Chapitre 29 : Espaces euclidiens

Rappels de topologie :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev

Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ tq :

1) Inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in E, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

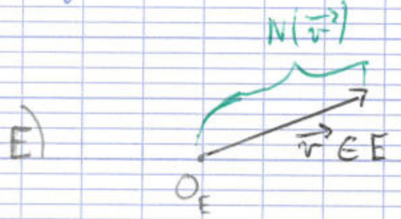
2) homogénéité

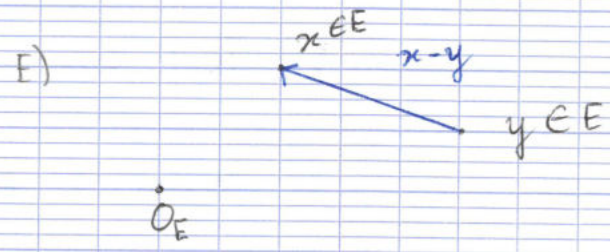
$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

3) Séparation

$$\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E$$

On peut mesurer ainsi la longueur d'un vecteur, également la distance entre deux points





vecteur = but - origine ou utiliser Chasles

Déf : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et soit N une norme sur E

Soient $x, y \in E$

La distance entre x et y est $d(x,y) := N(x-y)$

Rappel : on a déf sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ l'assertion " x est ε-proche de y "

On peut faire la même chose si on a une norme

Exemples de normes :

1) $\mathbb{R}^2$ et $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) $\mathbb{R}^3$ et $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3) Si $N(\cdot)$ est une norme sur E et si $\lambda > 0$,
alors $\lambda \cdot N(\cdot)$ est encore une norme sur E
donc, il n'y a pas du tout unicité

4) + compliqué sur $\mathbb{R}^2$

- $\left|\left|\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|\right|\right| := \sqrt{3x^2 + 42y^2}$
- $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty := \max\left(|x|, |y|\right)$
- $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 := |x| + |y|$

5) Tout ceci se généralise immédiatement à $\mathbb{R}^n$

6) Norme 3 sur $\mathbb{R}^2$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_3 := \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$$

Rq : si on pose $\left|\left|\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|\right|\right|_3 = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$
alors on a $\left|\left|\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|\right|\right| = 0$: ce n'est pas une norme
cf aussi x^a n'est déf que si $x > 0$ qd $a \in \mathbb{R}$

7) $\|\cdot\|_\infty$ sur les espaces de fonctions $E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$
On sait que si $f \in E$ alors f est bornée

On pose $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$

alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E

8) $\|\cdot\|_1$ sur les fonctions

On pose $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$

et $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\, dt}$

Alors, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes

<u>Déf</u>: Un espace vectoriel normé (evn) est la donnée d'un $\mathbb{R}$-ev E et d'une norme $\|\cdot\|$ sur E

Dans un evn, on peut étudier les questions :

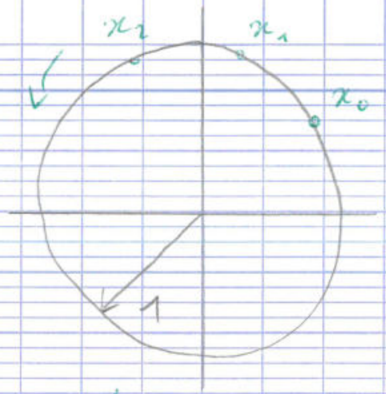
- proximité
- limite
- continuité
- dérivabilité
- série
- etc.

On dit qu'on fait de la topologie : science de l'espace

<u>Déf</u>: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn
Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$
Soit $\ell \in E$
On dit que $(x_n)_n$ converge vers ℓ (pour $\|\cdot\|$) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$$

On note $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} \ell$



$$x_k := \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{10}\right) \right)$$

On cherche une suite dans $\mathbb{R}^2$ qui tourne autour du cercle.

$(1, i)$ $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$ $\longleftrightarrow$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ base de $\mathbb{R}^2$

On a $\forall k, \ \|x_k\|_2 = 1$

donc $\|x_k\|_2 \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$

mais on n'a pas $x_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rq : si N_1 et N_2 sont des normes sur E et si $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$, $l \in E$ alors en général :

$$x_n \xrightarrow{N_1} l \not\Rightarrow x_n \xrightarrow{N_2} l$$

Ctr-exemple :

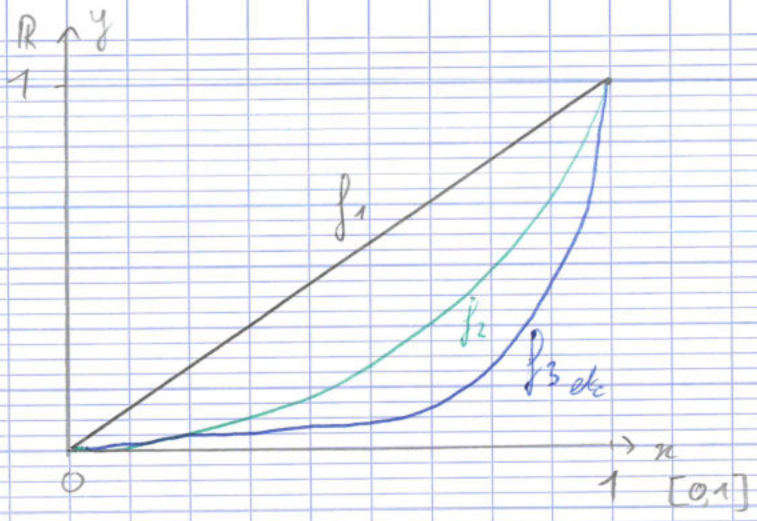
On se place sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

On prend $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$

On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E

ie la suite de fonctions déf par :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n \quad \text{si } n \geq 0$$



1) Mq $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \tilde{0}$

Rq : $x_n \to \ell \iff \|x_n - \ell\| \to 0$

↳ $E, \|\cdot\|$ ↳ $\mathbb{R}$

Soit $n \geq 0$ On calcule :

$$\|f_n - \tilde{0}\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

Ainsi, $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \tilde{0}$

2) Calculons $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)|$

$$= \sup_{t \in [0,1]} t^n$$

Or, $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc le sup est atteint en 1

donc $\|f_n\|_\infty = 1$

donc $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty \not\to 0$

ie $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\to} \tilde{0}$

3) $\nexists \, g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$ (sno)

Rq : Théorème d'équivalence des normes en dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim. finie

Soient N_1 et N_2 des normes sur E

Alors :

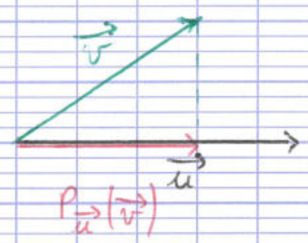
$\forall (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$, $x_n \xrightarrow{N_1} l \iff x_n \xrightarrow{N_2} l$

$\forall l \in E$

Introduction :

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ des vecteurs du plan



On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \| p_{\vec{u}}(\vec{v}) \| \cdot \| \vec{u} \| \cdot \pm 1$

selon le sens relatif des vecteurs

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

analytique : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Dans $\mathbb{R}^3$, on a la même chose, le pt de vue analytique est le ⊕ simple

Sinon, on dit : 2 vecteurs de l'espace définissent un plan, on se ramène au cas précédent

Que permet le produit scalaire ?

On peut dire si $\vec{v} \perp \vec{u}$
alors que, en général, dans un ev on n'a pas cette notion
Donc si j'ai un produit scalaire → je peux parler d'orthogonalité.
On a mieux que $\vec{u} \perp \vec{v}$ ↗ oui ↘ non

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$ et
- si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$
- si $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est maximal alors ça veut dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et vont dans le même sens

Notion d'aller dans le m̂ sens.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ dans $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$

Avec un produit scalaire, on aura une norme

I, Produits scalaires normes euclidiennes

1) Produit scalaire

Déf : Soit E un $\mathbb{R}$-ev
Soit $p : E^2 \to \mathbb{R}$
On dit que $p(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire sur E ssi
1) $p(\cdot,\cdot)$ est symétrique
ie $\forall x, y \in E,\ p(x,y) = p(y,x)$

2) $p(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire ie linéaire par rapport à chaque variable

ie a) linéarité 1/1 à la 1ère variable
$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall z \in E,$
$p(x+\lambda y, z) = p(x,z) + \lambda p(y,z)$

et b) linéarité 1/1 à la 2nde variable
$\forall x \in E, \forall y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
$p(x, y+\lambda z) = p(x,y) + \lambda p(x,z)$

3) $p(\cdot,\cdot)$ est positive
ie $\forall x \in E, p(x,x) \geq 0$

4) $p(\cdot,\cdot)$ est définie
ie $\forall x \in E, p(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

Notation : Au lieu de $p(x,y)$ si p est un produit scalaire (p.s) on note $(x|y)$ ou $\langle x|y \rangle$ ou $\langle x,y \rangle$ ou $x \cdot y$

Remarques :
. Grâce à la symétrie, on a 2.a) $\Leftrightarrow$ 2.b) $\Leftrightarrow$ 2)
donc en pratique, on a juste besoin de vérifier la symétrie et la linéarité 1/1 à l'1 des variables

. Il y a une grande $\neq^{ce}$ entre linéarité et bilinéarité
Si $p(\cdot,\cdot) : E^2 \to \mathbb{R}$ est linéaire et si $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$
alors $p(\lambda x, \lambda y) = p(\lambda(x,y)) = \lambda p(x,y)$
si $y, x, z, w \in E$, alors on a :
$p(x+y, z+w) = p((x,z) + (y,w))$
$= p(x,z) + p(y,w)$

Si $p(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire et si $x, y, z, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

a) $p(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, p(x, \lambda y) = \lambda(\lambda \cdot p(x,y))$
$= \lambda^2 \cdot p(x, y)$

b) $p(x + y, z + w) = p(x, z + w) + p(y, z + w)$
$= p(x, z) + p(x, w) + p(y, z) + p(y, w)$

Exemples :

On considère $E = \mathbb{R}$

On cherche $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes

Rappel : les applications linéaires $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont les $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto \alpha x + \beta y$

On prend $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto xy$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

1) $p(x, y) = xy = yx = p(y, x)$

2) $p(x + \lambda y, z) = (x + \lambda y) z = xz + \lambda yz = p(x,z) + \lambda p(y,z)$

3) $p(x, x) = x^2 \geq 0$

4) $p(x, x) = 0$ alors $x^2 = 0$ donc $x = 0$

Déf :

- Un ev préhilbertien réel est un couple $(E, (\cdot|\cdot))$ où E est un $\mathbb{R}$-ev et où $(\cdot|\cdot)$ est un ps

Rq : ce nom vient de David Hilbert qui a introduit les espaces de Hilbert (réels ou complexes) qui sont un peu plus compliqués. Les espaces préhilbertiens réels vérifient la moitié des axiomes des espaces de Hilbert

- Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel $(E, (\cdot|\cdot))$ où E est de dimension finie.

2) Exemples

a) Sur $\mathbb{R}^n$

L'application $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

démo :

. symétrie :

On a $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$

. bilinéarité

Soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

On a $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right)$

$$= \left(\begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) z_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \lambda y_i z_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$

$$= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) + \lambda \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right)$$

. positif

Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

. défini

Osq $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$. Or $\forall i, x_i^2 \geq 0$

donc $\forall i, x_i = 0$ donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}$

Rq : on retrouve la formule analytique du p.s usuel des vecteurs du plan / de l'espace

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$$

Ce produit scalaire est appelé p.s canonique de $\mathbb{R}^n$ (ou $M_{n,1}(\mathbb{R})$)
On le note $(\cdot|\cdot)_{cano}$

<u>Prop</u> !!
Soient $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$(X|Y)_{cano} = X^T Y$$

<u>démo</u> : Soient $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
On écrit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

où $\forall i$, $x_i \in \mathbb{R}$ et $y_i \in \mathbb{R}$

On a $(X|Y)_{cano} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Et $X^T Y = (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

par définition du produit matriciel.

Ainsi, $(X|Y)_{cano} = X^T Y$

Intérêt de cette formule :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{ie } x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

un peu compliqué car c'est une somme
pt de vue + simple : $X^T Y$

b) Sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$

Soient $a < b$ des réels
On pose $E := \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$
On définit pour $f, g \in E$

$$(f|g) := \int_a^b f(t) g(t) \, dt$$

C'est l'analogue continu du p.s précédent

Fait : $(.|.)$ est un ps sur E

démo : Soient $f, g, h \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

. On a $(f|g) = \int_a^b fg = \int_a^b gf = (g|f)$

. On calcule $(f + \lambda g | h) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) h(t) \, dt$

$$= \int_a^b f(t) h(t) + \lambda g(t) h(t) \, dt$$

par bilinéarité de la multiplicaO ds $\mathbb{R}$

par linéarité de l'$\int$ $\quad = \int_a^b f(t) h(t) \, dt + \lambda \int_a^b g(t) h(t) \, dt$

$$= (f|h) + \lambda (g|h)$$

- On a $(f|f) = \int_a^b f^2(t)\,dt$

Par positivité de l'intégrale, on a bien $(f|f) \geq 0$

- Osq $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$

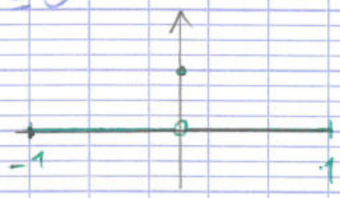
Prop :

$$\left.\begin{array}{l} i)\ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue} \\ ii)\ \varphi \geq 0 \\ iii)\ \int_a^b \varphi(t)\,dt = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \tilde{0}$$

⚠ (i) est nécessaire car on peut considérer

$$\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

φ n'est pas continue en 0



On a $\varphi \geq 0$

On a $\int_{-1}^1 \varphi(t)\,dt = 0$ mais $\varphi \neq \tilde{0}$

Bilan : $(f|f) = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(t) = \tilde{0}$

$$\Downarrow$$

$$f^2 = \tilde{0} \Rightarrow f = \tilde{0}$$

c) En dimension finie

Soit E evf

But : construire un ps sur E

On se ramène à $\mathbb{R}^n$

R^x : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(x_1 e_1 + \dots x_n e_n) | (y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum x_i y_i$$

Soient $x, y \in E$

On note $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$

On définit : $(x | y)_{\mathcal{B}} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)^T \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$

ie $(x | y)_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}(x)_i \cdot \mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}(y)_i$

(?) Mq $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{B}}$ est un ps sur E

d) Sur $M_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère :

$$(\cdot | \cdot) : M_n(\mathbb{R}) \cdot M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(M, N) \longmapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{ij} \, n_{ij}$$

Ici, l'idée c'est d'identifier $M_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$ et de considérer le ps usuel

Autrement dit, on a considéré

$(\cdot|\cdot)_{\mathcal{B}}$ sur $M_n(\mathbb{R})$ où $\mathcal{B} = (E_{ij})_{i,j}$ est la

base canonique de $M_n(\mathbb{R})$

Ainsi, d'après c), cette application $(\cdot|\cdot)$ est un ps.

Prop : Soient $M, N \in M_n(\mathbb{R})$

Alors :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}\, n_{ij} = \mathrm{tr}(M^T N)$$

démo : Soient $M, N \in M_n(\mathbb{R})$

On calcule :

$$\mathrm{tr}(M^T N) = \sum_{i=1}^{n} (M^T N)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\sum_{j=1}^{n} M^T_{ij} N_{ji}}^{(M^T N)_{ii}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji} N_{ji}$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ji}\, n_{ji}$$

échange des noms des indices $\displaystyle = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}\, n_{ij}$

Rq : On retrouve la même dualité de pt de vue : un pt de vue concret et un abstrait

Ex : $M_2(\mathbb{R})$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right) = 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot(-2) + 4\cdot(-1)$$

$$= 7$$

(?) Etudier l'injectivité de $\mathcal{B} \mapsto (\cdot|\cdot)_{\mathcal{B}}$

Rq : tout ceci marche pour $M_{n,p}(\mathbb{R})$

Ex : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1\cdot 1 + 2(-1) + 3\cdot 0 + 4\cdot 2 + 5(-1) + 6 = 8$

On dispose si $M, N \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ de $tr(\underbrace{M^T N}_{M_{p,p} \text{ (matrice carrée)}})$

Rq $tr(M^T N) = tr((M^T N)^T) = tr(N^T M^{T^T}) = tr(N^T M)$

e) Sur $E := \mathbb{R}[X]$

On a plein de ps $\neq$

. $(P|Q)$ défini par

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \middle| \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \right) = \sum_{i=0}^{\min(n,m)} a_i b_i$$

Ex : $\left(1 + X + \frac{X^2}{2} \middle| 1 - 2X + X^2\right) = 1\cdot 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

. $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$

Ex : $(1+X | X^2 - 2) = \int_0^1 t^2 - 2 + t^3 - 2t\,dt$

$\int_0^1 t^n = \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}$

$= -\frac{29}{12}$

. Si $a < b$:

$$(P|Q) := \int_a^b P(t)Q(t)\,dt$$

Ce ps est complètement différent

si $a < b$ et $p(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue

$$(P|Q) = \int_a^b P(t)\,Q(t)\,p(t)\,dt$$

? Mq c'est un ps

Ex : sur $\mathbb{R}[X]$

$$(P|Q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(t)\,Q(t)\cos(t)\,dt$$

ou $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,dt$

f) Sur $E := \mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on regarde

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(a)\,Q^{(i)}(a)$$

est un p.s.

démo :

. symétrique : ok

. bilinéaire : ok

. positif : $(P|P) = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(a)^2 \geq 0$

. défini : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $(P|P) = 0$

ie $\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(a)^2 = 0$

Mq $P = 0$

Déjà, on a $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P^{(i)}(a) = 0$

démo bof : on écrit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $\forall i, a_i \in \mathbb{R}$

$$\text{on a } \sum_{i=0}^{n} a_i a^i = 0 \quad (1)$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^{n} a_i i a^{i-1} = 0 \quad (2)$$

$$\vdots \quad \sum_{i=2}^{n} a_i i(i-1) a^{i-2} = 0 \quad (3)$$

On aimerait déduire de ces équations que nécessairement $\forall i, a_i = 0$

! Réinterpréter (1), (2), (3), ... matriciellement puis étudier la matrice (mq elle est inversible)

mieux : d'après la formule de Taylor polynomiale

$$P = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!} \cdot (X-a)^i$$

donc $P = 0$

Rq : on pourrait faire la m̂ chose sur $\mathbb{R}[X]$

$$(P|Q) = \text{"} \sum_{i=0}^{\infty} P^{(i)}(a)\, Q^{(i)}(a) \text{"}$$

$\downarrow$

en vrai c'est une somme finie $\min(\deg P, \deg Q)$

c'est $\sum_{i=0}^{\min(\deg P, \deg Q)} P^{(i)}(a)\, Q^{(i)}(a)$

3) Norme associée à un produit scalaire

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un epr (espace préhilbertien réel)

<u>Notation</u>: Si $x \in E$, on appelle norme de x (associée à $(\cdot|\cdot)$) le réel positif
$$\|x\| := \sqrt{(x|x)}$$

On dit que cette norme est euclidienne.
Une norme euclidienne est une norme qui provient d'un produit scalaire.

Ex: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ ou sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ ne sont pas euclidiens

<u>Déf</u>: Soit $x \in E$. On dit que x est unitaire ssi $\|x\| = 1$

<u>Réflexe calculatoire</u> !!!

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

démo :

On calcule

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y)$$
$$= (x \mid x+y) + (y \mid x+y)$$
$$= \underbrace{(x \mid x)}_{\|x\|^2} + \underbrace{(x \mid y) + (y \mid x)}_{2(x \mid y) \text{ par sym.}} + \underbrace{(y \mid y)}_{\|y\|^2}$$

Rq : On voit que la norme euclidienne $\|\cdot\|$ se manie bien lorsqu'elle est élevée au carré

Généralisation :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ Alors :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (x_i \mid x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \mid x_j)$$

démo : On écrit

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

astuce

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i \mid x_j)$$

$\mathbb{R}^x$: $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \middle| \sum_{j=1}^{n} y_j \right)$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i \mid y_j)$$

Ceci est un fait purement bilinéaire

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i=j}} (x_i \mid x_j) + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} (x_i \mid x_j)$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i \mid x_i) + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i<j}} (x_i \mid x_j) + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i>j}} (x_i \mid x_j)$$

et $$= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i<j}} (x_i \mid x_j) + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ j>i}} (x_j \mid x_i)$$

en intervertissant le nom des var et par sym.

Exemples de normes

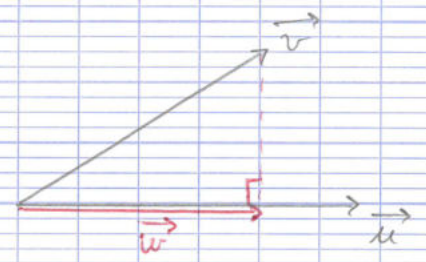
. Sur $\mathbb{R}^n$. $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

si on prend $(X \mid Y)_{cano} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

on retrouve la norme classique.

4) Inégalité de Cauchy-Schwarz !!

Regardons la sit. canonique dans $\mathbb{R}^2$ ie le p.s. lycée



$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{w}\|\cdot\|\vec{u}\|$

Or, clairement, on a $\|\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\|$

Bilan : $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

Théorème : Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un eps

a) inégalité :

$$\boxed{\forall x, y \in E, \ |(x|y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|}$$

b) égalité ds l'inégalité

Soient $x, y \in E$. Alors

$$|(x|y)| = \|x\|\cdot\|y\| \iff x \text{ et } y \text{ colinéaires}$$

Rappel : x et y colinéaires ssi : $\exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$
ou $\exists \mu \in \mathbb{R} : y = \mu x$

mais $\mathbb{R}^*$: si $x \neq 0$, alors :

y colinéaire à $x \iff y \in \mathrm{Vect}(x)$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : y = \lambda x$

Démo : Astuce : on transforme notre pb d'ega en question d'analyse réelle
ie de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Soit $t \in \mathbb{R}$
On considère $\|x + ty\|^2$

On fonctionnalise, on considère
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \|x + ty\|^2$$

Première rq : $\forall t, f(t) \in \mathbb{R}_+$
2^{eme} rq ! : f est une fct trinôme du 2^{nd} degré !

En effet, si $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= (x + ty \mid x + ty) \\ &= \dots \\ &= \|x + ty\|^2 \quad R^x \text{ calculatoire} \\ &= \|x\|^2 + 2(x \mid ty) + \|ty\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t(x \mid y) + t^2 \|y\|^2 \\ &= a t^2 + b t + c \end{aligned}$$

où on a posé $a := \|y\|^2$, $b := 2(x \mid y)$, $c := \|x\|^2$
On suppose $a \neq 0$
On a $f(t) = a t^2 + bt + c$
et $\forall t, f(t) \geq 0$
On sait que $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$

ie $(2(x \mid y))^2 - 4\|y\|^2 \cdot \|x\|^2 \leq 0$
donc $(x \mid y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$
donc $|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

cas $\|y\|^2 = 0$: on a $y = 0$

donc on a bien $\underset{\substack{\|\\0}}{|(x|y)|} \leq \|x\| \cdot \underset{\substack{\|\\0}}{\|y\|}$

b) Mq $|(x|y)| = \|x\| \cdot \|y\| \iff x$ et y colinéaires

Si $y = 0$: ok

Osq $y \neq 0$

$\Leftarrow$ Osq x et y sont colinéaires.
Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda y$

On a $(x|y) = \lambda (y|y) = \lambda \|y\|^2$

donc $|(x|y)| = |\lambda| \cdot \|y\|^2$

$$= (|\lambda| \cdot \|y\|) \cdot (\|y\|)$$
$$= \|\lambda y\| \cdot \|y\|$$
$$= \|x\| \cdot \|y\|$$

$\Rightarrow$ Osq $|(x|y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ $(*)$

On considère encore $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto \|x + ty\|^2$

On a $\forall t,\ f(t) = \|y\|^2 t^2 + 2(x|y)t + \|x\|^2$

D'après $(*)$ $\Delta := (2(x|y))^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 0$

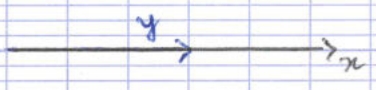
On pose $\alpha := \dfrac{-2(x|y)}{2\|y\|^2}$

On sait que $f(\alpha) = 0$ ie $\|x + \alpha y\|^2 = 0$

Donc, $x + \alpha y = 0_E$

R^x
$\|x\|^2 = 0_E$ alors $x = 0_E$ ie $x = -\alpha y$
donc x et y sont colinéaires

Rq : On pouvait mq :
$\forall x, y \in E$, $(x|y) = \|x\| \cdot \|y\|$
$\Updownarrow$
x et y sont positive^t colinéaires
ssi $\exists \lambda \geq 0 : x = \lambda y$
ou $\exists \mu \geq 0 \ y = \mu x$

Dessin : 

sont ≥ 0 - colin.

5) Cauchy - Schwarz en situation

a) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
$y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$
Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$

$$\left|\int_a^b f(t) g(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}$$

Remarque : Si E $\mathbb{R}$-ev et si $p(\cdot,\cdot) : E^2 \to \mathbb{R}$ est bilinéaire, symétrique, positif mais pas forcément défini, on a encore Cauchy-Schwarz

ie $\forall x, y \in E$, $|p(x,y)| \leq \sqrt{p(x,x)} \cdot \sqrt{p(y,y)}$

6) La norme est une norme

Prop : $(E, (\cdot|\cdot))$ eps
Alors on a :

1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

2) $\forall x, y \in E$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$

démo : Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1) On a $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x | \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)} = |\lambda| \sqrt{(x|x)} = |\lambda| \|x\|$

2) On a

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\overset{\mathbb{R}^\times}{=} \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

donc c $\sqrt{\cdot}$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3) Osq $\|x\| = 0$, on a donc $\sqrt{(x|x)} = 0$
donc $(x|x) = 0$ donc $x = 0_E$
car $(\cdot|\cdot)$ est définie

Rq : cas d'égalité ds l'inégalité Δ

Prop : Soient $x, y \in E$. Alors :

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$
$$\Updownarrow$$
x et y sont ≥ 0 - colinéaires

Démo : $\Uparrow$ Osq x et y ≥ 0 - colinéaires
On écrit f. en $x = \lambda y$ avec $\lambda \geq 0$

On a $\|x+y\| = \|\lambda y + y\| = \|(1+\lambda) y\|$
$= |1+\lambda| \, \|y\|$
$= (1+\lambda)\|y\|$ car $1+\lambda > 0$
$= \|y\| + \lambda \|y\|$
$= \|y\| + \|x\|$ car $\lambda \geq 0$

$\Downarrow$ Osq $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

donc $\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

$\|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$
$= \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$
donc $(x|y) = \|x\| \cdot \|y\|$

On a x et y sont ≥ 0 - colinéaires

7) Identités de polarisation

Principe très intéressant :
Si je connais la norme euclidienne alors je connais le p. s.

Prop : Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un eps.
Soient $x, y \in E$. Alors :

a) $$(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

b) $$(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

démo :

a) à l'aide des R^x calculatoires

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

donc $$(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

b) ok

II, Orthogonalité

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un epr

1) Définitions

Soient : $x, y \in E$
F, G sev E
$A \subset E$ une partie de E
$(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E

On dit que :

a) x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $(x|y) = 0$

b) F et G sont orthogonaux et on note $F \perp G$ ssi
$\forall f \in F, \forall g \in G, (f|g) = 0$

c) On appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$
le sev de E défini par,
$A^\perp := \{ x \in E \mid \forall a \in A, (x|a) = 0$

démo de $A^\perp$ sev de E :

. 1ère démo :
Soient $x, y \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Mq $x + \lambda y \in A^\perp$
ie mq $\forall a \in A, (x + \lambda y | a) = 0$
Soit $a \in A$, on calcule
$(x + \lambda y | a) = \underbrace{(x|a)}_{\substack{= 0 \\ \text{car } x \in A^\perp}} + \lambda \underbrace{(y|a)}_{\substack{= 0 \\ \text{car } y \in A^\perp}} = 0$

Bilan : $A^\perp$ est stable par CL

On $A^\perp \neq \emptyset$ car $(0_E \mid a) = 0$ pour tout $a \in A$
et donc $0_E \in A^\perp$
CCL : $A^\perp$ sev E

. 2ème démo : pt de vue à retenir
Pour $a \in E$, on note

$$q_a : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x \mid a) \end{array}$$

On mesure la quantité de a contenue dans x.

Fait : q_a est linéaire ie $q_a \in L(E, \mathbb{R})$, ie $q_a \in E^*$

démo : $q_a(x + \lambda y) = (a \mid x + \lambda y)$
$= (a \mid x) + \lambda (a \mid y)$
$= q_a(x) + \lambda q_a(y)$

Prop : $q : \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ a \longmapsto q_a \end{array}$ est linéaire et injective

Démo : . linéarité
Soient $a, b \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$
Calculons pour $x \in E$
$q_{a+\lambda b}(x) = (a + \lambda b \mid x)$
$= (a \mid x) + \lambda (b \mid x)$
$= q_a(x) + \lambda q_b(x)$ et ce pour tout x
donc $q_{a+\lambda b} = q_a + \lambda q_b$
donc $\begin{array}{l} E \to E^* \\ a \mapsto q_a \end{array}$ est bien linéaire

. Injectivité
Calculons $\operatorname{Ker} \varphi$
Soit $a \in E$ tq $\varphi_a = 0_{E^*} \to L(E, \mathbb{R})$

ie $\forall x \in E, \varphi_a(x) = 0$
En particulier, $\varphi_a(a) = 0$
ie $(a|a) = 0$ ie $\|a\|^2 = 0$
donc $a = 0$

<u>Remarque :</u>
Soit E un $\mathbb{R}$-evf muni d'un p.s $(\cdot|\cdot)$
Alors : $\begin{array}{l} E \to E^* \\ a \mapsto \varphi_a \end{array}$ est un isomorphisme

ie $\forall f \in L(E,\mathbb{R}), \exists ! a \in E : f = \varphi_a$

démo : $\varphi : \begin{array}{l} E \to E^* \\ a \mapsto \varphi_a \end{array}$ est injective,
or $\dim E = \dim E^*$ (cas d'égale dimension)
donc φ est un isomorphisme.

Application : on prend $E := M_n(\mathbb{R})$
et $(M|N) = \operatorname{tr}(M^T N)$
On a ici :
$\forall f \in L(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}), \exists ! A \in M_n(\mathbb{R}) : \forall M \in M_n(\mathbb{R}), f(M) = \operatorname{tr}(AM) = (A^T|M) = \varphi_{A^T}(M)$

retour à la 2ème démo :

On a $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \mathrm{Ker}\,(q_a)$

En effet : si $x \in E$, on a

$$x \in A^\perp \iff \forall a \in A, (x \mid a) = 0$$
$$\iff \forall a \in A, x \in \mathrm{Ker}\,(q_a)$$

$$\iff x \in \bigcap_{a \in A} \mathrm{Ker}\,(q_a)$$

Ainsi, $A^\perp$ est une intersection de sev de E
donc, $A^\perp$ sev E

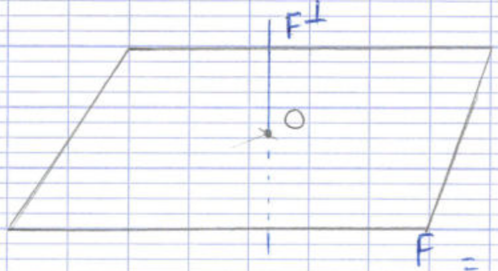
d) On dit que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est **orthogonale**
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall i, j \in I$, $i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0$

e) On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormale (ou orthonormée)
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$(e_i)_{i \in I}$ est orthogonale
et $\forall i \in I$, $\|e_i\| = 1$

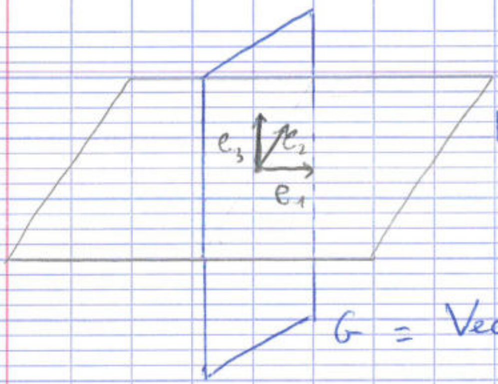
Exemples :

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien $(\mathbb{R}^3, (\cdot \mid \cdot)_{cano})$, on observe



$F^\perp = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$



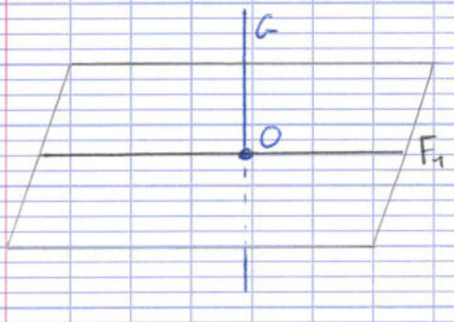
$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

On n'a pas $F \perp G$ car $F \cap G \neq \{0_E\}$

<u>Fait</u> : $F \perp G \Rightarrow F \cap G = \{0_E\}$
ie F et G sont en somme directe

démo : Osq $F \perp G$
Soit $x \in F \cap G$
On a $(x|x) = \|x\|^2 = 0$
donc $x = 0$



On a $F_1 \perp G$

Remarque :
Soient $a, b \in E$
Alors $a \perp b \iff \mathrm{Vect}(a) \perp \mathrm{Vect}(b)$

2) Théorème de Pythagore

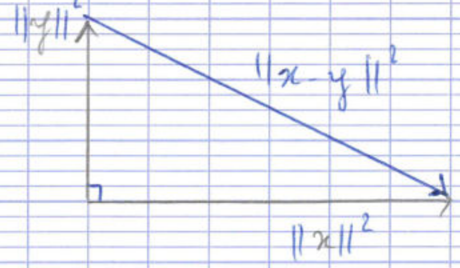
Prop :

a) Soient $x, y \in E$
Alors
$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

b) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale

Alors : $$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Idée : on regarde $x - y$
on a $x \perp y \iff \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$



Démo : C'est le R^x calculatoire

a) On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

donc $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff 2(x|y) = 0$
$\iff x \perp y$

b) On écrit
$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{(x_i | x_j)}_{= 0}$$

car (x_i) orthogonale

3) Les familles orthogonales sont libres

Prop : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale
Qsq $\forall i, x_i \neq 0_E$
Alors : $(x_1, \dots, x_n)$ est libre

Démo : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$

On a donc $\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|x_i\|^2 = 0$

donc $\forall i, \lambda_i \|x_i\|^2 = 0$
Or, $\forall i, \|x_i\| \neq 0$. donc $\forall i, \lambda_i = 0$

Autre preuve :
On a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \quad (*)$

R^x scalairisation
Fixons $k \in [\![1, n]\!]$. On scalairise $(*)$ par x_k

$$\left(x_k \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) = 0$$

ie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_k | x_i) = 0 \quad (**)$

Or $\forall k \neq i$, $(x_k | x_i) = 0$

donc $(**)$ s'écrit : $\lambda_k (x_k | x_k) = 0$
$\hat{c}$ $\|x_k\|^2 \neq 0$, on a $\lambda_k = 0$

Ainsi, $\forall k, \lambda_k = 0$: $(x_i)_i$ est libre

Généralisation

$F_1, \dots, F_n$ sev E tq $\forall i, j,\ i \neq j \Rightarrow F_i \perp F_j$

Alors les $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe

démo : Mq $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \Rightarrow \forall i,\ x_i = 0_E$$

Soient $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tq $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, x_k \right) = 0$$

ie $\sum_{i=1}^{n} (x_i | x_k) = 0 \quad (*)$

Or $\forall i \neq k$, $(x_i | x_k) = 0$
car les F_i sont 2 à 2 $\perp$
donc $(*)$ s'écrit $\|x_k\|^2 = 0$
donc $x_k = 0$

Corollaire : $(e_1, \dots, e_n)$ orthogonale $\Rightarrow (e_1, \dots, e_n)$ libre

Corollaire : $F \perp G \Rightarrow F$ et G sont en somme directe

Notation : Dans ce cas, on notera $F \overset{\perp}{\oplus} G$
au lieu de $F \oplus G$
On parle de somme directe orthogonale.

4) Caractérisation du vecteur nul

Fait : Soit $x \in E$ tq $\forall y \in E, (x|y) = 0$

Alors : $x = 0_E$

démo : On particularise $(*)$ pour $y = x$
donc on a $(x|x) = 0$
donc $\|x\|^2 = 0$
donc $x = 0_E$

Fait : $E^{\perp} = \{0_E\}$

démo : déjà $E^{\perp}$ sev de E donc $0_E \in E^{\perp}$

Réciproquement : Soit $x \in E^{\perp}$
On a par définition : $\forall y \in E, (x|y) = 0$
D'après ce qui précède : $x = 0_E$

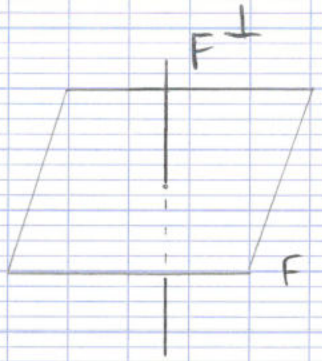
Fait : $\{0_E\}^{\perp} = E$

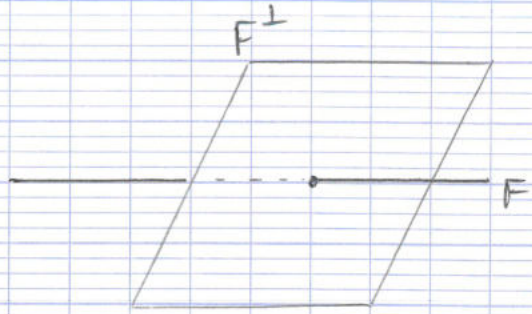
démo : Déjà, on a $\{0_E\}^{\perp}$ sev E

Puis, soit $x \in E$, on a $(x|0_E) = 0$
donc $x \perp 0_E$, donc $x \in \{0_E\}^{\perp}$

(donc $\forall y \in \{0_E\}, (x|y) = 0$)

5) Propriétés de l'opération $A \mapsto A^\perp$





Proposition :

Soient A, B parties de E. Alors, on a :

1°) $A^\perp$ sev E

2°) $A \subset B \Rightarrow B^\perp \underset{sev}{\subset} A^\perp$

3°) $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$

démo : 1°) ok

2°) Sqq $A \subset B$

Mq $B^\perp \subset A^\perp$

Soit $x \in B^\perp$. Mq $x \in A^\perp$

Je mq $\forall a \in A, (x|a) = 0$

Soit $a \in A$

On a $a \in B$ car $A \subset B$

Or $x \in B^\perp$ donc $(x|a) = 0$

3°) R^x : Mq $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$ (inclusion gratuite)

En effet, on a $A \subset \text{Vect } A$
donc d'après 2) $(\text{Vect } A)^\perp \subset A^\perp$

Réciproq^t : Soit $x \in A^\perp$
Mq $x \in \text{Vect } A^\perp$

⚠ $y \in \text{Vect } A \not\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \exists a \in A : y = \lambda a$

Reformula° R^* :
Soit $y \in \text{Vect } A$
Soient donc $a_1, \dots, a_n \in A$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$
tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$

On veut $(x \mid y) = 0$
On calcule
$(x \mid y) = \left(x \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{(x \mid a_i)}_{= 0 \text{ car } a_i \in A \text{ et } x \in A^\perp} = 0$

Donc $x \in (\text{Vect } A)^\perp$

Prop :
Soit F sev E
Alors $F \subset (F^\perp)^\perp$

⚠ en général, l'égalité est fausse.
mais en dim finie, on verra q c' est vrai

démo :

Soit $x \in F$

mq $x \in (F^\perp)^\perp$

ie mq $\forall y \in F^\perp, (x|y) = 0$

Soit $y \in F^\perp$. on a $(x|y) = 0$ car $y \in F^\perp$
et $x \in F$

ce qu'on voulait démontrer

(?) $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$
$F = \{ f \in E \mid f(0) = 0 \}$

mq $F \subsetneq (F^\perp)^\perp$

6) Un contre-exemple

On considère $E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $(\cdot|\cdot)$ défini par

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \quad \text{pour } f, g \in E$$

Rq : $p \geq 0$ sur $\mathbb{R}[X]$. sur E : $\int p \neq 0$ ie $\exists x_0 \; p(x_0) \neq 0$

$\{ x \in [a,b] \mid p(x) = 0 \}$ ne contient pas d'intervalle > 0 ie d'intérieur vide

alors $(f|g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, p(t)\, dt$

et $F := \{ f \in E \mid f(0) = 0 \}$

Calculer $F^\perp$ et mq $F \subsetneq (F^\perp)^\perp$

Idée : F est très gros car E est de dim ∞

Pour définir F, j'ai juste à poser une relation

On a $F = \mathrm{Ker}\,\varphi$

où $\varphi : E \to \mathbb{R}$
$f \mapsto f(0)$

ie : F est le noyau d'une forme linéaire

$R^{\times}$: F est un hyperplan

Déf : Soit E ev et F sev E
On dit que F est un hyperplan de E ssi
$\exists D$ sev E : $\begin{cases} \dim D = 1 \\ F \oplus D = E \end{cases}$

Prop : E ev, F sev E, Alors on a :

F hyperplan de E $\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0_{E^*}\}$:
$F = \mathrm{Ker}\,\varphi$

⚠ φ n'est pas unique : $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,(2\varphi)$

démo :
$\Rightarrow$ Osq F hyperplan de E
Soit donc D sev E tq $\dim D = 1$ et $E = F \oplus D$
On cherche $\varphi : E \to \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ker}\,\varphi = F$

On considère le projecteur p sur D $/\!/^{t}$ à F
On a $p : E \to E$ et $\mathrm{Ker}\,p = F$

ĉ $\dim D = 1$, soit $\psi : D \to \mathbb{R}$ un isomorphisme

On corestreint p à D et on compose par Ψ

On obtient $E \xrightarrow{p|^D} D \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}$

C'est une forme linéaire : $\Psi \circ p|^D$

On note $\varphi := \Psi \circ p|^D$

On peut vérifier : $\operatorname{Ker} \varphi = F$

!!

$\Leftarrow$ Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle

On effectivise la non-nullité de φ

Soit donc $x_0 \in E$ tq $\varphi(x_0) \neq 0$

Mq $\operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Vect}(x_0) = E$

R^α : caractère direct → gratuit

caractère plein → analyse - synthèse

Caractère direct

Soit $x \in \operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Vect}(x_0)$

Soit donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tq : $x = \lambda x_0$

On a $\varphi(x) = 0$

donc $\varphi(\lambda x_0) = \lambda \varphi(x_0) = 0$

Or, $\varphi(x_0) \neq 0$ donc $\lambda = 0$, donc $x = 0$

donc $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Vect}(x_0)$ sont en somme directe

Caractère plein:

Analyse - synthèse:

Soit $x \in E$

Soit $x_K \in \operatorname{Ker} \varphi$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $x = x_K + \lambda x_0$

si j'en trouve 1, j'ai trouvé les 2

On a donc $\varphi(x) = \varphi(x_K) + \lambda \varphi(x_0)$

donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$

Synthèse :

Notons $\lambda := \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$ $\quad x_K := x - \lambda x_0$

On a bien $x_K \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ et $x = x_K + \lambda x_0$

donc $\mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Vect}(x_0) = E$

donc $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un hyperplan de E

Retour au contre-exemple

Mq $F^{\perp} = \{\tilde{0}\}$

démo :

Soit $f \in F^{\perp}$

On a donc $\forall g \in F, \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt = 0$

donc si $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tq $g(0) = 0$, alors on a $\int_0^1 fg = 0$

Mq cela implique q nécessairement $f = \tilde{0}$

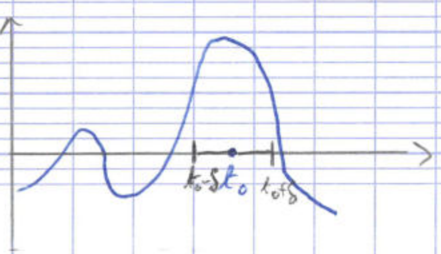
Soit $t_0 \in]0,1]$. Mq $f(t_0) = 0$

On raisonne par l'absurde.

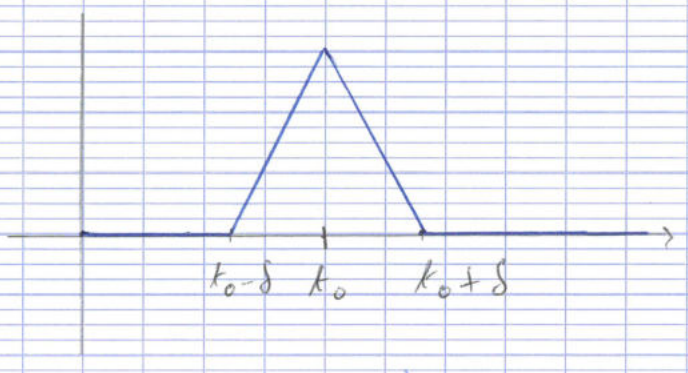
Osq $f(t_0) \neq 0$, f. en osq $f(t_0) > 0$

Ĉ f est continue en t_0, soit donc $\delta > 0$ tq

$f > 0$ sur $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ et $t_0 - \delta > 0$



On considère la fonction g affine par morceaux
1°) g est nulle sur $[0, t_0 - \delta]$
2°) $g(t_0) = 1$
3°) g est nulle après $t_0 + \delta$



On a $g \in F$ ie 1°) g est C^0
2°) $g(0) = 0$

On a $\forall t \in [0, 1]$, $f(t) \cdot g(t) \geq 0$
Il suffit de le vérifier sur $[0, t_0 - \delta]$, $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$
et $[t_0 + \delta, 1]$
Et $\int_0^1 f(t) g(t)\, dt = 0$

Enfin, fg est continue

Théorème
$f \in \mathcal{E}^0([a, b], \mathbb{R})$, $f \geq 0$, $\int_a^b f(t)\, dt = 0$

$\Rightarrow f = \widetilde{0}$

donc $fg = \widetilde{0}$
donc $f(t_0) g(t_0) = 0$ donc $f(t_0) = 0$
c'est absurde
Comme f est continue en 0, on a aussi $f(0) = 0$
donc $f = \widetilde{0}$

CCL : on a mq $F^{\perp} = \{\tilde{0}\}$

donc $(F^{\perp})^{\perp} = \{\tilde{0}\}^{\perp} = E$

Or $F \subsetneq E$ car $1 \in E \setminus F$

donc $F \subsetneq (F^{\perp})^{\perp}$: il y a inclusion stricte dans ce cas-là.

Rq : On montrera que

Prop : . $(E, (\cdot|\cdot))$ epr de dimension quelconque (finie ou infinie)

. F sev E de dimension finie

alors $(F^{\perp})^{\perp} = F$

7) Bases orthonormales

Théorème

Tout epr $(E, (\cdot|\cdot))$ de dim. finie admet une base orthonormée

ie E euclidien $\Rightarrow \exists\, (e_1, \dots, e_n)$ BON

démo : On raisonne par récurrence sur dim E

. Si $\dim E = 0$: dans ce cas, on a $E = \{0_E\}$ et E n'admet qu'une seule base : la famille vide (c'est une BON).

. Si dim $E = 1$

Rappel : si $a \in E$ et si $a \neq 0_E$ alors (a) est une base de E

Idée : on prend $a \neq 0_E$ dans E : on le renormalise : ça fait une BON

Ainsi, Réflexe de renormalisation

Fait : Soit E ev qcq, soit $a \in E$

$a \neq 0_E \Rightarrow \frac{a}{\|a\|}$ est un vecteur unitaire

ie $\left\| \frac{a}{\|a\|} \right\| = 1$

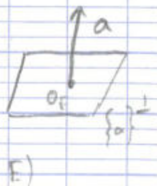
On choisit $a \neq 0_E$ dans E
alors $\left(\frac{a}{\|a\|} \right)$ est une BON de E

Hérédité :

Qsq E est de dim $n+1$
On veut construire une BON de E

Idée : se ramener à un sev de dim n
(ie un hyperplan)

R^x : si $a \in E$ et $a \neq \{0_E\}$
alors $\{a\}^{\perp}$ est un hyperplan de E



Fait : $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien
$a \in E \setminus \{0_E\}$
alors $\{a\}^\perp$ hyperplan de E

démo :

On considère $q_a : E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x|a)$

On a $\mathrm{Ker}(q_a) = \{a\}^\perp$

On a $q_a \neq 0_{L(E,\mathbb{R})}$, car $q_a(a) = \|a\|^2 \neq 0$
donc q_a est surjective

Rappel : pour les formes linéaires f on a
l'alternative :
$f = 0$ ou f est surjective

donc $\mathrm{Im}(q_a) = \mathbb{R}$ et $rg(q_a) = 1$
D'après la formule du rang, on a
$\dim \mathrm{Ker}(q_a) = \dim E - 1$

Retour à la démo :
Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$
On pose $F := \mathrm{Ker}(q_a)$
On a $\dim F = n$
Par ailleurs $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ peut être
restreint à tout sev F de E

Ainsi : $\left(F, (\cdot|\cdot)\big|_{F\times F}\right)$ est un espace euclidien
de dim. n

On peut appliquer l'hyp. de récurrence

Soit $(e_1, \dots, e_n) \in F^n$ une BON de F

Alors: $(a, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille **orthonormale**

. déjà, si $i \neq j$, on a $(e_i | e_j) = 0$

. Puis, $(a | e_i) = 0$ car $e_i \in F$ et $F = \{a\}^\perp$
donc, elle est libre
ĉ elle est de bonne taille, c'est une base de E

Théorème de décomposition dans une BON

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ espace euclidien
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E
alors
1) si $x \in E$, on a:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x | e_i) e_i$$

ie $\text{Coords}_{\mathcal{B}}(x) : \begin{pmatrix} (x|e_1) \\ (x|e_2) \\ \vdots \\ (x|e_n) \end{pmatrix}$

2) Soient $x, y \in E$ qu'on écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

Alors, on a $(x | y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

3) On a aussi

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$$

Rq : En fusionnant 1, 2 et 3 on a :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i)$$

$$\text{et } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2}$$

<u>démo :</u>

1) Analyse - synthèse

Soit $x \in E$, on l'écrit $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}(x|e_i) &= \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \middle| e_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{(e_j|e_i)}_{\delta_{ij}} \\ &= \lambda_i\end{aligned}$$

car $(e_i)_i$ BON de E

Bilan : $\lambda_i = (x|e_i)$

CCL : On a $\forall i, \lambda_i = (x|e_i)$

donc, on a $x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i$

Autre démo : Soit $x \in E$

On considère $y := x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i$

But : mq $y = 0$

Mq $\forall i$, $(y|e_i) = 0$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$(y|e_i) = (x|e_i) - \left(\sum_{j=1}^{n} (x|e_j) e_j \,\middle|\, e_i\right)$$

$$= (x|e_i) - \sum_{j=1}^{n} (x|e_j) \cdot \underbrace{(e_j|e_i)}_{= \delta_{ij}}$$

$$= (x|e_i) - (x|e_i) = 0$$

Bilan : $\forall i$, $y \perp e_i$

donc $y \in \{e_1, \dots, e_n\}^\perp$

donc $y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$

ie $y \in E^\perp$ donc $y \in \{0_E\}$

donc $y = 0_E$

2) On calcule

$$(x|y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j (e_i|e_j)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \underbrace{(e_i|e_j)}_{= \delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

3) $\|x\|^2 = (x|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

8) En dim finie, l'orthogonal est un supplémentaire

Exemples de BON

. On se place dans $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot)_{cano})$

alors $\mathcal{B}_{cano}$ est une BON

En effet soient $i \neq j$, on a :

$$(\varepsilon_i | \varepsilon_j) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j = \sum_{k \neq i, j} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1$$
$$= 0$$

donc $(\varepsilon_i)_i$ est une famille orthogonale

Puis $\|\varepsilon_i\|^2 = \sum_{k \neq i} 0^2 + 1^2 = 1$

Rq : dans $\mathbb{R}^3$ la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ s'écrit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en physique

. dans $(M_{np}(\mathbb{K}), (\cdot|\cdot))$ où $(M|N) = tr(M^T N)$

une BON de $M_{np}(\mathbb{K})$ est $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

. si $(e_1, \dots, e_n)$ BON de E

et si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{-1, 1\}^n$

Alors $(\alpha_1 e_1, \dots, \alpha_n e_n)$ BON de E

32.4.2 ? Si $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 2 à 2 $\neq^{ts}$

Alors la suite des polynômes de Lagrange associée aux α_i est une BON pour un p.s. bien choisi

Théorème : Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ epr

Soit F sev fini de E

Alors

1) $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$

2) $(F^{\perp})^{\perp} = F$

ctr-exemple si F n'est pas de dim. finie

2°) cf $\oplus$ haut 6)

1°) On prend le m̂ contre ex

On a $F^{\perp} = \{0_E\}$

donc $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = F \neq E$

démo :

1°) Grâce à 7), soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de F

Déjà, on a $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$ (cf $\oplus$ haut)

caractère direct ok

Mq le caractère plein est vérifié

Soit $x \in E$

Idée : si on pouvait compléter $(e_1, \dots, e_n)$ en une BON $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_p)$ de E

(c'est possible si E est de dim. finie)

alors on aurait $x = \sum_{j=1}^{p} (x|e_j) e_j$

qu'on écrit

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{j=n+1}^{p} (x|e_j) e_j}_{\in F^{\perp}}$$

car $(e_1, \dots, e_n)$ BON de F

Notre décomposition serait : $x = x_F + x_{F^\perp}$
c'est une heuristique : c'est un pdv qui est faux en toute rigueur mais qui nous permet de trouver le bon résultat

Bilan : On pose

$$x_F := \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i$$

on a $x_F \in F$

$x_{F^\perp} := x - x_F$

On a bien $x = x_F + x_{F^\perp}$

Il nous reste à mq $x_{F^\perp} \in F^\perp$

On aura bien mq $F + F^\perp = E$

$\mathcal{Q}$ R* pour mq $x_{F^\perp} \in F^\perp$

Il suffit de mq $\forall i, \ (x_{F^\perp} | e_i) = 0$

pas besoin de le faire pour tout $f \in F$

Soit i. On calcule

$$\begin{aligned}
(x_{F^\perp} | e_i) &= (x - x_F | e_i) \\
&= (x|e_i) - (x_F|e_i) \\
&= (x|e_i) - \left(\sum_{j=1}^{n} (x|e_j)\, e_j \,\middle|\, e_i \right) \\
&= (x|e_i) - \sum_{j=1}^{n} (x|e_j) \underbrace{(e_j|e_i)}_{= \delta_{ij}} \\
&= (x|e_i) - (x|e_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

2°) On utilise le 1°)

Déjà, on a $F \subset (F^\perp)^\perp$

Mq l'inclusion récip

Soit $x \in (F^\perp)^\perp$. Mq $x \in F$

On écrit $x = x_F + x_{F^\perp}$ avec $x_F \in F$ ~~et~~ $x_{F^\perp} \in F^\perp$

On a $x \in (F^\perp)^\perp$

démo :

. On a $F \subset (F^\perp)^\perp$ et $x_F \in F$

donc $x_F \in (F^\perp)^\perp$

et $x \in (F^\perp)^\perp$

donc $x - x_F \in (F^\perp)^\perp$

ie $x_{F^\perp} \in (F^\perp)^\perp$

Bilan : $x_{F^\perp} \in F^\perp \cap (F^\perp)^\perp$

QR^x si G ev : $G \cap G^\perp = \{0_E\}$

donc $x_{F^\perp} = \{0_E\}$

et donc $x = x_F \in F$

ou . On a $(x \mid x_{F^\perp}) = 0$ car $x \in (F^\perp)^\perp$, $x_{F^\perp} \in F^\perp$

et $(x \mid x_{F^\perp}) = (x_F + x_{F^\perp} \mid x_{F^\perp})$

$= (x_F \mid x_{F^\perp}) + (x_{F^\perp} \mid x_{F^\perp})$

Or $x_F \in F$, $x_{F^\perp} \in F^\perp$ on a $(x_F \mid x_{F^\perp}) = 0$

donc $(x \mid x_{F^\perp}) = 0 = (x_{F^\perp} \mid x_{F^\perp}) = \|x_{F^\perp}\|^2 = 0$

donc $x_{F^\perp} = 0$ donc $x = x_F$ donc $x \in F$ ∎

Définition :

$(E, (\cdot|\cdot))$ epr
F sevf E (de dim. finie)
Alors $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F dans E

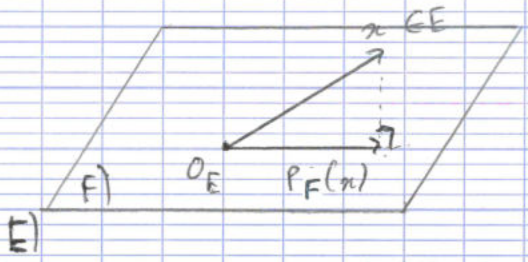
Rq : on peut avoir F sev E avec F de dim infinie et également $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$
Autrement dit, la condition "F de dim finie" est suffisante mais pas nécessaire pour que $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$
Ex : on prend E de dim. infinie et $F = E$
On a $F^\perp = \{0_E\}$ et donc $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$

9) Orthogonal dans les espaces euclidiens

Théorème :
Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien
Soit F sev E
Alors :
1) $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$
2) $(F^\perp)^\perp = F$
3) $\dim F + \dim F^\perp = E$

ie $\dim F^\perp = n - \dim F$ $(n := \dim E)$

III. Projection orthogonale sur un sev de dim finie



On se fixe $(E, (\cdot|\cdot))$ eps

1) Déf de la projection orthogonale

Déf : Soit F sev de E

On appelle projecteur orthogonal de E sur F le projecteur de E sur F $//^{\text{t}}$ à $F^\perp$

Il est noté P_F

Rq :

. On peut définir P_F dès qu'on a $F \oplus F^\perp = E$

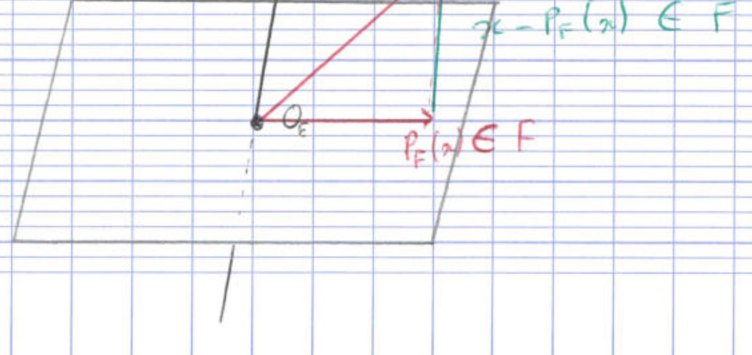
ex : on prend F sev de E

on pose $G := F^\perp$

on a alors $G^\perp = (F^\perp)^\perp = F$

donc $G \overset{\perp}{\oplus} G^\perp = F^\perp \overset{\perp}{\oplus} F = E$ car F sev

. de m̂, on pourrait définir la symétrie orthogonale par rapport à F



Compléments

Continuité de q_a

1°) $(E, \|\cdot\|_E)$ evn
$(F, \|\cdot\|_F)$

Soit $f : E \to F$

Soit $x_0 \in E$

On dit que f est continue en x_0 ssi

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \|x - x_0\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon$

2°) f est continue ssi $\forall a \in E$, f est continue en a

3°) Soit $C \geq 0$. On dit que f est C-lipschitzienne ssi $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F \leq C \|x - y\|_E$

4°) Lipschitzien $\Rightarrow$ continu

démo :

Osq f C-lip où $C \in \mathbb{R}_+$

Soit $x \in E$

Mq f est C^0 en x_0

Soit $\varepsilon > 0$

On cherche un $\delta > 0$

On pose $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$

Mq $\forall x \in E$, $\|x - x_0\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon$

Soit $x \in E$ tel que $\|x - x_0\|_E \leq \delta$

On a $\|f(x) - f(x_0)\|_F \leq C \cdot \|x - x_0\|_E$
$\leq \varepsilon$.

3°) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ eps
Soit $a \in E$
On note $q_a : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x|a) \end{array}$

Soient $x, y \in E$
On a $|q_a(x) - q_a(y)| = |(x|a) - (y|a)|$
$= |(x-y|a)|$

$\leqslant \|a\| \cdot \|x-y\|$

CCL : q_a est $\|a\|$ - lip. donc continue

2) Expression fondamentale

Prop : F sevf E
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ BON de F
Alors :
$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i) e_i$

démo : cf + haut
Pour mq $E = F + F^\perp$
On avait écrit
$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} (x|e_i) e_i}_{\in F} + \underbrace{(x \dots)}_{\in F^\perp}$$
Par déf du proj sur F $/\!/^t$ à $F^\perp$, on a :
$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i) e_i$

Rq : Si $(f_1, \dots, f_p)$ BOG de F

base orthogonale

On a $\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x|f_i)}{(f_i|f_i)} f_i$

démo : Il suffit de renormaliser les f_i pour obtenir une BON.

On pose $e_i := \frac{f_i}{\|f_i\|}$

Si $x \in E$, on a $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$

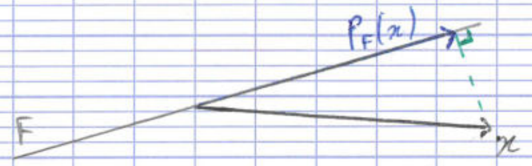
$= \sum_{i=1}^{p} \left(x \middle| \frac{f_i}{\|f_i\|}\right) \frac{f_i}{\|f_i\|}$

$= \sum_{i=1}^{p} \frac{(x|f_i) f_i}{\|f_i\|^2}$

$= \sum_{i=1}^{p} \frac{(x|f_i) f_i}{(f_i|f_i)}$

3) Cas particuliers

On regarde le cas où F est une droite

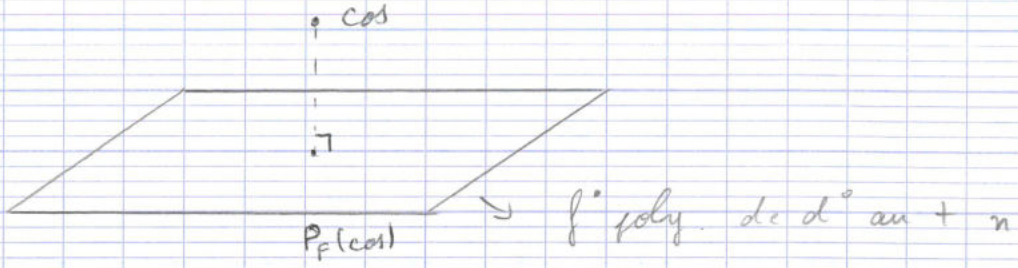


Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$

Alors (a) est une BOG de $\mathrm{Vect}(a)$

donc $\forall x \in E,\ p_{\mathrm{Vect}(a)}(x) = \frac{(x|a)}{(a|a)} a$

4) Méthodes pour calculer $p_F(x)$



Alors $p_F(\cos)$ est la fct poly de d° au + n la plus proche de cos

Notations
$(E, (\cdot|\cdot))$ ep
F sevf E $\quad p := \dim F$
$x \in E$ $\quad$ But : calculer $p_F(x)$

a) Méthode BON

Osq $(e_1, \dots, e_p)$ BON
Il suffit de calculer $(x|e_i)$ pour $i \in [\![1,p]\!]$
on a $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$

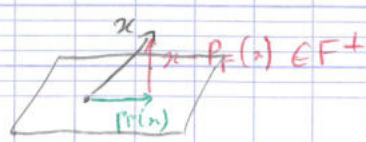
b) Méthode BOG : pareil

c) Méthode système

Osq on a juste une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F

On sait qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tq
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$$

On cherche les λ_i.



On sait que $x - p_F(x) \in F^\perp$
donc $\forall i$, $x - p_F(x) \perp f_i$
donc $\forall i$, $(x - p_F(x) \mid f_i) = 0$ $(\star)$
Fixons i, on réécrit $(\star)$

$$\left(x - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j \;\middle|\; f_i \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x \mid f_i) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (f_j \mid f_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p} (f_j \mid f_i) \lambda_j = (x \mid f_i)$$

c'est une éq. linéaire à p inconnues
On a p telles équations

Bilan : on a :

$$(f_1 \mid f_1)\lambda_1 + (f_2 \mid f_1)\lambda_2 + (f_3 \mid f_1)\lambda_3 + \dots + (f_p \mid f_1)\lambda_p = (x \mid f_1)$$

$$\vdots$$

$$(f_1 \mid f_p)\lambda_1 + (f_2 \mid f_p)\lambda_2 + \dots + (f_p \mid f_p)\lambda_p = (x \mid f_p)$$

5) Exemples

a) avec la méthode système

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ avec $(f \mid g) := \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$

$F = \text{Vect}\,(\underbrace{x \mapsto x}_{f_1}, \underbrace{x \mapsto x^2}_{f_2})$

$f := \exp$
On veut calculer $p_F(\exp)$

Rq : (f_1, f_2) n'est pas une FOG

car $\int_0^1 f_1 f_2 = \int_0^1 t^3 \, dt = \frac{1}{4} \neq 0$

On écrit $p_F(\exp) = \lambda f_1 + \mu f_2$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

On a

$$\left(f - (\lambda f_1 + \mu f_2) \,\middle|\, f_1\right) = 0$$

$$\left(f - (\lambda f_1 + \mu f_2) \,\middle|\, f_2\right) = 0$$

Il y a 6 produits scalaires à calculer

$(f_1 | f_1) = \frac{1}{3}$

$(f_1 | f_2) = (f_2 | f_1) = \frac{1}{4}$

$(f_2 | f_2) = \frac{1}{5}$

$(f | f_1) = 1$ $\qquad (f | f_2) = e - 1$

On a

$\lambda (f_1 | f_1) + \mu (f_1 | f_2) = (f | f_1)$ et...

$$\begin{cases} \lambda \cdot \frac{1}{3} + \mu \cdot \frac{1}{4} = 1 \\ \frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{5} \mu = e - 2 \end{cases}$$

2 méthodes :

1°) échelonnement / Gauss $\qquad$ 2°) par substitution

On a $\begin{cases} \lambda = 3\left(1 - \frac{1}{4}\mu\right) \\ \frac{1}{4} \cdot 3\left(1 - \frac{\mu}{4}\right) + \frac{\mu}{5} = e - 2 \end{cases}$

donc : $15\left(1 - \frac{\mu}{4}\right) + 4\mu = 20(e-2)$

donc : $3 \cdot 5 \, (4 - \mu) + 4^2 \mu = 4^2 \cdot 5 \cdot (e-2)$

donc : $(4^2 - 3 \cdot 5)\,\mu = 4^2 \cdot 5\,(e-2) - 3 \cdot 5 \cdot 4$

CCL : $\mu = 20\,(4(e-2) - 3)$
ie $\mu = 20\,(4e - 11)$

et donc $\lambda = 3\left(1 - 5(4e - 11)\right)$

$\lambda = 3(-20e + 56)$
$\lambda = 12(-5e + 14)$

donc $\lambda = 12\,(14 - 5e)$

CCL : $p_F(\exp) = 12\,(14 - 5e)\, f_1 + 20\,(4e - 11)\, f_2$

b) Exemple de méthode BOG

$E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ $\qquad (f|g) = \int_0^\pi fg$
$f_1 := \sin \qquad f_2 := \cos \qquad f = \exp$
$F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$

Rq : on a

$(f_1 | f_2) = (\sin | \cos) = \int_0^\pi \sin \cdot \cos$

?R* formule trigo

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$$

donc $(\sin \mid \cos) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2\theta)\, d\theta$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cos(2\pi) - \cos(0)\right)$$

$$(\sin \mid \cos) = 0$$

ou : changement de variable

ou : R* : $u' \cdot u \to \left[u^2\right]$

On a $\int_0^{\pi} \cos \cdot \sin = \int_0^{\pi} \sin' \cdot \sin = \left[\frac{\sin^2}{2}\right]_0^{\pi} = 0$

Puis $(f_1 \mid f_1) = \int_0^{\pi} \sin^2(\theta)\, d\theta$

On a $\sin^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right)$$

donc $(f_1 \mid f_1) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1 - \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

puis $(f_2 \mid f_2) = \int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} 1 - \sin^2(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

A calculer : $I = \int_0^{\pi} \cos(\theta) \cdot \exp(\theta)\, d\theta$

R^{x} : double IPP

On trouve $I = -\frac{e^{\pi}+1}{2}$

On a :

$$I = Re\left(\int_0^{\pi} e^{i\theta} \cdot \exp(\theta)\, d\theta\right)$$

et $\int_0^{\pi} e^{i\theta} e^{\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} e^{(i+1)\theta}\, d\theta$

$$= \left[\frac{e^{(1+i)\theta}}{1+i}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{(1+i)\pi}}{1+i} - \frac{1}{1+i}$$

$$= \frac{1}{1+i}\left(e^{\pi} \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{1+i}\left(e^{\pi}+1\right)$$

Or $Re(\cdot)$ est $\mathbb{R}$ - linéaire

donc $I = -(e^{\pi}+1) \cdot Re\left(\frac{1}{1+i}\right)$

et $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2}(1-i)$

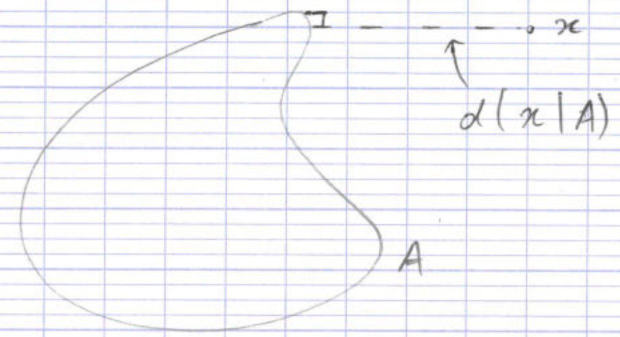
donc $I = -\frac{1}{2}(e^{\pi}+1) = (\cos|\exp)$

$(\sin|\exp) = Im(\dots) = -(\cos|\exp) = \frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$

Bilan :

$$P_{Vect(\sin, \cos)}(exp) = \frac{(\sin | exp)}{(\sin | \sin)} \cdot \sin + \frac{(\cos | exp)}{(\cos | \cos)} \cos$$
$$= \frac{e^{\pi}+1}{\pi} \cdot \sin + \frac{e^{\pi}+1}{\pi} \cdot \cos$$

6) Distance à une partie



Déf : Soit $(E, \|\cdot\|)$ evn

Soit $A \subset E$ tq $A \neq \emptyset$
Soit $x \in E$
On appelle distance de x à A et on note $d(x, A)$ le nombre réel ≥ 0 défini par :

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

En effet : $\{\|x - a\| \mid a \in A\}$

est non vide et minorée par 0

Exemple où $d(x, A)$ n'est pas atteinte
$E = \mathbb{R}$ $\quad A =]1, +\infty[$ $\quad x = 0$

ici $d(x, A) = 1$

démo : $1 + \frac{1}{n} \in A$

donc $d(x, A) \leqslant \left|0 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| = 1 + \frac{1}{n}$

et ce pour tout n

A la limite, $d(x, A) \leqslant 1$

Soit $a \in A$ on a $a > 1$

donc $|x - a| = |0 - a| = |a| = a > 1$

donc 1 minore $\{ |x - a| \mid a \in A \}$

donc, $d(x, A) = 1$

Dorénavant, on se place dans le cadre euclidien

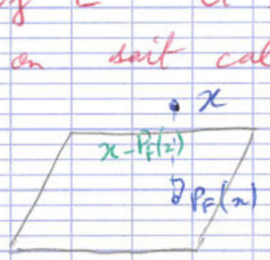
Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ epr.

On dispose de la norme $\|\cdot\|$ sur E

Principe :

Si F sevf E et si $x \in E$

Alors, on sait calculer $d(x, F)$



Prop : $(E, (\cdot|\cdot))$ epr

F sevf E

$x \in E$

Alors :

1°) $d(x, F) = \| x - p_F(x) \|$

ie $d(x, F)$ est atteinte en $p_F(x)$

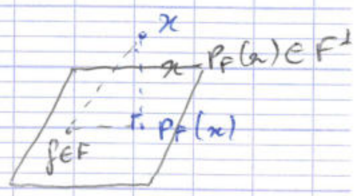
2°) $d(x, F)$ est atteinte unique^t en ce pt

ie $\forall f \in F$, $d(x, F) = \| x - f \| \Rightarrow f = p_F(x)$

<u>démo :</u>

1°) Soit $f \in F$, on a $p_F(x) \in F$

On a $\| x - f \| = \dots$



On a :

$$\| x - f \|^2 = \| \underset{F^\perp}{\underset{\cap}{x - p_F(x)}} + \underset{F}{\underset{\cap}{p_F(x) - f}} \|^2$$

On a $x - p_F(x) \perp p_F(x) - f$

donc, on applique Pythagore :

$$\| x - f \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \underbrace{\| p_F(x) - f \|^2}_{} \quad (*)$$

$$\geqslant \| x - p_F(x) \|^2$$

Bilan : $\forall f \in F$, $\| x - f \| \geqslant \| x - p_F(x) \|$

donc $\inf_{f \in F} \| x - f \| \geqslant \| x - p_F(x) \|$

ie $d(x, F) \geqslant \| x - p_F(x) \|$

. Mq $d(x, F) \leqslant \| x - p_F(x) \|$

Comme $p_F(x) \in F$, on a

$\inf_{f \in F} \| x - f \| \leqslant \| x - p_F(x) \|$

ie $d(x, F) \leq \|x - p_F(x)\|$

2°) Si $d(x, F) = \|x - f\|$

cela implique q le terme (*) est nul

ie $f = p_F(x)$

IV, !! Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Données : $(E, (\cdot|\cdot))$ espace euclidien
$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

A priori, $(e_1, \dots, e_n)$ n'est ni une BON, ni une BOG

Sortie : On va créer une BOG puis une BON à partir de $(e_1, \dots, e_n)$

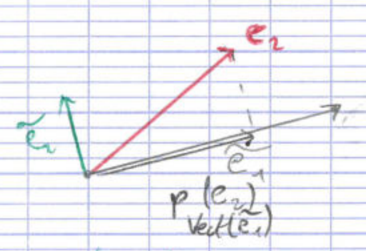
Application : Par exemple, calculer $p_F(x)$

Algorithme pour créer une BOG $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$

. e_1 : rien à faire

on pose $\tilde{e}_1 := e_1$

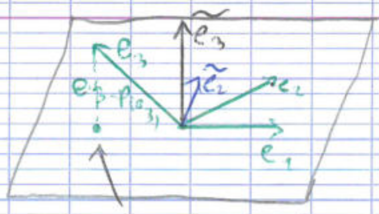
. e_2 : on veut $\tilde{e}_2 \perp \tilde{e}_1$



on pose $\tilde{e}_2 := e_2 - p_{Vect(\tilde{e}_1)}(e_2)$

ie $\tilde{e}_2 := e_2 - \dfrac{(e_2|\tilde{e}_1)}{(\tilde{e}_1|\tilde{e}_1)} \cdot \tilde{e}_1$

. e_3 :



$p_{Vect(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2})}(e_3)$ noté $p(e_3)$

formule :

$$\widetilde{e_3} = e_3 - \frac{(e_3 | \widetilde{e_1})}{(\widetilde{e_1} | \widetilde{e_1})} \widetilde{e_1} - \frac{(e_3 | \widetilde{e_2})}{(\widetilde{e_2} | \widetilde{e_2})} \widetilde{e_2}$$

. Etc.

Bilan : on définit la famille $(\widetilde{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ par récurrence en posant :

$$\widetilde{e_1} := e_1$$

$$\widetilde{e}_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \frac{(e_{i+1} | \widetilde{e_j})}{(\widetilde{e_j} | \widetilde{e_j})} \widetilde{e_j}$$

si $i \in [\![1, n-1]\!]$

qui vérifie :

1°) $(\widetilde{e_i})_i$ FOG $\neq 0_E$

2°) $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}(\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_p})$

. Pour créer une BON :

On pose $\hat{e_i} := \dfrac{\hat{e_i}}{\| \widetilde{e_i} \|}$

Rq : On aurait pu créer une BON en 1 seul temps :

$$\hat{e}_1 := \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\hat{e}_{i+1} := \frac{e_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (e_{i+1} | \hat{e}_j) \hat{e}_j}{\| e_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} (e_{i+1} | \hat{e}_j) \hat{e}_j \|}$$