m=1}^{k-1} \lambda_m C_{i_m} = 0_{n,1}$

On raisonne avec l'indice de ligne du pivot de $C_{i_{k-1}}$ pour prouver que $\lambda_{k-1} = 0$

CCL : $\forall m, \lambda_m = 0$

Caractère générateur : exo

⚠ On a $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Notons $\tilde{A}$ une matrice échelonnée tq $A \sim_L \tilde{A}$

Soit donc $E \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $EA = \tilde{A}$

donc, on a $rg(\tilde{A}) = rg(E \cdot A) = rg(A)$

Fait : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

1) On ne change pas le caractère inversible de A en effectuant des opé. élémentaires sur A

2) On ne change pas le rang de A en effectuant des opé. élémentaires sur A

8) Rang de la transposée

Prop : $rg(A) = rg(A^T)$

démo : On utilise la forme réduite en rang de A

Soient $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $Q \in GL_p(\mathbb{K})$

tq :

$$A = P \cdot J_r^{(n,p)} \cdot Q$$

où $r = rg\, A$

donc
$$A^T = \underbrace{Q^T}_{\in GL_p(\mathbb{K})} \cdot (J_r^{(n,p)})^T \cdot \underbrace{P^T}_{\in GL_n(\mathbb{K})}$$

donc $rg(A^T) = rg\,(J_r^{(n,p)})^T$

évidemment, $(J_r^{(n,p)})^T = J_r^{(p,n)}$ qui a le m̂ rang

CCL : $\operatorname{rg} A^T = r = \operatorname{rg} A$

9) Le rang des colonnes égale le rang des lignes

Rappel : Si E ev et si $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

On appelle rang de $(x_1, \dots, x_n)$ l'entier

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) := \dim \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

Prop : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{rg}(C_1(A), \dots, C_p(A)) = \operatorname{rg}(L_1(A), \dots, L_n(A)) = \operatorname{rg} A$$

démo :

on a $L_i(A) = (C_i(A^T))^T$

Donc, la famille des lignes de A, à transposition près est la famille des colonnes de A^T

Et $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T)$, le résultat est vrai.

QR Prop : $f : \underset{\mathcal{B}}{\overset{p}{E}} \longrightarrow \underset{\mathcal{E}}{\overset{n}{F}}$ linéaire (entre evf)

Alors $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\left({}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$

démo : On considère $\varphi : F \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$

$y \longmapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(y)$

On sait que φ est un iso

Mq $\varphi(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im}\left({}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$ par double $\subset$.

$\subset$: Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$

Soit donc $x \in E$ tq $y = f(x)$

Mq $\varphi(y) \in \operatorname{Im}\left({}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$

On décompose x dans $\mathcal{B}$

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$

On écrit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ avec $\forall i,\ x_i \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\text{On a } \varphi(y) &= \varphi(f(x)) \\
&= \varphi\left(f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right)\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i\, \varphi(f(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{p} x_i \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(f(e_i))
\end{aligned}$$

c'est $C_i\left({}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$ par déf

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{p} x_i\, C_i\left({}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) \\
&\in \operatorname{Vect}\big(\underbrace{C_1(A), \ldots C_p(A)}_{\operatorname{Im}(A)}\big)
\end{aligned}$$

où $A := {}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

donc, $\varphi(\underbrace{y}_{\in \operatorname{Im} f}) \in \operatorname{Im}\left({}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$

donc $\varphi(\operatorname{Im}(f)) \subset \operatorname{Im}\left({}_{\mathcal{E}}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$

$\supset$: Soit $Y \in \mathrm{Im}(A)$

ie $Y \in \mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A))$

Soit donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq $Y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i(A)$

Si je pose $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$

On a $\varphi(f(x)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f(e_i)) = Y$

donc $Y \in \varphi(\mathrm{Im} f)$

ie $\mathrm{Im}(A) \subset \varphi(\mathrm{Im}(f))$

Bilan : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Im} f) = \mathrm{Im}({}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$

On peut considérer

$$\varphi\Big|_{\mathrm{Im}(f)}^{\mathrm{Im}(A)} : \begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &\to \mathrm{Im}(A) \\ y &\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(y) \end{aligned}$$

est inj car φ l'est et est surj car $\varphi(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(A)$

C'est un iso.

donc : $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im} A$

CCL : $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}({}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)$