# Chapitre 29 : Séries

Idée : on veut faire des sommes infinies
ie soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On veut définir :
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$
ce qu'on pourrait noter $\sum_{i=0}^{\infty} x_i \in \mathbb{R}$

## I, Séries

### 1) Définition

Déf : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
On appelle série de terme général $u_n$ et on note $\sum_n u_n$ (se lit "la série des $u_n$") le couple $((u_n)_{n \geq 0}, (S_n)_{n \geq 0})$

où $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$

$S_n$ est appelée : somme partielle d'indice $n$ de $\sum_n u_n$

$\sum_n u_n$ est aussi notée $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$

On dit que la série $\sum_n u_n$ est convergente ssi la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge

Si $\sum_n u_n$ est une série convergente, on appelle somme de la série $\sum_n u_n$, et on note $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ la limite de la suite des sommes partielles.

⚠ Bilan : $\sum_n u_n$ série
objet

$\sum_{k=0}^{n} u_k$ somme partielle
$\in \mathbb{R}$

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ somme de la série (définie si $\sum_n u_n$ est convergente)
$\in \mathbb{R}$

On cherche des conditions suffisantes et pratiques pour assurer que la série $\sum_n u_n$ converge.

Si $\sum_n u_n$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Quand $\sum_n u_n$ converge, on note $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$

Sinon, on pourra noter $\sum_n u_n \not\xrightarrow{CV}$

## 2) Exemples

### a) La série $\sum_n \frac{1}{2^n}$

Peut-on sommer jusqu'à l'$\infty$ :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Fait : La série $\sum_n \frac{1}{2^n}$ est convergente

démo : Soit $n \geq 0$. On note $S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \nearrow \left(\frac{1}{2}\right)^k$

On note $S_n$ la somme partielle de notre série

On a $\underset{\uparrow \atop SG}{S_n} = \text{terme initial} \; \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$

$a \in \mathbb{C}$

$|a| < 1 \Rightarrow a^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_n = 2\left(1-\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\right) \quad \text{car } \left|\frac{1}{2}\right| < 1$$

donc $(S_n)_n$ converge

La limite est $2(1-0) = 2$

Fait :

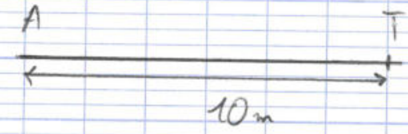
$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \sum_n \frac{1}{2^n} \text{ converge} \\ 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \end{array}}$$

Paradoxe de Zénon d'Elée ($\approx 400$ av J.C)

Achille et la tortue font une course, la tortue part avec 10 m d'avance

Achille ne pourra jamais rattraper la tortue

E I :




Quand A aura atteint l'endroit initial de T, la tortue aura avancé de 1 m ($v_T = \frac{1}{10} v_A$

on a


Quand A arrive en $T_1$, la tortue aura parcouru 10 cm

Bilan : Achille va rejoindre la tortue après avoir parcouru $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$

ie $\sum_{n=0}^{\infty} 10 . \frac{1}{10^n} = 10 \times \frac{1-0}{1-\frac{1}{10}} = 10 \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{100}{9}$

ou : notons $d$ la dist. après laquelle A et T se rejoignent

On note $t$ la durée nécessaire pour que A rejoigne T

$d = v_A . t$ et $d - 10 = v_T . t$

or $v_T = \frac{v_A}{10}$ donc $d = v_A . t$ ie $v_A = \frac{d}{t}$

$$d - 10 = v_T . t = \frac{v_A}{10} . t$$

$$\text{donc } v_A = \frac{(d-10) . 10}{t}$$

$$\text{donc } \frac{d}{t} = \frac{(d-10) . 10}{t}$$

$$\frac{d}{10} = d - 10$$

$$\text{donc } d\left(1 - \frac{1}{10}\right) = 10$$

$$\text{ie } d . \frac{9}{10} = 10$$

$$\text{donc } d = \frac{100}{9}$$

On a découpé un phénomène de durée finie en une infinité d'étapes.

## b) !!! La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ = série harmonique

**Fait !!!** : La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente

⚠ Une suite qui piétine peut diverger

**démo** : On note $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

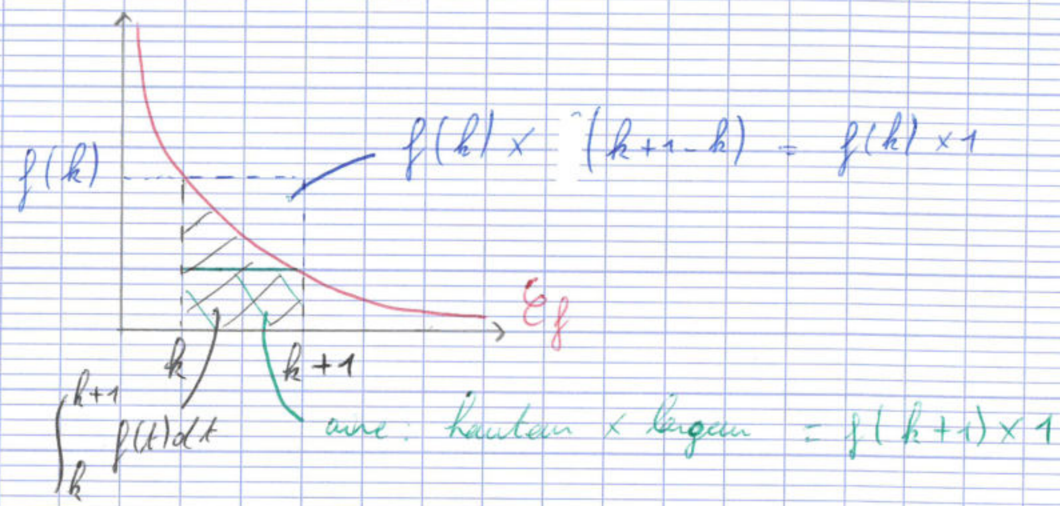
On a $H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ie $(H_n)_n$ piétine

$(H_n)_n \nearrow$ : en effet $\forall n \geq 1$, $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$

Mq $H_n \longrightarrow +\infty$

Notons $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ . On a $f \searrow$




Soit $k \geq 1$

On a $\forall t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ $(*)$

On intègre (*) entre $k$ et $k+1$
On obtient

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt$$

On veut mq $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge

On veut mq $H_n \to \infty$

R*: on se met en mode $\geq$

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \quad \text{pour } k \geq 1$$

On somme de $k=1$ à $n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{d'où } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$$

CCL : $\forall n \geq 1,\ H_n \geq \ln(n+1)$

Or, $\ln(n+1) \to +\infty$
donc $H_n \to +\infty$

Autre démo :
Osq $H_n \to \ell \in \mathbb{R}$
Or $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ ?
absurde car $H_{2n} \to \ell$ donc $H_{2n} - H_n \to 0$
On aurait $0 \geq \frac{1}{2}$

## c) La série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

On se demande si on peut sommer

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Fait : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente

démo :

Ça correspond au DL de $\ln(1+x)$

On a (FTI) :

$$\ln(1+x) = \text{le } DL_n(0) \text{ de } \ln(1+x) + \int_0^x \ln^{(n+1)}(1+t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

donc si $x > -1$ : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

$$+ \int_0^x \frac{\cancel{n!}\,(-1)^n}{(1+t)^{n+1}} \frac{(x-t)^n}{\cancel{n!}} dt$$

Notons $R_n(x) := \int_0^x \frac{(-1)^n}{(1+t)^{n+1}} (x-t)^n \, dt$

Mq Soit $x \geqslant 0$ fixé

Alors $R_n(x) \longrightarrow 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|R_n(x_0)| \leqslant \int_0^{x_0} \left| \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \right| \cdot |x_0 - t|^n \, dt$$

mode $\leqslant$ (majoration) donc pour le dénom : mode $\geqslant$

On a $|1+t| \geq 1$ si $t \in [1, x_0]$

Ainsi, $|R_n(x_0)| \leq \int_0^{x_0} (x_0 - t)^n \, dt$

$$= \left[ \frac{-(x_0-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{x_0}$$

$$= \frac{x_0^{n+1}}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{si } x_0 \leq 1$$

On a mq : $\forall x \in [0,1], R_n(x_0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Soit $x_0 \geq 0$

On $\ln(1+x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x_0^k + \underbrace{R_n(x_0)}_{\to 0}$

On a donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x_0^k}{k} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ln(1+x)$

Si $x_0 \in [0,1]$, alors :

1) la série de Taylor de $f$ en 0 au point $x_0$ converge ($f : x \mapsto \ln(1+x)$)

ie $\sum_{n \geq 1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow{CV}$

2) La somme de la série convergente égale la fonction

ie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

3) On l'a également montré pour exp

4) A-t-on (x fixé) $f \in \mathcal{C}^\infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow{CV}$

et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$ ?

Si les dérivées de $f$ n'explosent pas trop vite et si $|x| \leq 1$ alors

si $f^{(n)}(x) \underset{n \to \infty}{=} O(n!)$

$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente de somme $f(x)$

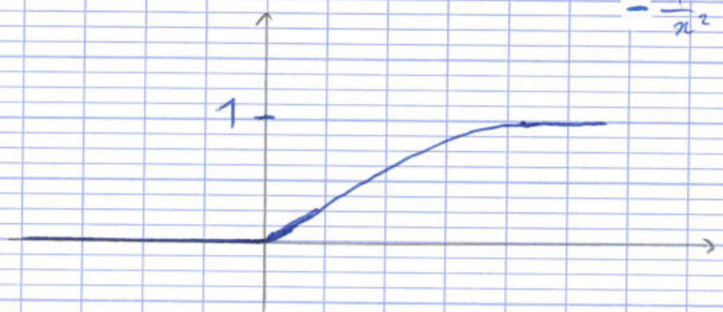
ie si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall t \in [0, x], |f^{(n)}(t)| \leq M \cdot n!$

ie $\| f^{(n)} \|_\infty = O(n!)$

ctr. exemple : on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$-\frac{1}{x^2} \underset{0^+}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \underset{0^+}{\longrightarrow} 0$




Fait : $f$ est $\mathcal{C}^\infty$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$

or $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

Bilan : 1) $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow{CV}$

2) si $x > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \neq f(x)$

Fait : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est une série convergente

et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$

On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Méga-astuce : on a

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\, dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}$$

donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \int_0^1 x^{k-1}\, dx$

$$\underset{\text{linéarité de } \int}{=} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \underset{\text{SG}}{(-1)^{k-1} x^{k-1}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{n-1} (-x)^{\ell}\, dx = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx}_{= [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)} - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\, dx}_{\text{noté } R_n}$$

$R^x$ : $|\cdot| \leq$ --

On a $|R_n| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$ $\qquad (1+x) \geq 1$ si $x \in [0,1]$

$$\leq \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

## d) La série exponentielle

Fait : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors :

1) $\sum_{n \geq 0} \frac{x_0^n}{n!} \xrightarrow{CV}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} = \exp(x_0)$

démo : FTI + majo. du reste avec inégalité triangulaire et $\exp(t)$ majoré par $\exp(x)$ si $t \in [0, x]$ car $\exp \nearrow$ ?

## 3) La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes

Idée : Si $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et si $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$ alors, si je change les 1ers termes de $(u_n)_n$ pour définir une suite $(v_n)_n$, on a encore $\sum v_n \xrightarrow{CV}$

Prop : Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Alors, $u_n = v_n$ APCR $\Rightarrow \sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont m̂ nature

ie $u_n = v_n$ APCR $\Rightarrow \left( \sum u_n \xrightarrow{CV} \Leftrightarrow \sum v_n \xrightarrow{CV} \right)$

démo : Osq $u_n = v_n$ APCR

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$, $u_n = v_n$

Osq $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$. Mq $\sum_n v_n \xrightarrow{CV}$

$\hat{C}$ le problème reste le $\hat{m}$ si on échange $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, on aura montré l'$\Leftrightarrow$

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

si $n \geq 0$

$R_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

On a, si $n \geq N_0$

$$R_n = S_n + \sum_{k=0}^{N_0 - 1} v_k - u_k$$

$R_n \downarrow v_k$ ; $S_n \downarrow u_k$

$\hat{C}$ $(S_n)_n \xrightarrow{CV}$ et $\hat{C}$ $\sum_{k=0}^{N_0-1} v_k - u_k \in \mathbb{R}$

On a bien $(R_n)_n \xrightarrow{CV}$ ie $\sum_n v_n \xrightarrow{CV}$

## 4) Reste d'une série convergente

Déf : Soit $\sum u_n$ une série $\xrightarrow{CV}$

Le reste d'indice $n$ de $\sum_n u_n$ est :

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Rq : on a le droit d'écrire $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ car la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ converge : c'est la série initiale $\sum_{k \geq 0} u_k$ dont on a modifié les termes d'indice $\leq n$)

Prop 1 : Notons $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$

et $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$

(on a fixé $\sum_n u_n$ une série convergente)

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n + R_n = S$

Prop 2 : $R_n \to 0$

démo 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $N \in \mathbb{N}$

on écrit :

$$S_N = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{N} u_k$$

$$\downarrow N \to \infty$$

$S$ par déf de $S = S_n + R_n$

démo 2 : On a $\forall n$, $S_n + R_n = S$

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$$

donc, $R_n \to 0$

$R^{\times}$ : soit $\sum_n u_n$ une série convergente

alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

## 5) Opérations sur les séries convergentes

**Prop :** Soit $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ deux séries, $\lambda \in \mathbb{K}$
alors :

1) $\left.\begin{array}{l} \sum_n u_n \xrightarrow{CV} \\ \sum_n v_n \xrightarrow{CV} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_n u_n + \lambda v_n \xrightarrow{CV}$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + \lambda v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

3) $\left.\begin{array}{l} \sum_n u_n \xrightarrow{CV} \\ \sum_n v_n \xrightarrow{\cancel{CV}} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_n u_n + v_n \xrightarrow{\cancel{CV}}$

**démo :** on écrit les identités correspondantes pour les sommes partielles et on passe à la limite

énoncé analogue pr les suites : $\xrightarrow{CV} + \xrightarrow{\cancel{CV}} = \xrightarrow{\cancel{CV}}$

**Prop :** Soit $\sum_n u_n$ une série à termes complexes
Alors :

1) $\sum_n u_n \xrightarrow{CV} \iff \left\{\begin{array}{l} \sum_n Re(u_n) \xrightarrow{CV} \\ \sum_n Im(u_n) \xrightarrow{CV} \end{array}\right.$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} Re(u_n) + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} Im(u_n)$$

**démo :** cf suites

## 6) Étude des suites via les séries

**Prop :** Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
alors la suite $(u_n)_n$ et la série $\sum_n u_{n+1} - u_n$ ont $\hat{m}$ nature

ie : on peut ramener l'étude de la convergence d'une suite à la convergence d'une série
ie $(u_n)_n \xrightarrow{CV} \iff \sum_n u_{n+1} - u_n \xrightarrow{CV}$

**démo :** Notons $S_n$ la somme partielle d'indice $n$ $\sum_k u_{k+1} - u_k$, pour $n \in \mathbb{N}$

On a $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$

## 7) Séries grossièrement divergentes

**Prop :** $\sum_n u_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow u_n \to 0$

C'est une condition nécessaire de convergence
⚠ ce n'est pas une condition suffisante :
$u_n \to 0 \not\Rightarrow \sum_n u_n \xrightarrow{CV}$
ctr-exemple : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge mais $\frac{1}{n} \to 0$

**démo :** Osq $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$
Si $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$

On sait que $(S_n)_n \xrightarrow{CV}$. Notons $S := \lim_{n \to +\infty} S_n$

On a $S_n \to S$ et aussi $S_{n-1} \to S$

$R^x$ : Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$
alors $a_n \to \ell \iff a_{n+1} \to \ell \iff a_{n-1} \to \ell$

donc $S_n - S_{n-1} \to 0$

Or $S_n - S_{n-1} = u_n$ donc $u_n \to 0$

**Déf** : On dit que $\sum_n u_n$ est grossièrement divergente ssi $u_n \not\to 0$

## 8) Séries géométriques

**Déf** : Soit $a \in \mathbb{K}$
La série géométrique de paramètre a est la série $\sum_{n\geq 0} a^n$

**Théo** : Soit $a \in \mathbb{C}$
Alors : $\sum_n a^n \xrightarrow{CV} \iff |a| < 1$

démo :
$\Rightarrow$ Osq $\sum_n a^n \xrightarrow{CV}$ donc on a $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Or, on a mq on a nécessairement $|a| < 1$
(cf chapitre suites)
ou absurde : $|a| \geq 1$ alors $\forall n$, $|a|^n \geq 1$

$\Leftarrow$ Osq $|a| < 1$
Mq $\sum_n a^n \xrightarrow{CV}$
Soit $n \geq 0$, on a $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ car $a \neq 1$

Or $|a| < 1$ donc $a^n \to 0$

donc $\sum_{k=0}^{n} a^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-a}$

Rq : on a mq $|a| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

## II, Comparaison série / intégrale

### 1) Formule de comparaison $\Sigma$ vs $\int$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tq $a \leq b$

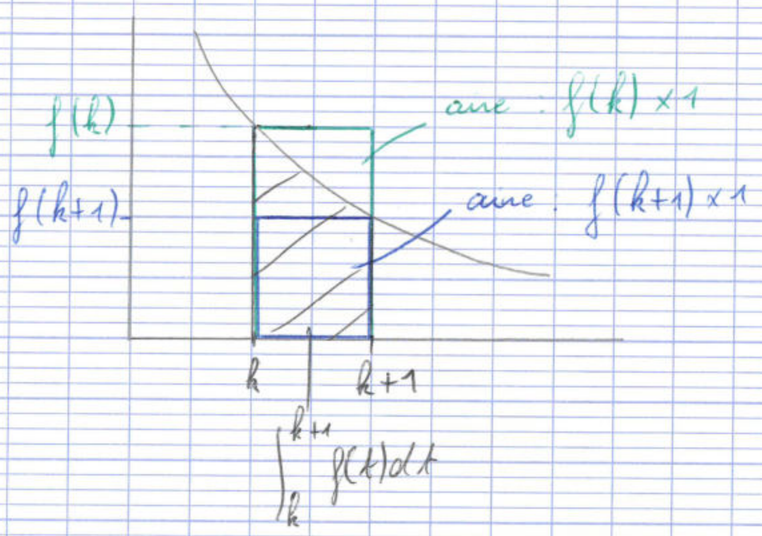
Alors :

$$f(b) + \int_a^b f(t)dt \leq \sum_{k=a}^{b} f(k) \leq \int_a^b f(t)\,dt + f(a)$$

démo :

. si $a = b$ : ok

. si $a < b$ :



Soit $k \geqslant 0$. $\hat{c}$ $f \searrow$

On a $\forall t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ (*)

En intégrant (*) entre $k$ et $k+1$, on obtient :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \qquad (1)$$

$R^{x}$ : on veut plutôt $\int \leqslant f(k) \leqslant \int$

- $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k)$

de plus, $\displaystyle f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt$

on remplace $k+1$ par $k$

rq : on avait $k \geqslant 0$ ; ici on va appliquer (2) avec $k-1$

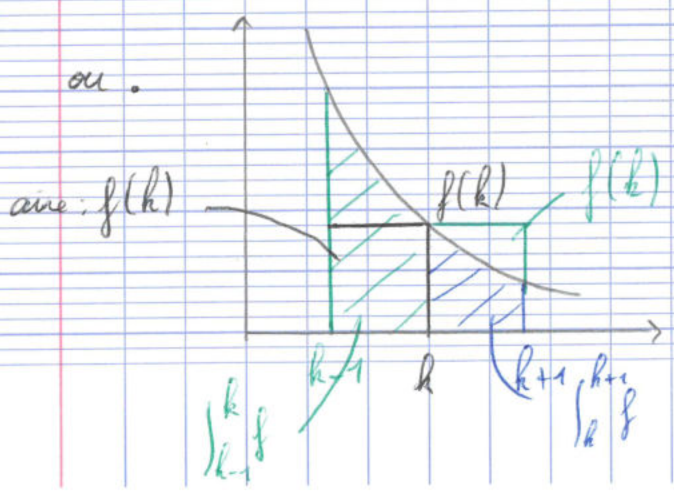
donc $k \geqslant 1$

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

Bilan : $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$

si $k \geqslant 1$

ou.



$$\int_k^{k+1} f \leqslant f(k) = f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f$$

On a mq $\forall k \geqslant 1$, $\int_k^{k+1} f \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f$

On somme pour $k$ compris entre $a+1$ et $b-1$

$$\sum_{k=a+1}^{b-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) \leqslant \sum_{k=a+1}^{b-1} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

$$\int_{a+1}^{b} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) \leqslant \int_{a}^{b-1} f(t)\,dt$$

CCL:

- on ajoute $f(a)$
  On a $\int_a^{a+1} f \leqslant f(a) \leqslant f(a)$

- on a
  $$f(b) \leqslant f(b) \leqslant \int_{b-1}^{b} f(t)\,dt$$

on somme : $f(b) + \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=a}^{b} f(k) \leqslant \int_a^b f(t)dt + f(a)$

## 2) Séries de Riemann

Déf : Soit $a \in \mathbb{R}$.
La série de Riemann de paramètre $a$ est la série
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$$

Ex :
- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ : la série harmonique est la série de Riemann pour $a = 1$

$a = 2$ : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

$a = \frac{3}{2}$ : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$a = \frac{1}{2}$ : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$a = 0$ : $\sum_{n \geq 1} 1$

$a = -1$ : $\sum \frac{1}{n^{-1}}$ ie $\sum n$

Prop : !!! Soit $a \in \mathbb{R}$
Alors $\sum_n \frac{1}{n^a} \xrightarrow{CV} \iff a > 1$

démo :
1°) Si $a \leq 0$, on a $\frac{1}{n^a} = n^{-a} \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$

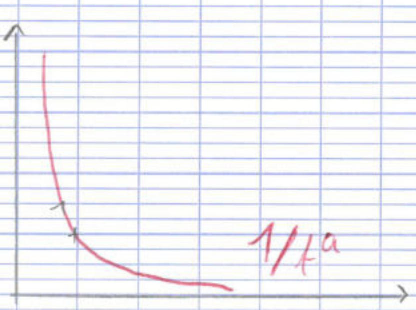
donc $\sum \frac{1}{n^a}$ est grossièrement divergente

2°) Osq $a \in ]0,1[$

On veut mq $\sum \frac{1}{n^a}$ diverge, on se met en mode $\geqslant$

On a bien $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ ↘ sur $\mathbb{R}_+^*$

$R^x$ :




Soit $n \in \mathbb{N}$, on

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \geqslant \int_1^n \frac{1}{t^a} dt + \frac{1}{n^a}$$

$$\int_1^n \frac{1}{t^a} dt = \left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_1^n \qquad a < 1, \quad 1-a > 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \geqslant \frac{1}{1-a}\left(n^{1-a} - 1\right) + \frac{1}{n^a}$$

donc $\frac{1}{1-a}\left(n^{1-a} - 1\right) + \frac{1}{n^a} \to \infty$

donc par minoration, on obtient $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \to +\infty$

Rq : on peut faire mieux

Soit $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1-a}\left(n^{1-a} - 1\right) + \frac{1}{n^a} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^a} dt + 1$$

ie $\underbrace{\frac{1}{1-a} n^{1-a}}_{\to +\infty} \underbrace{- \frac{1}{1-a}}_{\text{cste}} + \underbrace{\frac{1}{n^a}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ car } a>0}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \leq \frac{1}{1-a} n^{1-a} - \frac{1}{1-a} + 1$

$$\sim \frac{1}{1-a} \cdot n^{1-a} \qquad\qquad \sim \frac{1}{1-a} \cdot n^{1-a}$$

On a donc par le thm d'encadrement des équivalents, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \sim \frac{1}{1-a} \cdot n^{1-a} \quad \text{si } a \in ]0,1[$$

Rq : une primitive de $\frac{1}{t^a}$ : $\frac{1}{1-a} \cdot t^{1-a}$

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$ est semblable à une prim.

Rq : Le raisonne$^t$ précédent est encore valable si $a \leq 0$

Fait : $\sum_{k=1}^{n} k^a \sim \frac{n^{a+1}}{a+1}$ pour $a \geq 0$

Vérif : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \sim \frac{n^4}{4}$$

On a mq $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \xrightarrow{CV}$ quand $a < 1$ et que dans ce cas-là, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \sim \frac{1}{1-a} \cdot n^{1-a}$$

. cas $a = 1$ On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
La formule de comparaison $\sum / \int$ nous donne :

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt + 1 \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\frac{1}{n} + \ln(n) \leq H_n \leq \underbrace{\ln(n)}_{\ln(n)} + \underbrace{1}_{\text{borné}}$ (*)

Ainsi $H_n \sim \ln(n)$

on aurait pu avoir $\ln(n) + o(\ln(n))$

Rq : on a mieux car on a montré que (*)

$\ln(n) + O(1) \leq H_n \leq \ln(n) + O(1)$

$\forall a > 0$, $\ln(n) = o(n^a)$
$\ln(n) = o(n^2)$
$\ln(n) = o(\sqrt{n})$

$\ln(\ln(n)) = o(\ln(n))$

$\ln(x) \underset{x\to\infty}{=} o(x)$ ie $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$

or $\ln(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc par composition des limites, on a $\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \longrightarrow 0$

donc on a : $\ln(n) + O(1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + O(1)$

donc, $H_n = \ln(n) + O(1)$

$H_n = \ln(n)$ + une suite bornée

On pose $u_n : H_n - \ln(n)$

On veut mq $(u_n)_n$ bornée

On a $\forall n \geqslant 1$ :

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant H_n - \ln(n) \leqslant 1$$

On cherche le DA de $H_n$

$R^x$ on pose $u_n : H_n - \ln(n)$

on a $(u_n)_n$ bornée

On s'intéresse à la monotonie de $(u_n)_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Or $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$ (égalité si $x = 0$)

donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{\leqslant -\frac{1}{n+1}} \leqslant 0$

Bilan: $(u_n)_n$ décroît, elle converge

Notons $\gamma$ sa limite

On a $u_n = \gamma + o(1)$

Bilan : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

Rq : $\gamma$ est apellé constante d'Euler
$\gamma \simeq 0,58$

. cas $a > 1$ : Mq $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a} \xrightarrow{CV}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n^a} + \int_1^n \frac{1}{t^a} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq \int_1^n \frac{1}{t^a} dt + 1$$

Or, $\int_1^n \frac{1}{t^a} dt = \left[ \frac{t^{-a+1}}{-a+1} \right]_1^n = \left[ \frac{1}{a-1} \frac{1}{t^{a-1}} \right]_n^1$

$$= \frac{1}{a-1} \left( 1 - \frac{1}{n^{a-1}} \right)$$

Bilan, si $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq \frac{1}{a-1} \left( 1 - \frac{1}{n^{a-1}} \right) + 1$$

$$\leq 1 + \frac{1}{a-1}$$

Bilan : $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \right)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée : elle converge

CCL : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a} \xrightarrow{CV}$ quand $a > 1$

Calculons un équivalent du reste de $\sum_n \frac{1}{n^a}$ qd $a>1$

On sait : 1°) ĉ la série $\underrightarrow{CV}$, le reste est défini

On pose, pour $n \geq 1$, $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$

2°) $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ie $R_n = o(1)$

Soit $n \geq 1$ et soit $N \geq n+1$. On écrit :

$$\frac{1}{N^a} + \int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^a}\,dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^a} \leq \int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^a}\,dt + \frac{1}{(n+1)^a}$$

et $\displaystyle\int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^a}\,dt = \left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_{n+1}^{N} = \left[\frac{1}{a-1}\,\frac{1}{t^{a-1}}\right]_{N}^{n+1}$

$$= \frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{a-1}} - \frac{1}{N^{a-1}}\right)$$

donc :

$$\frac{1}{a-1}\,\frac{1}{(n+1)^{a-1}} - \overbrace{\frac{1}{a-1}\,\frac{1}{N^{a-1}}}^{\substack{\text{car } a>1 \\ \xrightarrow[N\to\infty]{} 0}} + \underbrace{\frac{1}{N^a}}_{\substack{\xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \\ \text{car } a>0}} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^a} \leq \frac{1}{a-1}\,\frac{1}{(n+1)^{a-1}} - \underbrace{\frac{1}{a-1}\,\frac{1}{N^{a-1}}}_{\substack{\downarrow N\to\infty \\ 0}} + \frac{1}{(n+1)^a}$$

⚠ la limite diffère de celle du terme de droite donc le thm des gendarmes ne s'applique pas

(n est fixé, $N\to+\infty$) Or, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^a} \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ car la série $\underrightarrow{CV}$

donc, par passage à la limite dans les $\leq$, on obtient :

$$\frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{n^{a-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \leq \frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{n^{a-1}} + \frac{1}{(n+1)^a}$$

Or, $\frac{1}{(n+1)^a} \sim \frac{1}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$

donc $\frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{n^{a-1}} + \frac{1}{(n+1)^a} \sim \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{n^{a-1}}$

Par encadre$^t$ d'éq. on a $\underline{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \sim \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{n^{a-1}}}$

Rq : $u_n \to l \Rightarrow u_{n+1} \to l$
$\phantom{Rq : u_n \to l \Rightarrow} u_{n-1} \to l$

c'est F pour les équivalents :
$u_{n+1} \sim \text{formule} \not\Rightarrow u_n \sim \text{formule}$

Ctr. exemple : $u_n = 2^{n-1}$, on a $u_{n+1} \sim 2^n$

mais $u_n \not\sim 2^n$

mais $u_{n+1} \sim \alpha_n \Rightarrow u_n \sim \alpha_{n-1}$

Prop : $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$ et $\sum_n v_n \xrightarrow{CV}$

Alors $\sum_n u_n + v_n \xrightarrow{CV}$

$$\text{et } \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

Fait : $0,99999\ldots = 1$

démo :

. qu'est-ce que $0,9999\ldots$ ?

rappel : $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ d'une série $\xrightarrow{CV}$ est une limite

C'est la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$ de la série $9 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^n}$ qui

est $\xrightarrow{CV}$ car une série géométrique de paramètre

$\alpha$ et $|\alpha| < 1$ est convergente

Bilan : $0,999\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$

Or $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{10} \cdot \frac{1-0}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{9}$

$9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 1$

ie $0,999\ldots = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ n'est pas défini, interdit

C'est une série grossièrement divergente car $(-1)^n \not\to 0$

**Bug** : On note $A := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

On a $A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$

$= 1 + \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1}_{A} \ldots$

donc $A = 1 + A$

donc $0 = 1$

**Rq** : Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \xrightarrow{CV}$ pour $x$ petit

A-t-on pour $x$ suffisamment petit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x) \ ?$$

NON : cf $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$, $0$ pour $x = 0$

mais si on montre que $R_{n,x}(f) \to 0$

où $R_{n,x}(f) := \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt$

$\hat{C}$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + R_{n,x}(f)$

— somme partielle de la série de Taylor

On a $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}}$ $= f(x) - \underset{\downarrow \atop 0}{R_{n,x}(f)}$

converge ie la série $\xrightarrow{CV}$
ça tend vers $f(x)$ ie la somme de la série
égale $f(x)$

Rq : on ne peut pas écrire $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ si la série
n'est pas convergente

Imaginons :

on pose $B = 1+2+3+4+5+\dots$

On écrit $B = 1+(1+1)+(2+1)+(3+1)+\dots$

$= 1+(1+1+\dots) + 1+2+3+4+\dots$

$= 1+(1+1+\dots+B)$

ie $1+1+1+\dots = -1$

et $1+1+\dots = 1+(1+1+\dots)$

$-1 = 1 + -1$

$-1 = 0$

## III, Critères de convergence

<u>Notations</u> : $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k \quad , \quad T_n := \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

Trouvons des conditions suffisantes de convergence

<u>Principe</u> : $\sum_n v_n \xrightarrow{CV} \iff v_n \to 0$ suffisa^t vite

### 1) Séries à termes positif

<u>Notation</u> : On dit que $\sum_n u_n$ est une série à termes positifs ssi $\forall n \geq 0$ , $u_n \geq 0$

On note $\sum_n u_n$ SATP

<u>Faits</u>

Soit $\sum_n u_n$ SATP APCR

On note $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$

Alors :

1) $(S_n)_n$ croissante APCR

2) $\sum_n u_n \xrightarrow{CV} \iff (S_n)_n$ majorée

3) $\sum_n u_n \cancel{\xrightarrow{CV}} \iff S_n \to +\infty$

4) $\sum_n u_n \xrightarrow{CV} \iff (R_n)_n$ décroissante APCR

## 2) Critère de majoration

**Prop** : $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ SATP tq $u_n \leqslant v_n$ APCR

Alors $\sum_n v_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow \sum_n u_n \xrightarrow{CV}$

Rq : c'est F pour les séries qui ne sont pas SATP

démo : Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N_0$, $u_n \leqslant v_n$

Osq $\sum_n v_n \xrightarrow{CV}$

Soit $n \geqslant N_0$, on écrit :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N_0-1} u_k + \underbrace{\sum_{k=N_0}^{n} u_k}_{\leqslant \sum_{k=N_0}^{n} v_k}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$$

$$R^{+} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

CCL : on a

$$\forall n \geqslant N_0,\ S_n \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{N_0-1} u_k}_{\text{cste}} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Bilan : $(S_n)_n$ est majorée APCR

Or, $\forall (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(w_n)_n$ majorée $\Leftrightarrow$ $(w_n)_n$ majorée APCR

donc, $(S_n)_n$ majorée. Donc, $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$

Fait, $R^x$ : Soit $\sum_n u_n$ SATP $\xrightarrow{CV}$

alors, $\forall n$, $0 \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k$

## 3) L'équivalent donne la nature entre SATP

Théorème : $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ SATP APCR

alors $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont $\hat{m}$ nature

Remarques :

. c'est F si les séries ne sont pas SATP
. c'est un critère très pratique

ex : $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{\sin\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)}$

on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

on a $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \to 0$

donc $\sin\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$

Bilan $w_n \sim \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ SATP et convergente d'après le critère de Riemann

donc $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{\sin\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)}$ converge

. ⚠ $F^{++}$ : $\sum u_n$, $\sum v_n$ SATP

$u_n \sim v_n$ $\quad$ ~~$\Rightarrow$~~ $\quad \sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$

$\sum u_n \xrightarrow{CV}$

On sait que $\sum v_n \xrightarrow{CV}$

Or deux suites convergentes qui sont $\sim$ ont m̂ limite

On pourrait trouver des ctr-ex.

<u>démo :</u>

. Osq $u_n \sim v_n$

On se place dans le cas où $u_n \neq 0$ APCR

Ça implique $v_n \neq 0$ APCR

On a donc $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$

donc $\frac{u_n}{v_n} \leqslant 2$ APCR

Or, $\forall n$, $v_n \geqslant 0$

donc, $u_n \leqslant 2 v_n$ APCR

donc, on a $\sum v_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow \sum u_n \xrightarrow{CV}$ d'après 2)

De m̂, on a $\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$ APCR

Or $\forall n$, $v_n \geqslant 0$ donc $\frac{1}{2} v_n \leqslant u_n$ APCR

ie $v_n \leqslant 2 u_n$ APCR

donc $\sum u_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow \sum v_n \xrightarrow{CV}$

**Rappel !** Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \sim v_n$
Alors :
$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,$ $u_n \neq 0 \iff v_n \neq 0$
$u_n \geq 0 \iff v_n \geq 0$
$u_n \leq 0 \iff v_n \leq 0$

ie $u_n \sim v_n \Rightarrow$ APCR, $u_n$ et $v_n$ ont le m̂ signe strict

donc si $u_n \sim v_n$ et que $\sum u_n$ SATP alors $\sum v_n$ SATP APCR et le thm s'applique.
En pratique, il suffit de vérifier le caractère SATP pour la série la + simple

Exemple : on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{\sin\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$

ĉ $\forall n \geq 1, \frac{1}{n\sqrt{n}} > 0$ on a $\sum_n w_n$ SATP APCR

## IV, Séries absolument convergentes

Idée : "absolument" → en valeur absolue

### 1) Définition

a) Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
On dit que $\sum_n u_n$ est absolu$^t$ convergente et on note $\sum_n u_n \xrightarrow{ACV}$ ssi $\sum_n |u_n| \xrightarrow{CV}$

Rq : quand $\sum_n u_n \xrightarrow{ACV}$, on dit que $(u_n)$ est sommable et on note $(u_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

b) Si $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$ mais que $\sum_n |u_n| \cancel{\xrightarrow{CV}}$
on dit que $\sum_n u_n$ est semi-convergente

Exemples :

. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\geq 0} \alpha^n \xrightarrow{ACV} \iff |\alpha| < 1$

donc les séries géom sont ACV qd elles sont CV

. la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est semi convergente

En effet, on a $\sum_n \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{CV}$ (cf $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx$)

mais $\sum_n \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ diverge : c'est la série harmoniq

2) ACV $\Rightarrow$ CV !!!

Théorème
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
alors $\sum_n u_n \xrightarrow{ACV} \Rightarrow \sum_n u_n \xrightarrow{CV}$

Démo :
. cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Oqg $\sum_n |u_n| \xrightarrow{CV}$

Idée : on met les termes $\geq 0$ d'un côté et les termes $\leq 0$ de l'autre.
on aura : $(u_n)_n = (v_n)_n + (w_n)_n$
avec $\forall n$, $v_n \geq 0$ et $w_n \leq 0$

Ex :

$u_n = (1, -3, 0, 5, -1, 7, 8, -10, 9)$

$v_n = (1, 0, 0, 5, 0, 7, 8, 0, 9)$

$w_n = (0, -3, 0, 0, -1, 0, 0, -10, 0 \ldots)$

Formellet, on pose pour $n \geq 0$ :

$$v_n := \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geq 0 \\ 0 \text{ si } u_n \leq 0 \end{cases} \qquad w_n := \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a $\forall n$, $u_n = v_n + w_n$

$v_n \geq 0$

$w_n \leq 0$ ie $-w_n \geq 0$

De plus, on a : $\forall n \geq 0$, $0 \leq v_n \leq |u_n|$

$0 \leq -w_n \leq |u_n|$

Bilan : $\sum v_n$ SATP, $\sum |u_n|$ SATP

et l'hyp. du critère de majo 2) est vérifiée

donc $\sum_n v_n \xrightarrow{CV}$

de m, $\sum_n -w_n \xrightarrow{CV}$ donc $\sum_n w_n \xrightarrow{CV}$

donc $\sum v_n + w_n \xrightarrow{CV}$

ie $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$

. cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $\sum_n |u_n| \xrightarrow{CV}$

On a $\sum u_n \xrightarrow{CV} \iff \begin{cases} \sum Re(u_n) \xrightarrow{CV} \\ \sum Im(u_n) \xrightarrow{CV} \end{cases}$

Or, $\forall n$, $|Re(u_n)| \leq |u_n|$
$|Im(u_n)| \leq |u_n|$

. Mq $\sum_n Re(u_n) \xrightarrow{CV}$

On a $\sum_n |Re(u_n)| \xrightarrow{CV}$ car :

. $\sum_n |u_n| \xrightarrow{CV}$
. $\forall n, |Re(u_n)| \leq |u_n|$

En appliquant le critère de majoration entre SATP
on a $\sum |Re(u_n)| \xrightarrow{CV}$
D'après le cas 1 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on a donc :
$\sum_n Re(u_n) \xrightarrow{CV}$
De m̂, $\sum_n Im(u_n) \xrightarrow{CV}$

CCL : $\sum u_n \xrightarrow{CV}$

Idée : je veux montrer que $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$
Déjà, je peux montrer que $\sum_n |u_n| \xrightarrow{CV}$
Pour rép à cette question, je peux utiliser le critère des séries à termes généraux équivalents

ex : $\sum_n \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + \cos(n)}$ nature de la série ?

Elle est absolu$^t$ $\xrightarrow{CV}$ donc $\xrightarrow{CV}$

En effet, $n\sqrt{n} + \cos(n) \sim n\sqrt{n}$

car $n\sqrt{n} \to +\infty$ et $(\cos(n))_n$ bornée

donc $\left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + \cos(n)}\right| \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$

or $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ SATP $\xrightarrow{CV}$

donc $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + \cos(n)}\right| \xrightarrow{CV}$

CCL : $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + \cos(n)} \xrightarrow{ACV}$ donc $\xrightarrow{CV}$

## 3) Inégalité triangulaire

**Prop :** Soit $\sum_n u_n \xrightarrow{ACV}$

Alors :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

démo : Il s'agit d'un passage à la limite dans une inégalité large

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{N} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N} |u_k|$$

(inégalité triang. gén.)

$\downarrow N \to \infty$

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ car $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$

or, $a_n \to \ell \Rightarrow |a_n| \to |\ell|$

en effet : $\forall n$, $\big||a_n| - |\ell|\big| \leqslant |a_n - \ell|$

c'est l'inég. triangulaire renversée

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ est 1- lipschitzienne

ie $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant 1 . |x - y|$

c'est exactement $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$

donc, $f$ est $C^0$ : $a_n \to \ell \Rightarrow f(a_n) \to f(\ell)$

ie $|a_n| \to |\ell|$

En pratique, c'est en $R^x$ : $u_n \to \ell \Rightarrow |u_n| \to |\ell|$

donc, $\left|\sum_{k=0}^{N} u_k\right| \longrightarrow \left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right|$

Puis, $\sum_{k=0}^{N} |u_k| \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ car $\sum_k u_k$ $\overrightarrow{ACV}$

Donc, en passant à la limite dans :

$$\forall N, \quad \left|\sum_{k=0}^{N} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N} |u_k|$$

on obtient : $\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$

## 4) Critère de convergence par domination

**Théorème :**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries

1) . $\exists M \geqslant 0 : |u_n| \leqslant M \cdot |v_n|$ APCR

. $\sum v_n \xrightarrow{ACV}$

$$\Downarrow$$

$$\sum u_n \xrightarrow{ACV}$$

2) $\left.\begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ \sum v_n \xrightarrow{ACV} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \xrightarrow{ACV}$

3) $\left.\begin{array}{l} u_n = O(v_n) \\ \sum v_n \xrightarrow{ACV} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \xrightarrow{ACV}$

: si on est dominé par de l'absolu$^t$ convergent, on est ACV

si on est $o$(ACV), on est ACV

on pourrait écrire : $\sum O(ACV) \Rightarrow ACV$

$\sum o(ACV) \Rightarrow ACV$

**démo :**

1) Soit $M \geqslant 0$ tq $|u_n| \leqslant M \cdot |v_n|$ APCR

Mq $\sum |u_n| \xrightarrow{CV}$

On utilise le critère de majoration entre SATP APCR

$\left.\begin{array}{l} \hat{c}\ \sum M|v_n| \xrightarrow{CV} \\ \text{et } \hat{c}\ |u_n| \leqslant M|v_n| \text{ APCR} \end{array}\right\} \sum_n |u_n| \xrightarrow{CV}$

3) Il s'agit de 1) puisque :

$$u_n = O(v_n) \iff \left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right)_n \text{ majorée}$$

$$\iff \exists M \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$$

$$\iff \exists M \geq 0 : |u_n| \leq M |v_n| \text{ APCR}$$

2) c'est ok car $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$

## 5) Critère $n^\alpha$

Prop : Soit $\sum u_n$ une série, alors :

1) S'il existe $\alpha > 1$ tq $\underbrace{u_n \cdot n^\alpha}_{\text{j'accélère ma suite}} \to 0$

Alors $\sum u_n \xrightarrow{ACV}$

Rq : si $\exists \alpha > 1$ : m̂ en dopant ma suite par $n^\alpha$, elle tend vers 0 $\Rightarrow$ intuitive$^t$, $u_n$ tend vite vers 0

2) S'il existe $\alpha \leq 1$ tq $u_n \cdot n^\alpha \to +\infty$

Alors $\sum_n u_n \xrightarrow{\cancel{CV}}$

Démo :

1) Osq $\exists \alpha > 1$ : $u_n \cdot n^\alpha \to 0$

Fixons un tel $\alpha$

On a donc $u_n = o(1/n^\alpha)$

Or $\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{ACV}$ d'après le critère de Riemann

donc $\sum_n u_n \xrightarrow{ACV}$

2) Mq $\exists \alpha \leq 1$ : $u_n \cdot n^\alpha \to +\infty$

Fixons un tel $\alpha$

On a : $u_n \cdot n^\alpha \geq 1$ APCR

donc, on a $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$ APCR

Or, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, plus précisé$^t$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \longrightarrow +\infty$$

donc $\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc $\sum_n u_n \overset{\cancel{CV}}{\cancel{\to}}$

? trouver un ctr-exemple à

a- $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ ont $\hat{m}$ nature

b- $\left.\begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ \sum v_n \xrightarrow{CV} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \xrightarrow{CV}$

Idée : $\sum v_n \xrightarrow{CV} \Leftrightarrow$ " $v_n \to 0$ vite "

mais pour que cette idée fct, il faut $u_n > 0$

exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{CV}$ mais $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ lente$^t$

$u_n \xrightarrow{vite} 0 \Leftrightarrow \sum |u_n| \xrightarrow{CV}$ ie $\sum u_n \xrightarrow{ACV}$

Rq : On peut interpréter $u_n \cdot n^\alpha \to +\infty$ avec $\alpha \leq 1$ en disant : " en dopant un tout petit peu $u_n$, elle explose donc elle ne peut pas tendre vers 0.

## 6_ Application : critère de Riemann - Bertrand

Il s'agit d'un raffinement du critère de Riemann

Prop : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^a \ln(n)^b} \xrightarrow{CV} \iff \begin{array}{c} a > 1 \\ \text{ou} \\ a = 1 \text{ et } b > 1 \end{array}$$

démo :

Osq $a < 1$ : Mq $\sum \frac{1}{n^a \ln(n)^b} \cancel{\xrightarrow{CV}}$

On applique le critère $n^\alpha$

R$^\times$ : ĉ $a < 1$ : soit $\alpha$ tq $a < \alpha < 1$

On aimerait mq $n^\alpha \cdot \frac{1}{n^a \ln(n)^b} \longrightarrow +\infty$

$$n^\alpha \cdot \frac{1}{n^a \ln(n)^b} = n^{\overset{>0}{\alpha - a}} \cdot \frac{1}{\ln(n)^b} \longrightarrow +\infty$$ par croissance comparée

osq $b > 0$

démo : c'est $\left( \frac{n^{\frac{\alpha - a}{b}}}{\ln(n)} \right)^b \longrightarrow \frac{n^\gamma}{\ln(n)} = \gamma \cdot \frac{n^\alpha}{\ln(n^\gamma)}$

Bilan : $a < 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^a \ln(n)^b} \cancel{\xrightarrow{CV}}$

. Osq $a > 1$ : Mq $\sum \frac{1}{n^a \ln(n)^b} \xrightarrow{CV}$

On applique le critère $n^\alpha$ $\alpha > 1$ tq $n^\alpha \frac{1}{n^a \ln(n)^b} \longrightarrow 0$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $1 \leqslant \alpha < a$

On a $n^{\alpha} \dfrac{1}{n^{a} \ln(n)^{b}} = \dfrac{1}{n^{\overbrace{a-\alpha}^{>0}} \ln(n)^{b}}$

On $n^{a-\alpha} \cdot \ln(n)^{b} \longrightarrow +\infty$

car $a - \alpha > 0$ et par croissance comparée

. cas $a = 1$

Mq $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \cdot \ln(n)^{b}} \xrightarrow{CV} \iff b > 1$

$b = 0$ : ok

$b < 0$ : On regarde $\displaystyle\sum_{n} \frac{\ln(n)^{\overbrace{-b}^{>0}}}{n}$

On a $\ln(n)^{-b} \longrightarrow +\infty$

donc $\ln(n)^{-b} \geqslant 1$ APCR

donc $\dfrac{\ln(n)^{-b}}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ APCR

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty$

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)^{-b}}{k} \longrightarrow +\infty$

Soit $b > 0$ : Mq $\sum \frac{1}{n \ln(n)^b} \xrightarrow{CV} \iff b > 1$

Rq $\frac{1}{n \ln(n)^b} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\ln(n)^b \to +\infty$

Comparaison avec une intégrale
On a $(\ln(n)^b)_{n \geq 2}$ est une suite positive strict$^t$ et croissante. De m, pour $(n)_{n \geq 2}$

donc $\left(\frac{1}{n \ln(n)^b}\right)_{n \geq 2}$ est décroissante

On considère $f : [2, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x \ln(x)^b}$

On a . $[2, +\infty[ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)^b$ est $> 0$ et $\nearrow$

. $[2, +\infty[ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x$ également

Donc, par opérations sur les fct monotones, on a : $f \searrow$
On peut donc appliquer la formule de comparaison $\sum / \int$.
Soit $N \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{N \ln(N)^b} + \int_2^N \frac{dt}{t \ln(t)^b} \leq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k \ln(k)^b} \leq \int_2^N \frac{dt}{t \ln(t)^b} + \frac{1}{2 \ln(2)^b}$$

On note $I_N = \int_2^N \frac{dt}{t \cdot \ln(t)^b}$ c'est $\frac{u'}{u^b}$

$\Downarrow$

$u' u^{-b}$

$\hookrightarrow \frac{u^{1-b}}{1-b}$

Osq $b \neq 1$

donc $I_N = \left[ \dfrac{\ln(t)^{1-b}}{1-b} \right]_2^N$

$= \dfrac{1}{1-b} \left( \ln(N)^{1-b} - \ln(2)^{1-b} \right)$

Si $b < 1$ :

On a $1-b > 0$, et donc $\ln(N)^{1-b} \longrightarrow +\infty$

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k\ln(k)^b} \geqslant \underbrace{I_n + \frac{1}{N\ln(N)^b}}_{\downarrow \atop +\infty}$

On a donc divergence

Si $b > 1$ :

On a $\ln(N)^{1-b} = \dfrac{1}{\ln(N)^{\underbrace{b-1}_{>0}}} \longrightarrow 0$

donc $(I_N)_N$ converge : donc $(I_N)_N$ est bornée

Soit donc $M \in \mathbb{R}$ tq $\forall N \geqslant 2$, $I_N \leqslant M$

On a donc $\forall N \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k\ln(k)^b} \leqslant I_n + \frac{1}{2\ln(2)^b}$

$\leqslant M + \dfrac{1}{2\ln(2)^b}$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)^b}$ est une SATP dont la suite des sommes partielles est bornée : donc elle converge.

$b = 1$. On a alors $I_n = \displaystyle\int_2^N \frac{1}{t\ln(t)}\, dt$

$R^x$ je sais la calculer

$$I_n = \left[ \ln(\ln(t)) \right]_2^N$$
$$= \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2))$$
$$\searrow +\infty$$

donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge

Rq : $\sum \frac{1}{n}$ diverge

On a trouvé une suite $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

mais telle que $\sum u_n$ diverge encore

C'est $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ ou $\sum \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ mais

$\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ est la + petite

## 7) Contre - exemples

a) Mq $\left.\begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ \sum w_n \xrightarrow{CV} \end{array}\right\} \not\Rightarrow \sum u_n \xrightarrow{CV}$

$R^x$ : on sait que c'est vrai si $(w_n)_n$ est de signe constant APCR

En effet, si $w_n \geq 0$ APCR

dans ce cas, on a $\sum w_n$ SATP APCR

et on a $w_n = |w_n|$ APCR

donc $\sum w_n \xrightarrow{ACV}$ puisque $\xrightarrow{CV}$

donc le théorème de domination par ACV s'applique.

Si $w_n \leq 0$ APCR, quitte à multiplier par $-1$, c'est pareil.

Bilan : On cherche le contre-ex avec $(w_n)_n$ tq 1°) le signe de $w_n$ change tout le tps

2°) $\sum w_n \xrightarrow{CV}$

On prend $w_n := \frac{(-1)^n}{n}$ si $n \geq 1$

On cherche $(u_n)_n$ tq $u_n = o(w_n)$

$R^k$ : $u_n = o(w_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{w_n} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \left|\frac{u_n}{w_n}\right| \longrightarrow 0$

$\Leftrightarrow |u_n| = o(|w_n|)$

A retenir : $u_n = o(w_n) \Leftrightarrow |u_n| = o(|w_n|)$

On cherche donc $(u_n)_n$ tq

1°) $u_n = o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ie $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

2°) $\sum_n u_n$ diverge

On prend $\sum_n \frac{1}{n \ln(n)}$ ie $u_n := \frac{1}{n \ln(n)}$

b) On cherche $\sum u_n$ et $\sum w_n$
telles que
1°) $u_n \sim w_n$
2°) pourtant $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de nature différente

On a $\frac{(-1)^n}{n} \sim \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}$

car $\frac{1}{n\ln(n)} = o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

et $\sum \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{CV}$

$\sum \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)} \cancel{\xrightarrow{CV}}$ car c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

## V, Séries alternées

On s'intéresse aux séries du type $\sum (-1)^n \cdot a_n$
où $\forall n, a_n \geq 0$

Exemple : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Théorème : (critère spécial des séries alternées)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to 0$ et $a_n \searrow$
alors 1) $\sum (-1)^n \cdot a_n \xrightarrow{CV}$
2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \geq 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \leq a_0$

ie la somme est du signe du premier terme et plus petite que le premier terme (en $|\cdot|$)

Exemple :

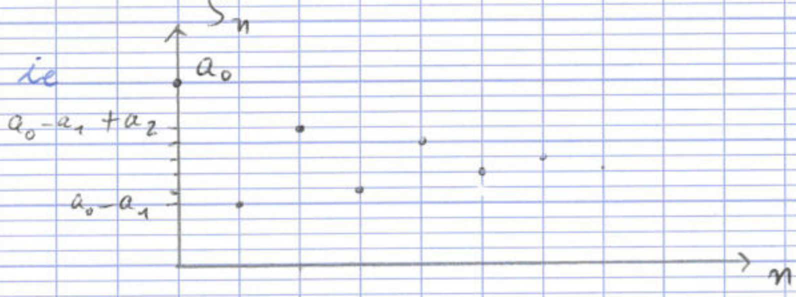
- $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie les hyp. du CSA car $\left(\frac{1}{n}\right)_n \searrow$ et $\frac{1}{n} \to 0$
- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{CV}$ par CSA
- $\sum \frac{(-1)^n}{n \ln(n)} \xrightarrow{CV}$ par CSA

démo : 1 Idée

Je pars de $a_0$

Puis, je lui soustrais $a_1$ : c'est $\geq 0$ car $a_1 \leq a_0$

ie




Puis je rajoute $a_2$ : qui est + petit que ce que j'ai retranché donc c'est $\leq a_0$

2 Idée : utiliser les suites adjacentes

On pose $u_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot a_k$

$$v_n := \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot a_k$$

On veut mq :
a) $(u_n)_n \searrow$
b) $(v_n)_n \nearrow$
c) $u_n - v_n \to 0$

a) soit $n \geq 0$, on calcule

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

$$= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$$

$$= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \text{ car } (a_n)_n \searrow$$

b) De même, la suite $(v_n)_n \nearrow$

c) On a $u_n - v_n = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1}$

$$= a_{2n+1} \to 0 \quad \text{car } a_n \to 0$$

Le thm des suites adjacentes nous donne,
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tq $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell$
On sait qu'on a : $0 \leq u_0 - a_1 = v_0 \leq \ell \leq u_0 = a_0$

Ainsi, $0 \leq \ell \leq a_0$

Or, lemme :
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$ tq
$u_{2n} \to \ell$
$u_{2n+1} \to \ell$ alors $u_n \to \ell$

⚠ $\left.\begin{array}{l}(u_n)_n \text{ bornée} \\ (u_n)_n \text{ piétine}\end{array}\right\} \not\Rightarrow (u_n)_n$ converge

On peut donc conclure que $\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l

## VI. Développement décimal d'un nombre réel

Rq : Grâce au CSA, on sait que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{CV}$

Cela nous donne des ctr. ex + élémentaires

- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

  mais $\sum \left(\frac{-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) \cancel{\xrightarrow{CV}}$

  $\frac{1}{n} = o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ mais $\sum \frac{1}{n} \cancel{\xrightarrow{CV}}$

On a $0{,}999\ldots = 1$ donc il n'y a pas unicité du dvpt décimal dans $\mathbb{R}$ à priori

En fait, on a aussi : $41{,}999\ldots = 42$

$0{,}35999\ldots = 0{,}36$

En fait, tout nb décimal (ie de la forme $\frac{k}{10^l}$, $k\in\mathbb{Z}$, $l\in\mathbb{N}$) possède exactement deux écritures

l'écriture qui se termine par une $\infty^{té}$ de 9 est appellée impropre

On note $\mathcal{E} := \left\{ (a_n)_{n\geq 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*} \mid \exists N_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq N_0, a_n = 9 \right\}$

ie $\mathcal{E} = \left\{ (a_n)_{n\geq 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*} \mid a_n = 9 \text{ APCR} \right\}$

On pose $F := [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*} \setminus \{$

Théorème

$\forall x \in [0,1[, \exists! (a_n)_{n\geq 1} \in F : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

$(a_n)_n$ est appelé le dvpt décimal (propre) de $x$

ex : $\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 0,33\ldots$

$\sum_{n=1}^{N} \frac{3}{10^N} = \frac{1}{10} \cdot 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^N}{1-\frac{1}{10}} \longrightarrow \frac{1}{10} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}$

démo : Soit $x \in [0,1[$

on raisonne par analyse - synthèse

On suppose qu'on a trouvé $(a_n)_{n\geq 1} \in F$ qui convient, on la fixe.

On a $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$

On a donc $a_1 = \lfloor 10x \rfloor$

$a_2 = \lfloor 10(10x - a_1) \rfloor$

$a_2 = \lfloor 100x - 10\lfloor 10x \rfloor \rfloor$

Synthèse : j'ai tjrs $x \in [0,1[$ fixé

On définit $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ en posant $a_1 := \lfloor 10x \rfloor$

et $a_{n+1} := \left\lfloor \left( x - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} \right) 10^{n+1} \right\rfloor$

On doit mq . $\forall n, a_n \in [\![0,9]\!]$

. $(a_n)_{n\geq 1} \in F$

. $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

Idée : $\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{10^i} \leqslant x < \sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_i}{10^i} + \frac{a_N + 1}{10^N}$

valeur tronquée de $x$

$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$

$$a_{n+1} \leqslant 10^{N+1} x - 10^{N+1} \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{10^i} < a_{n+1} + 1$$

donc $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{10^i} \leqslant x < \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}}$ ...

## 2) Application

**Théorème** : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

ie il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$
ie "l'infini de $\mathbb{R}$ est strictement + grand que l'infini de $\mathbb{N}$" ie $\mathbb{R}$ n'est pas énumérable
ie on ne peut pas écrire $\mathbb{R} = \{a_0, a_1, \dots\}$

démo : on utilise le procédé diagonal de Cantor.
Si c'était le cas, on écrit

$$[0,1[ = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

On écrit $a_i = 0, b_1^{[i]} b_2^{[i]} b_3^{[i]} b_4^{[i]} \dots$ : écriture décimale illimitée de $a_i$

On a
$$a_0 = 0, b_1^{[0]} \; b_2^{[0]} \; b_3^{[0]} \; b_4^{[0]}$$
$$a_1 = 0, b_1^{[1]} \; b_2^{[1]} \; b_3^{[1]} \; b_4^{[1]}$$
$$a_2 = 0, b_1^{[2]} \; b_2^{[2]} \; b_3^{[2]} \; b_4^{[2]}$$

$y$

On considère $y$ en changeant toutes ses décimales

Plus précisément, on considère

$$\varphi : [\![0,9]\!] \to [\![0,9]\!]$$
$$1,2,3,\dots 9 \longmapsto 0$$
$$0 \longmapsto 1$$

On a $\forall x \in [\![0,9]\!], \varphi(x) \neq x$

On pose $y := 0, \varphi(b_1^{[0]}) \varphi(b_2^{[1]}) \varphi(b_3^{[2]}) \dots$

On a $y \in [0,1[$

Or $[0,1[ = \{a_0, a_1, \dots\}$

donc $\exists m \in \mathbb{N} : y = a_m$

Donc leurs décimales sont égales

On regarde la $m+1$-ième décimale de $y = a_m$

$\varphi(b_{m+1}^{[m]})$ c'est $b_{m+1}^{[m]}$

c'est absurde ! Donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Déf : Soit $E$ un ens quelconque

On dit que $E$ est dénombrable ssi

$\exists f : \mathbb{N} \to E : f$ bijective

Une telle bijection $f$ est appelée une énumération de $E$

Ex : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable

donc $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable

Or $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

donc $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}})$ est infini : nb réels trascendants

Fait : Soit $E$ ens

Il n'existe pas de surjection de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$

Intuitivement : $\mathcal{P}(E)$ est strictement + grand que $E$

Applica°: l'infini de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est stric$^t$ + grand que l'$\infty$ de $\mathbb{R}$

démo du fait :

Soit $\varphi : E \to \mathcal{P}(E)$ une application

Mq $\varphi$ n'est pas surjective

On pose $A := \left\{ x \in E \mid x \notin \varphi(x) \right\}$

Supposons que $A$ soit atteint par $\varphi$

On a donc $A = \varphi(x_0)$ pour $x_0 \in E$ bien choisi

A-t-on $x_0 \in A$ ?

Non : si $x_0 \in A$, alors par déf de $A$, on a $x_0 \notin \varphi(x_0)$

ie $x_0 \notin A$

Ainsi, $x_0 \notin A$ ie $x_0 \notin \varphi(x_0)$

donc $x_0 \in A$ : absurde

Bilan : $A$ n'est pas atteint par $\varphi$

$\varphi$ n'est pas surjective

$\forall \varphi : E \to \mathcal{P}(E)$, $\varphi$ n'est pas surjective