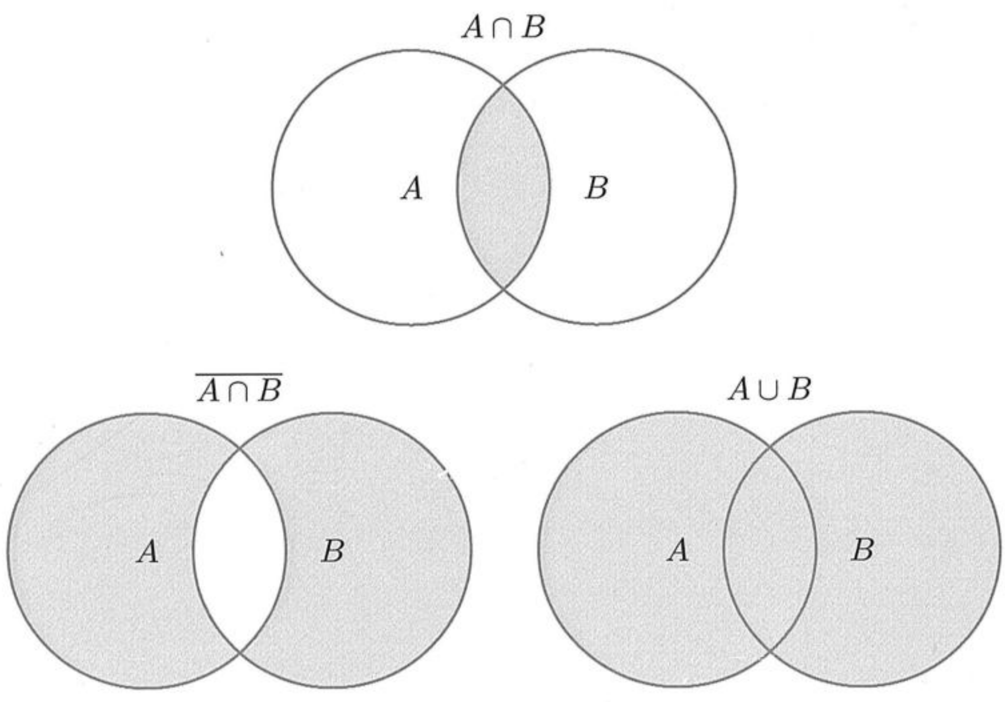
PCSI 3
2019/2020

Lycée Sainte-Geneviève
13 septembre 2019

Chapitre 2

Théorie des ensembles

Ensembles



Représentations de plusieurs opérations sur les ensembles

La théorie des ensembles sert souvent aux mathématiciens de théorie fondamentale, et ce sera le cas pour nous : toutes les autres théories s'expriment en terme de théorie des ensembles. La théorie des ensembles constituera donc pour nous un langage qu'il faut absolument maîtriser.

Chapitre 2 : Ensembles

Objectif : s'entraîner aux canevas de preuve

I, Ensembles

1) Définitions

Déf. informelle :
Un ensemble E est une collection d'objets

. Si x est un de ces objets, on note $x \in E$ et on dit que x est un élément de E
. On note $x \notin E$ l'assertion non$(x \in E)$ ie quand x n'est pas un élément de E

Exemples :
. $\mathbb{N}$ est un ensemble : on a $0 \in \mathbb{N}$
. $\mathbb{R}$ est un ensemble : on a $i \notin \mathbb{R}$

Rq : si $x \in E$, on note aussi rarement $E \ni x$

2) Descriptions d'ensemble

. On peut décrire un ensemble en donnant la liste de ses éléments. On dit qu'on décrit E par extension.

Exemples :
. Notons $E := \{0 ; 1 ; 4 ; 10\}$

Avec cette notation, l'ordre ne compte pas ni les éventuelles répétitions

Ex : On a $\{0;0;0\} = \{0\}$

et $\{1;0\} = \{0;1\}$

. De même, on a $\{0;0;1;8\} = \{8;0;1\}$ etc.

. On peut décrire un ensemble par <u>compréhension</u>

Soit E un ensemble et soit $P(x)$ un prédicat de $x \in E$

On notera :

$$F := \left\{ x \in E \;\middle|\; P(x) \right\}$$

"l'ensemble des $x \in E$ tels que $P(x)$ soit vraie"

<u>Ex :</u> . $\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \right\}$

c'est l'ensemble des entiers naturels pairs

. $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists p, q \in \mathbb{Z} : \left(q \neq 0 \text{ et } x = \frac{p}{q} \right) \right\}$

c'est l'ensemble des nombres rationnels

On le note $\mathbb{Q}$

On pourra également écrire :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0 \right\}$$

3) <u>Ensemble vide</u>

C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Il est noté $\emptyset$

Ex : On a $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = -1 \right\} = \emptyset$

4) Inclusion

a) Définition

Déf : Soient E, F des ensembles
On dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$ ou
$E \subseteq F \overset{\Delta}{\text{ssi}} \forall x \in E,\ x \in F$ et "E est un ss ensemble de F"
. Si E n'est pas inclus dans F, ie si $\exists x \in E : x \notin F$,
on note $E \not\subset F$

Exemples :

. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
C'est une chaîne d'extensions
. On définit :
$$\mathbb{D} := \left\{ \frac{p}{10^n} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$$ l'ensemble des nb décimaux

On a $\frac{1}{10} \in \mathbb{D}$ et $0{,}12345 \in \mathbb{D}$ En effet, on a :

$$0{,}12345 = \frac{12345}{10^5}$$

mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (exo)

. Soit E un ensemble
Soient $P(x)$ et $Q(x)$ des prédicats de $x \in E$ tels que :
$\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$
Fait : On a
$$\{x \in E \mid P(x)\} \subset \{x \in E \mid Q(x)\}$$

Canevas de preuve pour mq $E \subset F$

On écrira :

$$\text{Mq } \underbrace{E \subset F}_{\text{c'est une } \forall\text{-assertion}}$$

- Soit $x \in E$
- Mq $x \in F$
- (...)
- Ainsi, on a $x \in F$

Ainsi, $E \subset F$

Démo du fait :

Soit $t \in \{x \in E \mid P(x)\}$ (1)

Mq $t \in \{x \in E \mid Q(x)\}$

D'après (1) on a : . $t \in E$
. $P(t)$ est vraie

Or, on sait que $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$

Donc $Q(t)$ est vraie

Comme $t \in E$, on a

$$t \in \{x \in E \mid Q(x)\}$$

CCL : On a bien mq

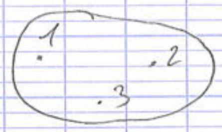
$$\{x \in E \mid P(x)\} \subset \{x \in E \mid Q(x)\}$$

Ainsi, $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

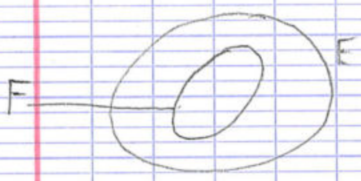
b) Dessins

En théorie des ensembles, on représente les ensembles par des "patatoïdes" ou des diagrammes de Venn.

Par ex, l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sera représenté par :



Une inclusion $F \subset E$ sera représentée



c) Propriétés

Proposition

Soit E un ensemble, on a :

a) $\emptyset \subset E$

b) $E \subset E$

Démo :

a) On a $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$

c'est une $\forall$ assertion quantifiée sur le vide : elle est vraie

b) l'assertion "$\forall x \in E,\ x \in E$" est également vraie

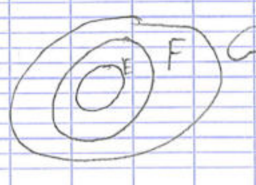
Proposition (transitivité de $\subset$)

Soient E, F, G des ensembles

Alors, on a :

$(E \subset F \text{ et } F \subset G) \Rightarrow E \subset G$

Dessin :



Démo :

On applique le canevas

On suppose $E \subset F$ et $F \subset G$

Mq $E \subset G$

Soit $x \in E$

Mq $x \in G$

On a $\begin{cases} E \subset F \\ x \in E \end{cases}$ donc $x \in F$

On a $\begin{cases} F \subset G \\ x \in F \end{cases}$ donc $x \in G$ ce qu'on voulait

Ainsi, on a $E \subset G$

Rq : ⚠ ** L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas

Supposons que cet ensemble existe et notons le U

Alors on pourrait définir $V := \left\{ E \in U \mid E \notin E \right\}$

A-t-on $V \in V$?

On raisonne par disjonction de cas

1er cas : si $V \in V$ alors on a $V \notin V$ par déf° de V : absurde

2e cas : Si $V \notin V$ alors on a $V \in V$ par déf de V : absurde

C'est absurde

Rq importante :

Un ensemble peut être un élément d'un autre ensemble.

P ex : considérons A l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ dont les bornes sont 0 et 1. On a $A = \left\{ [0;1],]0;1] ; [0;1[;]0;1[\right\}$

On a : $[0;1] \in A$

A-t-on $[0;1] \subset A$?

NON. En effet, on a $1 \in [0;1]$ mais $1 \notin A$

Pourquoi $1 \notin A$?
Il suffit de regarder la liste des éléments de A qui sont : $[0;1]$; $]0;1]$; $[0;1[$ et $]0;1[$. Dans chacun de ces cas, 1 n'est pas cet élément
Donc $1 \notin A$.
Autre preuve : $\frac{1}{2} \in [0;1]$ mais $\frac{1}{2} \notin A$

Ex : Considérons $A := \left\{ \{1\} \right\}$

A possède un seul élément qui est $\{1\}$
L'unique élément de A est un ensemble
On a $1 \notin A$
Mais $\{1\} \in A$
On a $1 \in \{1\}$
$\{1\} \in A$ mais $1 \notin A$
La relaO d'appartenance n'est pas transitive
Dessin :

Vocabulaire :
Si $E \subset F$, on dit que F contient E, on peut noter $F \supset E$

Proposition (Principe de double inclusion)
Soient E, F des ensembles
Alors, on a
$E = F \iff (E \subset F$ et $F \subset E)$

Démo :
. On a $\forall x \in E$, $x \in F$
et $\forall x \in F$, $x \in E$
Ainsi, E et F ont les mêmes éléments
Donc $E = F$

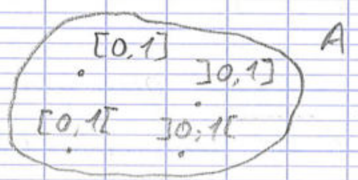
. En réalité, il s'agit d'un axiome de la théorie des ensembles.

<u>Complément</u>

On prend $A =$ l'ens. des intervalles de bornes 0 et 1

A a quatre éléments. par ex : $]0, 1[\in A$

On peut dessiner



A-t-on $[0;1] \subset A$?

Non deux raisons

1°) $[0;1]$ est un ensemble infini

Si on avait $[0;1] \subset A$, on aurait A infini

2°) Si $[0;1] \subset A$. Comme on a $\frac{1}{2} \in [0;1]$

On aurait $\frac{1}{2} \in A$: ce qui est faux : parmi les 4 élts de A, aucun n'est égal à $\frac{1}{2}$.

On a $[0;1] = \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \leq t \leq 1 \right\}$

En général, pour mq $E = F$, on écrira:

Mq $E = F$

On raisonne par double-inclusion:

. Mq $E \subset F$

canevas de $E \subset F$

. Mq $F \subset E$

canevas de $F \subset E$

Ainsi, $E = F$

Notation

Soient E, F des ensembles

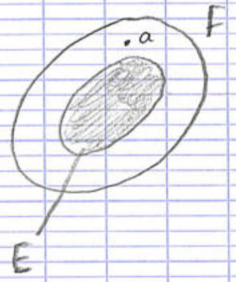
On note $E \subsetneq F$

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $E \subset F$ et $E \neq F$

On dit que E est inclus strict^t dans F

Rq et dessin

$E \subsetneq F$ se dessine



On a $E \subsetneq F \Leftrightarrow E \subset F$ et $\exists a \in F : a \notin E$

5) Cardinal

Déf. informelle :

Si E est un ensemble fini, on appelle cardinal de E, et on note $\text{card}(E)$ ou $|E|$ ou $\# E$, le nombre d'éléments de E

Ex : . Si $n \in \mathbb{N}$, on dit que n est premier $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\text{card}\left(\text{Div}_{\geq 0}(n)\right) = 2$$

. On a $\text{card}(PCSI3) = 42$

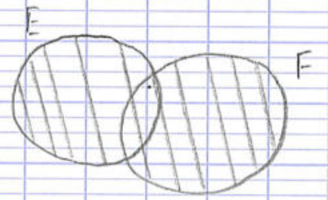
. $[0, 1]$ est un ensemble infini

II, Opérations sur les ensembles

1) Union

Définition : Soient E et F des ensembles
L'union de E et F, notée $E \cup F$ est définie par

$$E \cup F := \left\{ x \;\middle|\; x \in E \text{ ou } x \in F \right\}$$



▨ : $E \cup F$

Proposition :
Soient E, F, G des ensembles
Alors, on a :
1) $E \cup F = F \cup E$
2) $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$
3) $E \cup E = E$
4) $E \cup \emptyset = E$
5) $E \subset E \cup F$

Démonstration : Cela découle des propriétés de la disjonction, du "ou"
1) cf P ou $Q \equiv Q$ ou P
2) cf $(P$ ou $Q)$ ou $R \equiv Q$ ou $(P$ ou $R)$
3) cf P ou $P \equiv P$
4) cf P ou $F \equiv P$ où F est l'assertion toujours fausse
5) cf $P \Rightarrow (P$ ou $Q)$ est toujours vraie

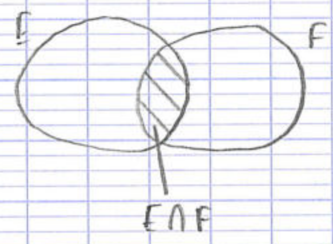
2) Intersection

Définition : Soient E et F des ensembles
L'intersection de E et F notée $E \cap F$, est définie par :

$$E \cap F := \left\{ x \;\middle|\; x \in E \text{ et } x \in F \right\}$$

Rq : On a $E \cap F = \left\{ x \in E \;\middle|\; x \in F \right\}$

et $E \cap F = \left\{ x \in F \;\middle|\; x \in E \right\}$



Proposition : Soient E, F et G des ensembles, on a :

1) $E \cap F = F \cap E$
2) $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$
3) $E \cap E = E$
4) $E \cap \emptyset = \emptyset$
5) $E \cap F \subset E$

Démo : en ex ■

Rq !! : . les points 2) des deux prop. précédentes permettent de donner un sens à $E \cap F \cap G$ et $E \cup F \cup G$
On dit que les opérations "$\cup$" et "$\cap$" sont associatives
. de même, on a : $(E \cup F) \cup (G \cup H) = E \cup ((F \cup H) \cup G)$, etc...
. on a aussi $E \cup F \cup G = G \cup E \cup F$ etc

Rq !! : Réflexe : Il y a $3!$ écritures de $E \cup F \cup G$ possibles

En effet :

. on a 3 choix pour la première lettre

. on a 2 choix pour la $2^{ème}$ lettre

. on a 1 seul choix possible pour la dernière lettre

Au total, on a $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ choix

Plus généralement, on a $n!$ écritures possibles de $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$

3) Union, intersection et inclusion

Proposition :

Soit E un ensemble et soient $A, B \subseteq E$ deux parties de E

Alors, on a :

1) $A \subset B \iff A \cap B = A$

2) $A \subset B \iff A \cup B = B$

Démonstration :

On raisonne par double - implication

. Mq $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

Supposons $A \subset B$ (*)

Mq $A \cap B = A$

On raisonne par double - **inclusion**

. Mq $A \cap B \subset A$

C'est vrai d'après le cours

C'est toujours vrai

. Mq $A \subset A \cap B$

Soit $x \in A$, Mq $x \in A \cap B$

Or, $A \subset B$ d'après (*)

Donc, $x \in B$

donc, $x \in A \cap B$

Ainsi, on a $A \subset A \cap B$

Par double inclusion, on a $A = A \cap B$

Ainsi, on a $A \subset B \Rightarrow A = A \cap B$

. Réciproquement, mq $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

Supposons $A = A \cap B$ (**)

Mq $A \subset B$

Soit $x \in A$, mq $x \in B$

On a $A = A \cap B$ donc $x \in A \cap B$

Or $A \cap B \subset B$ est tjrs vrai

Donc, $x \in B$

Ainsi, on a $A \subset B$

Donc, on a $A = A \cap B \Rightarrow A \subset B$

Donc 1) est vrai

2) exo.

4) Double distributivité

Proposition : Soient E, F, G des ensembles. On a

1) $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$

2) $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$

Démo : C'est le pendant ensembliste de la double distributivité logique entre "et" et "ou".

5) Ensembles disjoints

Définition : . Soient E, F des ensembles

On dit que E et F sont disjoints ssi $E \cap F = \emptyset$

. Dans ce cas, on notera $E \sqcup F := E \cup F$

↳ "E union disjointe avec F"

6) Complémentaire d'une partie

Définition : Soit E un ensemble

Soient A, B des parties de E

On appelle complémentaire de B dans A et on note

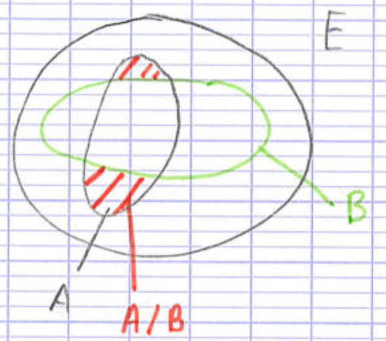
A privé de B → $A \setminus B$ l'ensemble défini par :

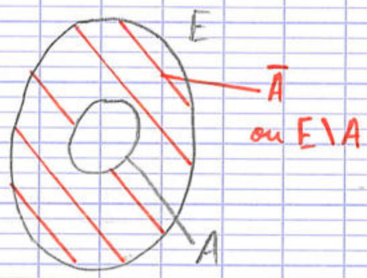
$$A \setminus B := \left\{ x \in A \;\middle|\; x \notin B \right\}$$

Si le contexte est clair, on pourra noter

$\bar{A} := E \setminus A$

Dessin :





Exemple :

. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ens. des nbs irrationnels

. On a $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Rq : A et $\bar{A}$ sont toujours disjoints

Proposition : Soit E un ensemble

Soient A et B des parties de E ; alors on a :

1) $\bar{\bar{A}} = A$

2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

3) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

4) $A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$

Démonstration :

1) cf non (non P) $\equiv$ P

2) Soit $x \in E$, on a :

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \in \left\{ t \in E \;\middle|\; t \notin A \cup B \right\}$$

$$\iff x \notin A \cup B$$

$$\iff \text{non}(x \in A \cup B)$$

$$\iff \text{non}(x \in A \text{ ou } x \in B)$$

loi de De Morgan $\iff \text{non}(x \in A) \text{ et } \text{non}(x \in B)$

$$\iff x \notin A \text{ et } x \notin B$$

$$\iff x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B}$$

$$\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

Donc $\overline{A \cup B} \iff \overline{A} \cap \overline{B}$

3) même démo

4) cf $P \Rightarrow Q \equiv \text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$

On a $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$

$$\iff \forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow x \in B$$

par contraposition $\iff \forall x \in E,\ x \notin B \Rightarrow x \notin A$

$$\iff \forall x \in E,\ x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$$

$$\iff \overline{B} \subset \overline{A}$$

III, Construction d'ensembles

1) Produit cartésien

Définition : Soient x et y des objets mathématiques

On appelle couple (x, y) la donnée conjointe et dans cet ordre de x et y.

. De même, on définit les triplets, les quadruplets (x, y, z, t), etc...

. Si $n \in \mathbb{N}^*$ **et si** $x_1, x_2, \dots x_n$ sont des objets math on note $(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ et on appelle n-uplet la donnée conjointe et dans cet ordre des x_i

Remarque :

. $(1,2) \neq (2,1)$ car les éléments ne sont pas dans le m̃ ordre

. ⚠ $\{1,2\} = \{2,1\}$

. Un ensemble de cardinal 1 est appellé un singleton

On a si E est un ensemble :

$a \in E \iff \{a\} \subset E$

. $(1,1) \neq 1$

mais $\{1,1\} = \{1\}$

. Soient a, b, c, d des objets

Alors on a

$$(a,b) = (c,d) \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

. x est appelée $1^{ère}$ coordonnée de (x,y), etc...

. Ainsi, on a $(x_1, \dots x_n) \neq (0, \dots 0)$ ← le n-uplet nul

$$\Updownarrow$$

$$\exists i \in [\![1,n]\!] : x_i \neq 0$$

On dit alors que les x_i sont non tous nuls

⚠ on dit qu'ils sont tous non nuls ssi $\forall i \in [\![1,n]\!] ; x_i \neq 0$

Rq : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

alors $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots 0) \iff \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$

On a

. $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots b_n)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!] ,\ a_i = b_i$$

. On notera également

$(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]} := (a_1, \dots, a_n)$ ou $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$

Définition : Soit E et F des ensembles. E croix F

Le produit cartésien de E par F, noté $\overbrace{E \times F}$

est défini par :

$$E \times F := \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \in E \text{ et } y \in F \right\}$$

Exemples :

Calculer

$\{a, b\} \times \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{(a,\alpha), (a,\beta), (a,\gamma), (b,\alpha), (b,\beta), (b,\gamma)\}$

⚠ En général : $E \times F \neq F \times E$: ce n'est pas commutatif

On prend $E := \{1\}$ et $F := \{2\}$

alors, on a $E \times F = \{(1, 2)\}$ et $F \times E = \{(2, 1)\}$

- ⚠ Si E est un ensemble, on a $\emptyset \times E = \emptyset = E \times \emptyset$
- Si E est un ensemble : $E = \emptyset \Leftrightarrow \text{card } E = 0$
- Prop : Si E et F sont finis, alors
  1) $E \times F$ est fini
  2) $\text{card}(E \times F) = (\text{card } E) \times (\text{card } F)$

  } démo + tard
- Prop : Soient E et F des ensembles

  Soient $A \subset E$ et $B \subset F$

  alors $A \times B \subset E \times F$

Notation : Si E est un ensemble, on note $E^2 := E \times E$, c'est le carré cartésien

Généralisation :

- $E \times F \times G = \{(x, y, z) \mid x \in E, y \in F, z \in G\}$

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, on note

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \,\middle|\, \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i \right\}$$

On note également

$$\prod_{i=1}^{n} E_i := E_1 \times \dots \times E_n$$

ie on a $\prod_{i=1}^{n} E_1 = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \;\middle|\; \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i \right\}$

Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si E est un ensemble, on note :

$$E^p := \underbrace{E \times E \dots \times E}_{p \text{ fois}}$$

ie $E^p = \prod_{i=1}^{p} E$

<u>Rq</u> : En général, $E \times (F \times G) \neq (E \times F) \times G$

<u>Démo</u> : On donne un contre-exemple :

On prend : $E := \{1\}$, $F := \{2\}$ et $G := \{3\}$

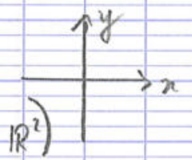
On a $E \times (F \times G) = \{ (1, (2, 3)) \}$

$$(E \times F) \times G = \{ ((1, 2), 3) \}$$

Rq : On a $|E| = |F| = |G| = 1$ donc $|E \times F| = 1$ et $|(E \times F) \times G| = 1$

<u>Exemples</u>

. $\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \}$ représenté :



. $[0, 1] \times \mathbb{R}$

Déjà, on a $\left.\begin{array}{l} [0, 1] \subset \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \end{array}\right\}$ donc $[0, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$

On dessine :

. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots x_n) \mid \forall i, x_i \in \mathbb{R}\}$

2) Ensemble des parties

Déf: Soit E un ensemble
L'ensemble des parties de E notée $\mathcal{P}(E)$ est défini par :
$\mathcal{P}(E) := \{A \text{ ensemble} \mid A \subset E\}$ A est une partie de E

Exemples:

. Prenons $E = \{a, b\}$
Alors, on a $\mathcal{P}(E) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$

. Prenons $E = \{a, b, c\}$
alors, on a :
$$\mathcal{P}(E) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b,c\}, \emptyset, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

Prop: Soit E un ens. fini
Alors : 1) $\mathcal{P}(E)$ est fini
2) $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

Démo: Soit E un ens. fini
On note $n := |E|$
On distingue deux cas
. 1er cas: $n \geqslant 1$ (ie $E \neq \emptyset$)
On écrit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$
Alors, pour construire une partie A de E, on procède comme suit :
1°) On décide si $x_1 \in A$ ou $x_1 \notin A$: on a 2 choix
2°) de m̂ pour x_2 : on a 2 choix
⋮
3°) pour x_n : on a 2 choix

Au total, on a donc 2^n choix

De plus, ce procédé de construction de $A \in \mathcal{P}(E)$ est exhaustif et sans redondance

On a donc $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$

. si $n = 0$ alors $E = \emptyset$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$: on a $A \subset \emptyset$

Donc $A = \emptyset$ (sinon : soit $a_0 \in A$ comme $A \subset \emptyset$, on a $a_0 \in \emptyset$ absurde)

donc $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Dans tous les cas : $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$

Rq : l'ensemble $\emptyset$ ne possède qu'une seule partie

ie $\mathcal{P}(\emptyset)$ est un singleton. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

⚠ $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$

Exemple :

. Si A est l'ens des intervalles de $\mathbb{R}$ de bornes 0 et 1, alors

on a $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$

ie $\forall I \in A$, $I \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

ie $\forall I \in A$, $I \subset \mathbb{R}$

A retenir !!!

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

Fait : Soit E un ensemble, alors 1) $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$

2) $E \in \mathcal{P}(E)$

exo : 1) Mq $E = F \iff \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$

2) Mq $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$

. ⚠ $[0,1] \notin \mathbb{R}$

$\{0,1\} \notin \mathbb{R}$

$\{1\} \notin \mathbb{R}$

IV, Familles de parties

Dans tout ce qui suit, I est un ensemble fixé non vide

1) Notion de famille

Def: Une famille, indexée par I, est la donnée, pour tout $i \in I$, d'un "objet" x_i. On la note $(x_i)_{i \in I}$

. I est appelé l'ensemble d'indices de la famille $(x_i)_{i \in I}$

Exemple: Quand $I = [\![1, n]\!]$, une famille indexée par I est appellée un n-uplet

Ex: On prend $n = 4$

On considère $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 8$, $x_4 = -5$

On a ainsi défini la famille (x_1, x_2, x_3, x_4)

notée $(x_i)_{i \in [\![1,4]\!]}$ ou $(x_i)_{i \in I}$

. Soit E un ensemble

L'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I}$ telles que $\forall i, x_i \in E$ est notée E^I

ie on a :

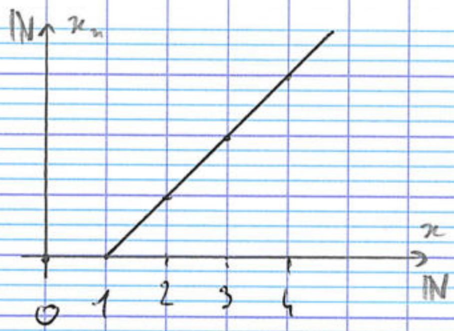
$$E^I = \left\{ (x_i)_{i \in I} \;\middle|\; \forall i \in I, x_i \in E \right\}$$

est l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I

Concrètement, pour définir une famille $(x_I)_{i \in I}$: pour chaque $i \in I$, on pose un objet x_i

Exemples: . On prend $I := \mathbb{N}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n := \begin{cases} n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$



C' est $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ → ens. des indices

ens des valeurs

? Qu' est-ce que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$?

Qu' est ce que que $\mathbb{N}^2$?

- On prend $I := \mathbb{N}$
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n := 2n$
  On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

- On prend $I := [\![1;5]\!]$
  Pour $n \in I$, on pose $x_n := \sqrt{n}$
  On a $(x_n)_{n\in I} \in \mathbb{R}^{[\![1;5]\!]}$
  On écrira $(x_n)_{n\in[\![1;5]\!]} \in \mathbb{R}^{[\![1;5]\!]}$
  Ou : $(x_n)_{1\leqslant n\leqslant 5} \in \mathbb{R}^5$
  $(x_n)_n$ est un 5-uplet

? A-t-on $(x_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{[\![1;5]\!]}$?

- On prend $I := \mathbb{N}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n := (1+2i)^n$
  On a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

- On prend $I := \mathbb{N}^*$. On pose $z_1 := 4{,}2$
  Et on considère la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$
  telle que $\forall n \geqslant 1$, $z_{n+1} = 3z_n^2 - 10 + i$

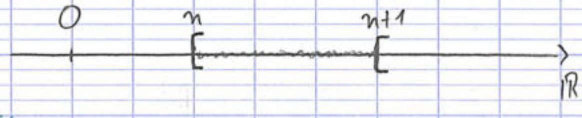
On dit qu'on a défini la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>par récurrence</u>
On a $(y_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$

. !! $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$

. On prend $I := \mathbb{N}$ et $x_n :=$ Anouk pour tout n
On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in PCSI3^{\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n \in \{Anouk\}^{\mathbb{N}}$

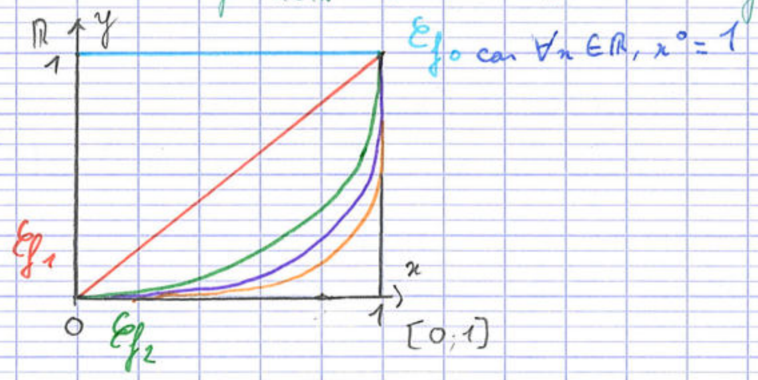
. On prend $I := \mathbb{R}$
. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $x_a := a^2$
On a $(x_a)_{a\in\mathbb{R}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

. On prend $I := \mathbb{N}$
pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := [n ; n+1[$
On a $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$

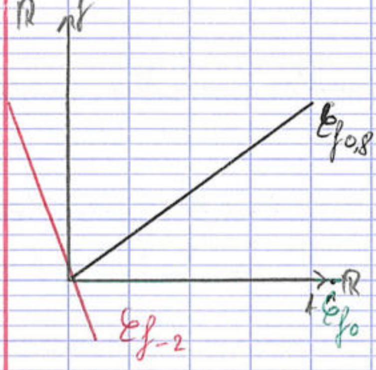


. !! On prend $I : \mathbb{N}$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions



- On prend $I := \mathbb{R}$
  Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose : $f_a : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto at \end{array}$



- $I := \mathbb{R}^2$
  $f_{a,b} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto at + b \end{array}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

L'ensemble des fcts de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ie définies sur tout $\mathbb{R}$) est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

donc $(f_{a,b})_{a,b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^{\mathbb{R}^2}$

- On fixe $n \in \mathbb{N}^*$
  On considère $I := \mathcal{P}(⟦1, n⟧)$
  Pour $A \in I$, on pose $\begin{cases} x_A := \sum_{a \in A} a & \text{si } a \neq 0 \\ x_\emptyset := 0 \end{cases}$

  On a $(x_A)_{A \subset ⟦1,n⟧} \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}(⟦1,n⟧)}$

__Fait :__ Soient E et F des ensembles,
alors on a : $E \subset F \Rightarrow E^I \subset F^I$

__Définition :__ Une suite est une famille indexée par $\mathbb{N}$

__ex :__ suite réelle, suite d'entiers, suite de fonctions, suite complexe, etc

Plus généralement, on s'autorise comme ensembles d'indices $\mathbb{N}^*$ et $[\![n_0 ; +\infty [\![$ où $n_0 \in \mathbb{Z}$

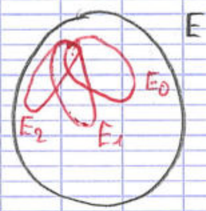
2) Intersection et union d'une famille de parties

Définition :

Soit E un ensemble

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E

ie soit $(E_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$



$(I = \mathbb{N})$

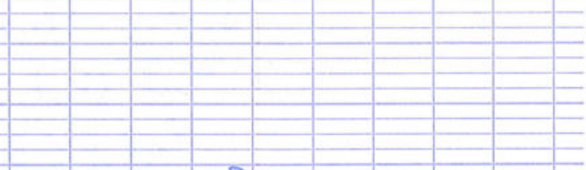
L'union des E_i est :

$$\bigcup_{i \in I} E_i := \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists i \in I : x \in E_i \right\}$$

L'intersection des E_i est :

$$\bigcap_{i \in I} E_i := \left\{ x \in E \;\middle|\; \forall i \in I, x \in E_i \right\}$$

Exemples :



. On considère pour $n \in \mathbb{N}$,

$I_n := [n ; +\infty[$

On a :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = [0 ; +\infty[$$

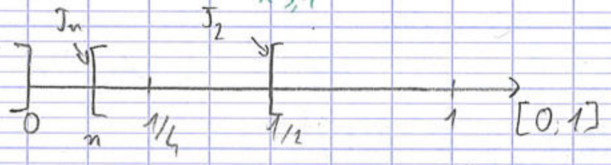
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$$

· Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n :=]0; \frac{1}{n}[$

On a :

$$\bigcap_{n \geq 1} J_n = \emptyset$$

$$\bigcup_{n \geq 1} J_n =]0; 1[$$



? $\hat{m}$ question avec $K_n = [0; \frac{1}{n}[$ $\quad n \geq 1$

<u>Fait</u> : Soit E un ensemble

Soit $(E_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$

Soit $F \subset E$

Alors, on a :

1) $$\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \cup F = \bigcap_{i \in I} (E_i \cup F)$$

2) $$\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) \cap F = \bigcup_{i \in I} (E_i \cap F)$$

$$(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots) \cap F = (E_1 \cap F) \cup (E_2 \cap F) \cup (E_3 \cap F) \cup \dots$$

? On fixe $i_0 \in I$

$$\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \cap E_{i_0} = \, ?$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) \cap E_{i_0} = \, ? \quad \text{etc}$$

3) Partitions

Définition : Soit E un ensemble

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E

ie $(E_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$

On dit que $(E_i)_{i\in I}$ est une partition de E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

. $\bigcup_{i\in I} E_i = E$

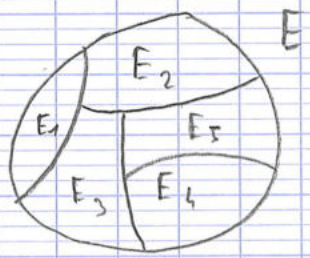
. "les E_i sont deux à deux disjoints"

$\forall i,j \in I,\ i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$

. $\forall i \in I,\ E_i \neq \emptyset$

Idée "on a découpé E en plusieurs parties"

ex : la famille des départements est une partition de la France



ex : $([n; n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$

? Ex de partition de $]0,1[$?

Rq : 2 à 2 disjoints $\Leftrightarrow \forall i,j \in I,\ i \neq j \Rightarrow E_i \subset \overline{E_j}$

découverte de la relativité restreinte : expérience qui n'a pas fonctionné

unifier la relativité générale et théorie quantique : théorie du tout

4) Cardinal de E^I

Proposition : Soient E et I des ensembles finis. Alors :

1) E^I est fini
2) On a $|E^I| = |E|^{|I|}$

Démo :

Pour construire un élément $(x_i)_{i\in I}$ de E^I on procède comme suit en notant :
$I = \{i_1, \dots, i_p\}$ où $p := |I|$, et en notant $n := |E|$:

1) on choisit $x_{i_1} \in E$ on a n choix possibles
2) on choisit $x_{i_2} \in E$, on a n choix possibles

$\vdots$

p) on choisit $x_{i_p} \in E$, on a n choix

Comme ce procédé de construction est exhaustif et sans redondance

On a : $$|E^I| = \underbrace{n \times n \times n \times \dots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p = |E|^{|I|}$$