Chapitre 30 : Déterminants

I, Multilinéarité et antisymétrie

1) Multilinéarité

Def : Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

On dit que f est (une forme) multilinéaire (par rapport aux colonnes de sa variable) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$f\left(C_1 \middle| C_2 \middle| C_3 \middle| \dots \middle| C_{i-1} \middle| C_i + \lambda C_i' \middle| C_{i+1} \middle| \dots \middle| C_n \right)$$

$$= f\left(C_1 \middle| \dots \middle| C_i \middle| \dots \middle| C_n \right) + \lambda \cdot f\left(C_1 \middle| \dots \middle| C_i' \middle| \dots \middle| C_n \right)$$

pour toutes colonnes $C_1, \dots, C_n, C_i'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Exemple : Osq f $M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ multilinéaire

$$f\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = 3 \left[f\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

Fait

Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire

Alors :

$$\exists j_0 \in [\![1, n]\!] : C_{j_0}(M) = 0_{n,1} \Rightarrow f(M) = 0$$

<u>démo :</u> On écrit

$$f(M) = f\Big(C_1(M) \,\Big|\, C_2(M) \,\Big|\, \underset{\substack{\| \\ 0 \cdot 0_{n,1} \\ \cap \quad \cap \\ \mathbb{K} \quad M_{n,1}(\mathbb{K})}}{\overset{\substack{0_{n,1} \\ \|}}{C_{j_0}(M)}} \,\Big|\, \dots \; C_n(M) \Big)$$

$$= 0 \cdot f\Big(C_1(M) \,|\, \dots \,|\, 0_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, \dots \; C_n(M) \Big)$$

$$f(M) = 0$$

<u>Fait</u>

Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire

Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Alors : $f(\lambda A) = \lambda^n \cdot f(A)$

<u>démo :</u> On a $f(\lambda a) = f\Big(\lambda \cdot C_1(A) \,\Big|\, \lambda \cdot C_2(A) \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \lambda C_n(A) \Big)$

$$= \lambda \cdot f\Big(C_1(A) \,\Big|\, \lambda \cdot C_2(A) \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \lambda \cdot C_n(A) \Big)$$

$$= \lambda^2 \cdot f\Big(C_1(A) \,\Big|\, C_2(A) \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \lambda C_n(A) \Big)$$

$$\vdots$$

$$f(\lambda a) = \lambda^n \cdot f\Big(C_1(A) \,|\, C_2(A) \,|\, \dots \,|\, C_n(A) \Big)$$

$$= \lambda^n \cdot f(A)$$

2) Applications antisymétriques

Rappel : $f : E^2 \to \mathbb{R}$ est un p.s $\Rightarrow$ f est symétrique
ie $\forall x, y \in E,\ f(x,y) = f(y,x)$
ie $\forall x, y,\ (x|y) = (y|x)$

Déf : Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$
On dit que f est anti-symétrique (par rapport aux colonnes) ssi $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $\forall M \in M_n(\mathbb{K})$,

$$i \neq j \Rightarrow f(M) = -f\Big(C_1(M) \Big| \dots \Big| \underset{\text{en } i\text{-ème place}}{C_j(M)} \Big| \dots \Big| \underset{\text{en } j\text{-ème place}}{C_i(M)} \Big| \dots \Big)$$

Ie quand on échange deux colonnes de M, on multiplie par (-1) le résultat de l'application de $f(\cdot)$

Ex : Soit $f : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ antisymétrique. Alors :

$$f\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Fait : Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ antisymétrique.
Alors, si M possède 2 fois la m̂ colonne, on a $f(M) = 0$

Démo : Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ et soient $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$ tels que $i_0 \neq j_0$ et $C_{i_0}(M) = C_{j_0}(M)$

Alors, on a :

$$f(M) = f\left(C_1(M) \mid \dots \mid C_{i_0}(M) \mid \dots \mid C_{j_0}(M) \mid \dots \mid C_n(M)\right)$$
$$= -f\left(C_1(M) \mid \dots \mid C_{j_0}(M) \mid \dots \mid C_{i_0}(M) \mid \dots \mid C_n(M)\right)$$
$$= -f(M)$$

donc $2f(M) = 0$

On scalairise par $\frac{1}{2}$, on obtient $f(M) = 0$

II. Déterminant en dimension 2 et 3

1) Formule en dimension 2

Théorème : Soit $f : M_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tq

1°) f est multilinéaire

2°) f est antisymétrique

3°) $f(I_2) = 1$

Alors, on a :

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{K}$,

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

démo : Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On a :

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a $f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

et $f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad$

car $f(I_2) = 1$

$f\begin{pmatrix} ab \\ 00 \end{pmatrix} = ab\, f\begin{pmatrix} 11 \\ 00 \end{pmatrix}$ par multibinéarité

et $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède 2 fois

la m̂ colonne et f est antisymétrique

donc $f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad$

Puis, $f\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = cd\, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ (car $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$)

$f\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = -bc\, f(I_2) = -bc$

CCL : $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Remarque : Au lieu de f antisymétrique, on dit aussi f alternée

2) Propriétés

Soient $M, N \in M_2(\mathbb{K})$

a) $\det(MN) = \det(M) \cdot \det(N)$

démo :

- par le calcul. On note

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \ldots$$

- ou on note $M = (C_1\ C_2)$ et $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On a alors $MN = \left(a C_1 + c C_2 \mid b C_1 + d C_2 \right)$

donc, par multilinéairité et antisymétrie :

$$\det(MN) = a \cdot \det(C_1 \mid b \cdot C_1 + d C_2) + c \det(C_2 \mid b C_1 + d C_2)$$

et $\det(C_1 \mid b C_1 + d C_2) = b \underbrace{\det(C_1 \mid C_1)}_{0} + d . \underbrace{\det (C_1 \mid C_2)}_{\det M}$

et $\det(C_2 \mid b C_1 + d C_2)$
$= b \det(C_2 \mid C_1) + d \cdot \det(C_2 \mid C_2)$
$= -b \det(C_1 \mid C_2)$
$= -b . \det M$

Bilan : $\det(MN) = ad . \det M - bc \det M$
$= (ad - bc) \det M$
$= \det N . \det M$

b) M inversible $\iff \det M \neq 0$

démo dans le cas général :

$\Rightarrow$ Osq M inv
On a $M \cdot M^{-1} = I_n$
donc $\underbrace{\det(M \cdot M^{-1})}_{\det M \cdot \det M^{-1}} = \underbrace{\det(I_n)}_{1}$
donc $\det M \neq 0$

$\Leftarrow$ On montre la contraposée ie

$$M \text{ non inv} \Rightarrow \det M = 0$$

Osq M non inversible

R^x : les colonnes de M sont liées

Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots 0)\}$

tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i = 0$

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$+\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) M non inv. on a $C_2(M) - C_1(M) = C_3(M) - C_2(M) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

donc $C_3(M) - 2C_2(M) + C_1(M) = 0$

ie $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Or $\mathrm{rg}(M) \neq 1$ car les colonnes ne sont pas 2 à 2 proportionnelles.

Bilan : $\mathrm{rg}(M) = 2$

formule du rang $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, A = 1$

$\mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tq $\lambda_{i_0} \neq 0$

On a alors : $\lambda_{i_0} C_{i_0}(M) = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \lambda_i C_i(M)$

donc : $C_{i_0}(M) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} C_i(M)$ $(*)$

Mq $\det(M) = 0$

Idée : je remplace avec $(*)$ $C_{i_0}(M)$ par une CL des autres colonnes

On a : $\det(M) = \det\left(C_1 \middle| \dots \middle| -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} C_i \middle| \dots \middle| C_n\right)$

$$= - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \cdot \underbrace{\det\left(C_1 | \dots | C_i | \dots | C_n\right)}_{0}$$

car $C_i = C_{i_0}$

donc $\det(M) = 0$

c) $\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$

d) $\det(M^T) = \det(M)$

3) Déterminant en dimension 3

Prop : Soit $f : M_3(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tq

1°) f multilinéaire
2°) f antisymétrique
3°) $f(I_3) = 1$

Alors $f\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{pmatrix} = \dots$

En particulier : $\exists!\, f : M_3(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$
$\begin{cases} f \text{ antisymétrique} \\ f \text{ multilinéaire} \\ f(I_3) = 1 \end{cases}$

démo : On calcule

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{pmatrix} = \underset{1}{a\, f\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & C_2 & C_3 \\ 0 & & \end{pmatrix}} + \underset{2}{\alpha\, f\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & C_2 & C_3 \\ 0 & & \end{pmatrix}} + \underset{3}{A\, f\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & C_2 & C_3 \\ 0 & & \end{pmatrix}}$$

1. $$f\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & B & C \end{pmatrix} = \underset{= 0}{b\, f\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 0 & C_3 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}} + \underset{\mathrm{I}}{\beta\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & C_3 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}} + \underset{\mathrm{II}}{B\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & C_3 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}}$$

I : $$f\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} = c\, \underset{= 0}{f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + \gamma\, \underset{= 0}{f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + C\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= C$$

II : $$f\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & C_3 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix} = \gamma\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\gamma$$

1 : Bilan : ① : $a\beta C - aB\gamma$

De m̂ pour ② et ③

Formule de Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a & b & d \\ \alpha & \beta & \delta \\ A & B & D \end{pmatrix}$$

Idée : ne se généralise pas $\searrow\searrow\searrow \; +$ $\quad \nearrow\nearrow\nearrow \; -$

$A b \delta + \alpha B d + a \beta D - A \beta d - a B \delta - \alpha b D$

III, Déterminant cas général

1) Définition

Théorème - définition

Il existe une unique application $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tq

1°) f multilinéaire

2°) f antisymétrique

3°) $f(I_n) = 1$

On l'appelle déterminant et elle est notée $\det(\cdot)$

Si $M \in M_n(\mathbb{K})$, on note aussi $|M| := \det(M)$

démo : admise, nécessite une étude de la théorie des groupes

Rq : L'ensemble des formes multilinéaires alternées $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Corollaire : L'ensemble des formes multilinéaires alternées $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une droite vectorielle, dont det est un vecteur directeur

ie $\forall f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilinéaire alternée

$\exists ! \lambda \in \mathbb{K} : f = \lambda \cdot \det$

donc $f(I_n) = \lambda \cdot \det I_n = \lambda$

mieux : $\forall f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilinéaire alternée

$f = f(I_n) \cdot \det$

2) !! Déterminant et opérations sur les colonnes

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

- Si A possède une colonne nulle, $\det(A) = 0$
- Si A possède 2 colonnes identiques, $\det(A) = 0$

- L'échange de 2 colonnes multiplie le déterminant par -1.

- ! Règle pratique

Si B est la matrice obtenue en ajoutant à l'une des colonnes de A une CL des autres colonnes de A alors $\det B = \det A$

ie les opérations $C_i \leftarrow C_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j C_j$

laissent invariant le déterminant

Complément d'analyse

- Mq $\begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ f \neq \tilde{0} \end{cases} \Rightarrow f'(\alpha) \neq 0$

  où f solution de $f'' + a(t) f' + b(t) f = 0$

démo :

On utilise le théorème de Cauchy

Si $f'(\alpha) = 0$ alors f est solution du pb de Cauchy

$$(*) \begin{cases} (E) \\ f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

Or $\tilde{0}$ est solution de $(*)$

Par unicité, on a $f = \tilde{0}$

Absurde donc $f'(\alpha) = 0$

- ⚠ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ tq $f'(a) > 0$

  Alors, il est FAUX que f est $\nearrow\nearrow$ au $v(a)$

  ie il est F q $\exists \delta > 0 : f\big|_{]a-\delta, a+\delta[}$ $\uparrow\uparrow$

ctr-ex : On considère

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

et $f'(0) = \lambda \neq 0$

Si λ est petit alors f n'est pas $\nearrow\nearrow$ au $v(0)$

idée de démo :

On considère f' et on mq le signe de f' change tout le tps au $v(0)$

ie $\forall \delta > 0, \exists x_0, x_1 \in [0, \delta[: \begin{cases} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_1) < 0 \end{cases}$ $(*)$

On admet (*)
Deux CCL possibles :
- Osq $f \uparrow\uparrow$ au $v(0)$
En particulier $f \uparrow$ au $v(0)$
Soit donc $\delta > 0$ tq $f|_{]-\delta,\delta[} \nearrow$

On a donc $f'|_{]-\delta,\delta[} \geq 0$
En contradiction avec (*)

Prop :
Soient $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{\mathcal{C}^1}$
$a \in I$

$g'(a) > 0 \Rightarrow g \uparrow\uparrow$ au $v(a)$

démo : $\hat{C}$ $g'(a) > 0$ et g' continue en a :
on a $g' > 0$ au $v(a)$
Soit donc $\delta > 0$ tq $\forall x \in]a-\delta ; a+\delta[, g'(x) > 0$
Ainsi d'après le cours :
$g|_{]a-\delta ; a+\delta[} \nearrow\uparrow$ donc $g \uparrow\uparrow$ au $v(a)$

-

Ainsi, si $\delta > 0$, soit $x_0, x_1 \in]0,\delta[$ tq
$f'(x_0) > 0$ et $f'(x_1) < 0$
$\hat{C}$ f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, on a $f \uparrow\uparrow$ au $v(x_0)$
et $f \downarrow\downarrow$ au $v(x_1)$
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On calcule $f'(x) = \lambda + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \cdot x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \lambda + \underbrace{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{vaut régulièrement } +1, -1}$$

On prend $\lambda = \frac{1}{2}$

On va avoir $f'(x) \simeq \frac{1}{2} + \varepsilon \begin{array}{l} \nearrow +1 \\ \searrow -1 \end{array}$

$\simeq \frac{3}{2} + \varepsilon > 0$

$-\frac{1}{2} + \varepsilon < 0$

Bilan : $f'(a) > 0 \Rightarrow f \nearrow\nearrow$ au $v(a)$

- c'est F en général
- c'est V si f est $\mathcal{C}^1$

<u>démo de l'invariance du déterminant :</u>

On a :

$$\det\Big(C_1 \mid \overbrace{C_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_j C_j}^{i\text{-ième colonne}} \mid \dots \mid C_n\Big)$$

$$= \det(C_1 | \dots | C_i | \dots + C_n) + \underbrace{\det\Big(C_1 | \dots | \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_j C_j \mid \dots \mid C_n\Big)}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_j \cdot \underbrace{\det(C_1 | \dots | C_j | \dots | C_n)}$$

$= 0$ car 2 colonnes identiques en indice i et j

Contre exemple essentiel :

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$

On prend $A := \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$

On a $\det A = 0$ car $C_2(A) = 0$

et $\det B = 0$ car $C_1(A) = 0$

mais $A + B = I_n$ donc $\det(A+B) = 1$

3) Propriétés multiplicatives du déterminant

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

démo : on fixe $A \in M_n(\mathbb{K})$, on relâche B

On considère $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$
$B \mapsto \det(AB)$

Alors f est multilinéaire alternée
donc, grâce au théorème de structure :
$\forall B \in M_n(\mathbb{K})$: $f(B) = f(I_n) \cdot \det(B)$

Or, $f(I_n) = \det A$

- $\forall p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = \det(A)^p$

- $\det A \neq 0 \iff A$ inversible

Dans ce cas, on a $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

4) Déterminant des matrices triangulaires supérieures

Prop :

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ 0 & & & A_p \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$$

Prop 2 :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

puis $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Bilan : $\begin{vmatrix} \ddots \end{vmatrix} = 3 \times (-2) \times 1 = -6$

Lemme :

$$\begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \ \boxed{A} \end{vmatrix} = \det A$$

démo : On note p la taille de A
On relache A
On considère $f : M_p(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$
$A \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \ \boxed{A} \end{vmatrix}$

f est multilinéaire alternée
donc $f(A) = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{f(I_n)} \cdot \det A$

Lemme 2 :

$$A_1 \text{ non inv} \Rightarrow \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & & * \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = 0$$

ie Prop 1 **est vraie** dans le cas où $\det A_1 = 0$

démo : Osq A non inv. On a une $CL_{\neq 0}$ entre les colonnes de A_1

On note $A := \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & * \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

La $CL_{\neq 0}$ pour A_1 donne une $CL_{\neq 0}$ entre les colonnes de A. donc A non inversible.

démo Prop 1 :

On raisonne par récurrence sur le nb de blocs
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Osq Prop 1 est vraie si A possède p blocs diagonaux.
On considère

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & * \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{A_{p+1}} \end{pmatrix}.$$

. Si A_1 non inv : c'est ok.
. Osq A_1 inversible

On a $A \times \begin{pmatrix} \boxed{A_1^{-1}} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{I_n} & & * \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{A_{p+1}} \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ lemme 1 $= \det(A_1^{-1})$ noté B

On veut calculer det B

Idée : à l'aide des 1 du 1er bloc I_n, en effectuant des opérations sur les colonnes, on tue tous les coeffs des n premières lignes.

Donc, $\det B = \begin{vmatrix} \boxed{I_n} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} A_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{n+1} \end{matrix} \end{vmatrix}$

On applique le lemme 1 et l'hypothèse de récurrence

5) Déterminant de la transposée

$$\det A^T = \det A$$

démo :

Déjà, si A non inv

Rappel : R^x A inv $\Leftrightarrow$ A^T inv

Csq A^T non inv

donc, $\det A = \det A^T = 0$

cas A inv :

Lemme : Si P est une matrice élémentaire :

$\det P^T = \det P$

démo :

3 types :

. transvection : $\begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$ $\quad \uparrow j \quad i \neq j$

. si $j > i$: ok car triang. sup donc det = 1

. si $j < i$: on élimine le α à l'aide d'opérations sur les colonnes donc det = 1

Bilan : $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T}_{\det 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}}_{\det 1}$

CCL : P transvection $\Rightarrow \det P^T = \det P$

. $X_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 \; 0 \; 1 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 1 \; 0 \; 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

Rq : on a $\det X_{ij} = -1$

On a $X_{ij}^T = X_{ij}$

. $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \lambda \; 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ égale à sa transposée

démo : Soit A inv

On échelonne réduit A : c'est I_n

Soient $P_1, \dots P_\ell$ des matrices élémentaires tq

$P_\ell \dots P_2 P_1 A = I_n$ (1)

donc $A^T P_1^T P_2^T \dots P_\ell^T = I_n$ (2)

$(1) \to \det A = \dfrac{1}{\det P_1 \times \dots \times \det P_\ell}$

$(2) \to \det A^T = \dfrac{1}{\det P_1^T \times \dots \times \det P_\ell^T}$ ⊜ d'après le lemme

Corollaire !!!

- Tout ce qu'on a dit sur les colonnes est vrai pour les lignes
- $\det(\cdot)$ est multilinéaire alternée par rapport aux lignes
- !!! Les opérations $L_i \leftarrow L_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j L_j$

  laissent inchangé le déterminant

? A antisymétrique dans $M_n(\mathbb{R})$, n impair $\Rightarrow$ A non inversible

Corollaire : pour les matrices triangulaires inférieures.

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & * & \ddots & \\ & & & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{p} \det A_i$$

6) !!! Développement selon une ligne ou une colonne

Notations :

- $A \in M_n(\mathbb{K}) \quad (n \geq 2)$
- si $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note A_{ij} la matrice extraite de A obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$i = 2$ et $j = 3$

Alors $A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 11 & 12 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Théorème :</u>

. Développement p/r à une ligne

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

. Développement p/r à une colonne

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Rq : Dessinons $\left((-1)^{i+j}\right)_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$

pour $i = j = 1$: c'est $(-1)^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n+1} \\ -1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple :

Calculons
$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Je peux choisir n'importe quelle ligne, nfq colonne pour faire mon devt. En général, on choisit une ligne/colonne avec bcp de zéros

$$\Delta = -2 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times \left(6 \times \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + 5 \times \left(1 \times \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 7 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -2 \times 6 \times 7 + 5 \times (8 \times 2 - 9 - 7(3 \cdot 2 - 4))$$

$= etc.$

démo : On fait la preuve sur les colonnes.

Soit $j_0 \in [\![1, n]\!]$

On écrit
$$\det A \overset{\det}{=} \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \dots \middle| \underbrace{\begin{matrix} a_{1j_0} \\ a_{2j_0} \\ \vdots \\ a_{nj_0} \end{matrix}}_{\displaystyle \overset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} \varepsilon_i}} \middle| \dots \middle| C_n \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} \cdot \det \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \dots \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i \middle| \dots \middle| C_n \right)$$

Notons $\Delta_i := \det(C_1 | C_2 | \dots | \varepsilon_i | \dots | C_n)$

Pour calculer Δ_i, on échange la j_0-ième colonne avec la $(j_0 - 1)$ ième colonne.

On obtient $\Delta_i = -\det(C_1 | C_2 \dots \underset{j_0-1}{\varepsilon_i} | C_{j_0-1} | C_{j_0+1} | \dots | C_n)$

$$= \dots = (-1)^{j_0-1} \det \left(\mathcal{E}_i \,\middle|\, C_1 \,|\, C_2 \dots C_{j_0-1} \,|\, C_{j_0+1} \,|\, \dots \,|\, C_n \right)$$

On fait la m̂ chose en plaçant cette fois la i-ième ligne en 1ère position

On obtient que

$$\Delta_i = (-1)^{j_0-1} \cdot (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} \; a_{i2} \dots a_{ij_0-1} \; a_{ij_0+1} \dots a_{in} \\ 0 & \text{“} L_1 - j_0 \text{”} \\ 0 & \text{“} L_2 \text{ moins } j_0 \text{”} \\ 0 & \text{“} L_{i-1} - j_0 \text{”} \\ 0 & \text{“} L_{i+1} - j_0 \text{”} \\ \vdots & \\ 0 & \text{“} L_n - j_0 \text{”} \end{vmatrix}$$

$$\text{ie } \Delta_i = (-1)^{j_0-1} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & * \longrightarrow * \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A_{i,j_0}} \\ 0 & \end{vmatrix}$$

$$\Delta_i = (-1)^{j_0+i-2} \cdot \det A_{i,j_0}$$

IV, Déterminant des endomorphismes

$n := \dim E$, E evf, $n \geq 1$

Rappel: si $f \in L(E)$, on sait définir $tr(f)$

$tr(f) := tr(\mathrm{Mat}_B(f))$ où B est une base de E

En effet, si B' est une autre base de E

On a $tr(\mathrm{Mat}_B(f)) = tr(\mathrm{Mat}_{B'}(f))$

1) Définition

Lemme: Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que A et B sont semblables

Alors $\det A = \det B$

démo : Osq A semblable à B

Soit donc $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PBP^{-1}$

On a $\det(A) = \det(P) \cdot \det(B) \cdot \det(P^{-1})$

$$= \det(P) \cdot \det(B) \cdot \frac{1}{\det(P)}$$

$$= \det(B)$$

Fait : Soit $f \in L(E)$

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E

$$\det\Big(\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{\in M_n(\mathbb{K})}\Big) = \det\Big(\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)}_{\in M_n(\mathbb{K})}\Big)$$

démo : $\mathbb{R}^x$: Notons P la matrice de change^t de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$

ie $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

On sait que $P \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot P$

ie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot P$

d'où le résultat.

Déf : Soit $f \in L(E)$

On appelle déterminant de f et on note $\det(f)$ le déterminant de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E

2) Propriétés

Prop :

Soient $f, g \in L(E)$. Alors, on a :

1) $\det(Id_E) = 1$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \cdot \det(f)$

3) $\det(\underbrace{g \circ f}_{L(E)}) = \underbrace{\det(g)}_{\mathbb{K}} \times \det(f)$

3 bis) On a $\det(g \circ f) = \det(f \circ g)$

4) $\forall p \in \mathbb{N}, \det(f^p) = \det(f)^p$

5) $f \in GL(E) \iff \det(f) \neq 0$
- f est un automorphisme
- f est bij
- $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Dans ce cas, on a : $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$

Et $\forall p \in \mathbb{Z}, \det(f^p) = (\det f)^p$

seulement si f est inversible

3) Déterminant d'une famille de vecteurs

Déf : Soit $\mathcal{B}$ une base de E

Soient $x_1, \dots, x_n \in E$

On note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) := \det \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$

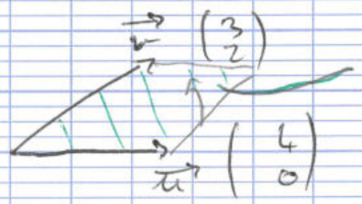
Prop : Soit $\mathcal{B}$ une base de E

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ base de } E \iff \det \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

IV, Interprétation géométrique du déterminant

1) En dimension 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan



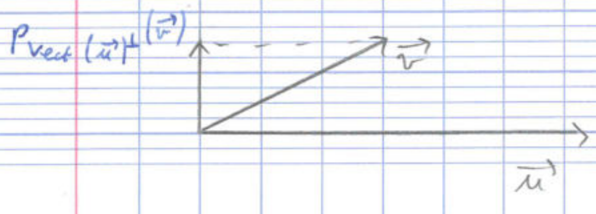
aire $= |\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})| > 0$

Alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$

Prop

$|\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})|$ est l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$

démo : ens



Rq : On a $\hat{m}$ $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u},\vec{v})$ = aire orientée du parallélo

2) En dimension 3

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace :

$\left|\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right|$ est le volume du parallélépipède de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

3) En dimension n

C'est encore vrai.