Chapitre 31 : Variables aléatoires

Notations :

. (Ω, P) un espace probabilisé fini (epf)
. E, F ensembles non vides

Rq : on a $\Omega \neq \emptyset$
ie $(\Omega, P(\cdot))$ epf $\Rightarrow \Omega \neq \emptyset$
En effet, $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$ donc $\Omega \neq \emptyset$

0) Rappels

$f : E \to F$; $A, B \subset F$, $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(F)^I$

On a :

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
b) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

d) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

e) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
f) $f^{-1}(F) = E$

g) $f^{-1}(A \sqcup B) = f^{-1}(A) \sqcup f^{-1}(B)$

h) $f^{-1}\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \bigsqcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

Le tiré-en-arrière, c'est comme l'amour, c'est cool ça marche avec tout

I, Variables aléatoires

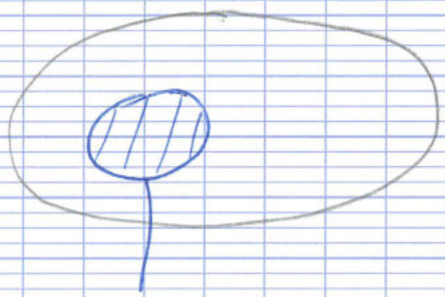
0) Introduction

On lance deux dés : c'est notre expérience aléatoire.
Cela sera modélisé par l'espace probabilisé fini (epf)
R^* : dans ce cas
Si on lance N dés où $N \in \mathbb{N}^*$. On prendra comme epf :

$$\Omega := [\![1, 6]\!]^N$$

ie $\Omega = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \forall i, a_i \in \{1, \dots, 6\} \right\}$

qu'on munit de la probabilité uniforme ie
tous les évènements élémentaires sont équiprobables
ie $\underset{\text{"issue"}}{\forall \omega} \in \Omega$, $P(\underset{\text{c'est un évènement}}{\{\omega\}}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$



Ω
l'univers (des possibles)

$A \subset \Omega$: c'est un évène^t

$P(A)$ mesure la "taille de A" p/r à celle de Ω

Ex d'évè^ts :
$A =$ " la somme des faces est paire "
Déjà, remarquons que la somme de deux nb
est paire ssi ces deux nb ont m̂ parité.
Donc $A = \{ (1,1), (1,3), (1,5), \dots \}$

$= \{(x,y) \mid x,y \in [\![1,6]\!] \text{ pairs}\} \cup \{(x,y) \mid x,y \in [\![1,6]\!] \text{ impairs}\}$

ie $A = \{2,4,6\}^2 \cup \{1,3,5\}^2$

donc $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ (car P est uniforme)

$= \dfrac{|\{2,4,6\}^2 + \{1,3,5\}^2|}{6^2}$

$P(A) = \dfrac{3^2+3^2}{6^2} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

On peut aussi noter P_i : " le dé est tombé sur la face i"
pour $i \in [\![1,6]\!]$
Si i pair, on a $P(A|P_i) = \dfrac{1}{2}$
de m̂ si i impair.

donc, $P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(A|P_i) \cdot P(P_i)$: formule des prob. totales

car $(P_1, P_2, \ldots, P_6)$ forment un syst. complet d'év^t

. On note X le + grand n° obtenu.
. On note Y la somme des n° obtenus.
. On note Z l'écart absolu entre les numéros tiré
(ex : $Z = |6-3|$ si on a tiré 6 et 3)
. On note T le nombre qui vaut :
* 10 si on fait un double
* 50 si on fait un double 6
* -10 si on fait un double 2
* 0 sinon

Alors, X, Y, Z, T sont des ensembles de variables aléatoires.

Questions naturelles :

. Cb vaut la moyenne de T ?

. Est-ce que X et Y sont indépendants ?
ie si je connais la valeur prise par X, est-ce que je peux en déduire une information sur Y ? oui
Non, ils ne sont pas indépendants.

. Peut-on mesurer cette non-indépendance ?
"Est-ce que X et Y sont + non indépendants que Z et T ?"

1) Définition

Déf : Soit E un ens. non vide

Une variable aléatoire (définie sur notre eff (Ω, P)) à valeurs dans E est une application $X : \Omega \to E$

On note X VA ou $X : \Omega \to E$ VA

. Une variable aléatoire est dite réelle si $E \subset \mathbb{R}$

On note $X : \Omega \to E$ VAR
ou X VAR

Exemple : on continue l'ex précédent où $\Omega = [\![1,6]\!]^2$

On regarde
$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \max(x,y)$$
$$Y : \Omega \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x+y$$

$$Z : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto |x-y|$$

$$T : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq y \\ -10 \text{ si } x = y = 1 \\ 50 \text{ si } x = y = 6 \\ 10 \text{ sinon} \end{cases}$$

Rq : Comme Ω est fini, on a toujours que l'image de Ω par X est finie, ie :
on a toujours $X(\Omega)$ fini
Ainsi, quitte à remplacer E par $X(\Omega)$, on pourra toujours supposer E fini
On dit que X est une variable aléatoire car X est un nb attaché à une situation aléatoire.

Soit $X : \Omega \to E$ une VA
L'image de X, notée $\mathrm{Im}(X)$ est l'ensemble $X(\Omega)$
C'est l'ens des valeurs prises par X.
ie on pose $\mathrm{Im}(X) := \{ X(\omega) \mid \omega \in \Omega \}$

On a toujours $\mathrm{Im}(X) \subset E$

Ex :
On a $\mathrm{Im}(X) = [\![1, 6]\!]$
$\mathrm{Im}(Y) = \{ x+y \in E \mid (x,y) \in \Omega \} = [\![2, 12]\!]$

$\mathrm{Im}(Z) = [\![0, 5]\!]$

$\mathrm{Im}(T) = \{0, -10, 50, 10\}$

2) Un exemple

On considère $\Omega = PCSI3 \cup Profs$
muni de la prob. uniforme
On peut considérer

$$X : \Omega \to \{\text{profs, élèves}\}$$
$$\omega \mapsto \begin{cases} \text{prof si } \omega \text{ est un prof} \\ \text{élève sinon} \end{cases}$$

et
$$Y : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto \text{l'âge de } \omega$$

et
$$Z : \Omega \to \{\text{rouge, bleu, vert, jaune, etc..}\}$$
$$\omega \mapsto \text{couleur préférée de } \omega$$

Question : quelle est la proporto de personne dont la couleur préférée est bleu ou rose ?
Est-ce que Z est indépendante de $T : \Omega \to \{\text{fille, garçon}\}$

3) Cas particuliers importants

Déf :
a) Si $A \subset \Omega$, on appelle variable aléatoire indicatrice de A et on note $1\!\!1_A$ **la VAR** :

$$1\!\!1_A : \Omega \to \{0, 1\}$$
$$\omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

Elle est très importante car elle permet d'étudier les évènements avec les outils des variables aléatoires

Rappel : Si $A, B \subset \Omega$ sont des évè^t, on dit que A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Si $P(B) > 0$, on a A et B indépendantes $\Leftrightarrow P(A) = P_B(A)$

b) Soit $a \in E$

La variable aléatoire constante égale à a est la VA :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow E \\ \omega &\longmapsto a \end{aligned}$$

(?) Que vaut $\mathrm{Im}(\mathbb{1}_A)$?

⚠ $\emptyset$ est un évè^t : c'est l'év^t impossible

on a $\mathrm{Im}(\mathbb{1}_\emptyset) = \{0\}$

$\mathrm{Im}(\mathbb{1}_\Omega) = \{1\}$

sinon $\mathrm{Im}(\mathbb{1}_A) = \{0, 1\}$

4) Evènements associés à une VA

a) Notations

Soit $X : \Omega \to E$ VA

On note :

pour $a \in E$:

$$(X = a) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$$

c'est un évè^t : c'est l'év^t constitué des cas, des issues pour lesquelles X vaut a.

C'est $(X = a) = X^{-1}(\{a\}) = X^{\langle -1 \rangle}[\{a\}]$

c'est le tiré en arrière de $\{a\}$ par X.

Rq : on peut aussi la noter $[X=a]$

Exemple :

On lance deux dés

On distingue ces deux dés, par ex en disant qu'il y a un 1^{er} et un 2^{nd}

On note X_i le numéro obtenu pour le i-ième dé

On a $X = \max(X_1, X_2)$

X : VA

: VAR

: $\Omega \to \mathbb{R}$

$\max(X_1, X_2)$: $\Omega \to \mathbb{R}$

Ω

$\downarrow$

$\mathbb{R}$

$\forall i \in [\![1,6]\!] \quad P_i = (X_1 = i)$

Pour $A \subset E$ ie A un ens. de valeurs possibles

On note :

$$(X \in A) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

ie c'est $X^{-1}(A)$

Si X VAR et si $x \in \mathbb{R}$, on notera :

$$(X \leq x) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$$

$(X < x)$, $(X \geq x)$, $(X > x)$

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on pourra aussi noter $(a \leq X \leq b)$

Tous ces objets sont des évènements.

Quand on considérera leur probabilité, on écrira $P(X \in a)$ au lieu de $P((X \in A))$, etc.

Rq : Soit X VAR et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\overline{(X \leq a)} = (X > a)$$

. Si $a, b \in \mathbb{R}$, on a $(a \leq X \leq b) = (X \geq a) \cap (X \leq b)$

b) Système complet d'évènements associée à X (SCE)

Prop

Soit $X : \Omega \to E$ VA avec E fini
Alors la famille d'évènements $((X = a))_{a \in E}$ est un SCE.

Soit X VA
Alors la famille d'évènements $((X = a))_{a \in \mathrm{Im}(X)}$ est un SCE

Rq : Si $a \neq b$ sont des élé^t de E, alors ⚠ R^x
les évè^t $(X = a)$ et $(X = b)$ sont incompatibles.

démo : Mq $(X = a) \cap (X = b) = \emptyset$
Mini-absurde
Osq $(X = a) \cap (X = b) \neq \emptyset$
Soit donc $\omega \in (X = a) \cap (X = b)$
On a donc
. $\omega \in (X = a)$ donc $X(\omega) = a$
. $\omega \in (X = b)$ donc $X(\omega) = b$
donc $a = b$ C'est absurde.

Mq cette famille d'évè^t recouvre l'univers

Je mq $\bigcup_{x \in E} (X = x) = \Omega$

Rappel : par définition :
$$\bigcup_{x \in E} (X = x) = \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists x \in E : X(\omega) = x \right\}$$

Déjà, on a $\forall x \in E$, $(X = x) \subset \Omega$

Puis, mq $\bigcup_{x \in E} (X = x) \subset \Omega$

Mq $\Omega \subset \bigcup_{x \in E} (X = x)$

Soit $\omega \in \Omega$

Mq $\omega \in \bigcup_{x \in E} (X = x)$

ie mq $\exists\, x \in E : \omega \in (X = x)$

On a $\omega \in (X = X(\omega))$

Rq : on peut aussi écrire $\bigcup_{x \in E} (X = x) = \bigcup_{x \in E} X^{-1}(\{x\})$
$$= X^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{x \in E} \{x\}}_{E} \Big)$$
$$= X^{-1}(E)$$
$$= \Omega$$

Corollaire : Soit $X : \Omega \to E$ VA avec E fini

. Soit A un événement (ie $A \subset \Omega$)

Alors $P(A) = \sum_{x \in E} P(A \cap (X = x))$

. Soit X VA

Soit A un évènet. Alors :
$$P(A) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} P(A \cap (X = x))$$

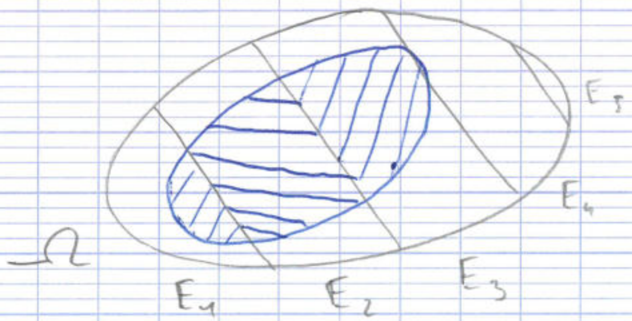
démo :
Si $(E_1, \dots, E_N)$ SCE , on a :

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{N} E_i \right)$$

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{N} A \cap E_i$$

Comme l'union est disjointe, on a

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A \cap E_i)$$



Bilan : X VA
1) $((X = x))_{x \in \mathrm{Im}(X)}$ SCE

2) Si A évènement, on a :
$$P(A) = \underbrace{\sum_{x \in \mathrm{Im}(X)}}_{\text{c'est une somme finie}} P(A \cap (X = x))$$

c) Faits

X VA

A, B des ensembles de valeurs

$(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles de valeurs

ie soit $X : \Omega \to E$

et $A, B \subset E$

et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$

ou soit X VA

soient $A, B \subset \mathrm{Im}(X)$ et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(\mathrm{Im}(X))^I$

Alors, on a :

. $(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B)$

. $(X \in A \sqcup B) = (X \in A) \sqcup (X \in B)$

. $(X \in \bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (X \in A_i)$

. $(X \in \bigsqcup_{i \in I} A_i) = \bigsqcup_{i \in I} (X \in A_i)$

Si I est fini :

$$P(X \in \bigsqcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(X \in A_i)$$

. $(X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B)$

. $(X \in \bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (X \in A_i)$

Fait : X VA

A ensemble de valeurs

Alors $(X \in A) = (X \in A \cap \mathrm{Im}(X))$

En pratique, on peut tjrs se restreindre aux valeurs prises par X.

démo :

On a $A \cap \mathrm{Im}(X) \subset A$

donc $X^{-1}(A \cap \mathrm{Im}(X)) \subset X^{-1}(A)$

ie $(X \in A \cap \mathrm{Im}(X)) \subset (X \in A)$

Rqt

Mq $(X \in A) \subset (X \in A \cap \mathrm{Im}(X))$

Soit $\omega \in (X \in A)$

On a donc $X(\omega) \in A$

De plus, on a $X(\omega) \in X(\Omega)$

ie $X(\omega) \in \mathrm{Im}(X)$

donc : $X(\omega) \in A \cap \mathrm{Im}(X)$

ie $\omega \in X^{-1}(A \cap \mathrm{Im}(X))$

ie : $\omega \in (X \in A \cap \mathrm{Im}(X))$

Ex : Je lance 2 dés

Je note X la somme des n° obtenus

Alors on a $\mathrm{Im}(X) = [\![2, 12]\!]$

et on a
$$\begin{aligned}(X \text{ pair}) &= (X \in 2\mathbb{Z}) \\ &= (X \in 2\mathbb{Z} \cap \mathrm{Im}(X)) \\ &= (X \in 2\mathbb{Z} \cap [\![2, 12]\!]) \\ &= (X \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\})\end{aligned}$$

Corollaire : X VA
A un ens. de valeurs

Alors : $(X \in A) = \bigsqcup_{a \in A} (X = a)$

Exemple :
X pair $= (X = 2) \sqcup (X = 4) \ldots$

démo : On a $A = \bigsqcup_{a \in A} \{a\}$

donc d'après les faits énoncés ci-dessus :

$$(X \in A) = \left(X \in \bigsqcup_{a \in A} \{a\}\right)$$
$$= \bigsqcup_{a \in A} \left(X \in \{a\}\right)$$
$$= \bigsqcup_{a \in A} (X = a)$$

Corollaire : Si A est fini :

$$P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X = a)$$

Rq : Soit X VA
On a : $\left(X \in \mathrm{Im}(X)\right) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{Im}(X)} (X = x)$

ici : $A = \mathrm{Im}(X)$

Or, $(X \in \mathrm{Im}(X)) = \Omega$

donc $\Omega = \bigsqcup_{x \in \mathrm{Im}(X)} (X = x)$

ie $\left((X = x)\right)_{x \in \mathrm{Im}(X)}$ SCE

Fait : $(X \in \mathrm{Im}(X)) = \Omega$

ie $(X \in \mathrm{Im}(X))$ est certain

5) Structure sur les VAR

Fait :

a) L'ensemble des VAR est un $\mathbb{R}$-ev

b) De plus, si X, Y VAR alors $X \times Y$ est aussi une VAR

Reformula°:

a) Soit (Ω, P) eff

Alors $\{ X : \Omega \to \mathbb{R} \}$ est un $\mathbb{R}$-ev

ie $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev

b) Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ VAR

alors $X \times Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \mapsto X(\omega) \underset{\text{fois}}{\times} Y(\omega)$

est une VAR

ou l'ensemble des VAR est une $\mathbb{R}$-algèbre

De façon informelle, une VAR X est un nombre réel qui dépend de la situation.

On pourra noter $VA(\Omega, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des VAR définies sur Ω.

6) Loi d'une variable aléatoire

C'est un concept important car la loi d'une VA contient une partie essentielle de l'info sur la VA sans faire réf à l'univers.

Ex : je considère la VAR X donnant le nb de personnes attendant devant la poste le lundi à 8h avant l'ouverture.

On a $\mathrm{Im}(X) \subset \mathbb{N}$

En réalité, on a $\mathrm{Im}(X) \subset [\![0, 8 \cdot 10^9]\!]$

ou $\mathrm{Im}(X) \subset [\![0, 150]\!]$

Ici, ça va être très difficile de déterminer Ω

Mais à l'aide d'une étude statistique (tous les lundis pendant 1 an, je compte le nb de personnes), je peux déterminer :

$\mathrm{Im}(X)$, la moyenne de X, ...

"la répartition de X"

⚠ $P(X = \omega)$ pas homogène

Déf : Soit $X : \Omega \to E$ VA

La loi (de probabilité) de X est l'application de E dans $[0,1]$ noté P_X définie par :

$$P_X : E \to [0,1]$$
$$a \mapsto P(X = a)$$

Exemple : Soit X une VAR t.q.

1) $\mathrm{Im}(X) = [\![0, 5]\!]$

2) $P(X=0) = \frac{1}{2}$, $P(X=1) = \frac{1}{4}$, etc...

ou (2ᵉ année)
Soit X VAR tq $\mathrm{Im}(X) = \mathbb{N}$
et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = a_k$

⚠

où $\sum a_k \xrightarrow{CV}$ et $\forall k$, $a_k \in [0, 1]$
et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 1$

on ne dit pas : "la série converge vers 1"

<u>Fait</u> : Si je connais P_X la loi de X, alors
je connais la probabilité de tout évènement via X
Soit $A \subset \mathrm{Im}(X)$
Alors $P(X \in A) = \sum_{a \in A} P_X(a)$

<u>démo</u> : On a $(X \in A) = \bigsqcup_{a \in A} (X = a)$

donc comme A est fini, on a :

$$P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X = a)$$
$\rightarrow$ c'est $P_X(a)$

<u>Remarque</u>
Deux VA peuvent avoir la m̂ loi sans être égales

1°) On peut avoir X, Y VA ayant m̂ loi mais
définies sur des univers $\neq^{ts}$

Ex : On prend
$\Omega = \{$ tous les lundis possibles $\}$

et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$
lundis $\longmapsto$ le nb O⁷ attendant devant la poste

et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$
lundi $\longmapsto$ nb de ♀ devant la porte

Ici, en partant du principe que le sexe n'a pas de rôle dans cette exp. aléatoire
On aura $P_X = P_Y$
ie $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k)$
proba qu'il y ait k ♂ devant la porte

mais ici X et Y sont déf sur le $\hat{m}$ univers.

Ex :
X = la longueur d'une baguette de pain tirée aléatoirement
Y = la taille d'une personne tirée aléatoirement

On peut renormaliser par la moyenne pour déléguer

Ex :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si je fais pile} \\ 0 & \text{si je fais face} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si mon dé tombe sur 4, 5 ou 6} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fait !!

$$\sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} P_X(x) = 1$$

démo :

R* : En probabilité, souvent avant de raisonner sur les probas ie $P(\cdot)$, on raisonne sur les évènements

1°) on montre qqch sur les évènements

2°) on passe à la proba

Ici, on a
$$(X \in \mathrm{Im}(X)) = \Omega$$
$$\underset{(*)}{=} \bigsqcup_{x \in \mathrm{Im}(X)} (X = x)$$

Ĉ l'union est finie, on passe $(*)$ à $P(\cdot)$.

On obtient :
$$P(\Omega) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} P(X = x)$$
$$\text{ie} \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} P_X(x) = 1$$

mieux : on utilise le fait précédent
$$P(X \in A) = \sum_{a \in A} P_X(a) \quad \text{pour } A = \mathrm{Im}(X)$$

Exemple : en pratique $p_X(\cdot)$, la loi de X sera représentée ds un tableau

$k \in \mathrm{Im}(X)$	0,1	-5	8	50
$p_X(k)$	0,6	0,3		0,01

$1 - 0{,}6 - 0{,}3 - 0{,}01$

Ex : X est le gain à un jeu d'argent

Pour déterminer P_X

⚠ R^X dès qu'on considère une VA X on doit d'abord déterminer, dire $\text{Im}(X)$

R^X : Avant de déterminer $P(\text{qqch})$, on raisonne sur les évènements

7) !! Image d'une VA par une application

Déf : Soit $X : \Omega \to E$ VA
Soit $f : E \to F$

Exemple : X VAR et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \arctan(x)$

Alors l'image de X par f est la VA notée $f(X)$ définie par : $f(X) : \Omega \xrightarrow{X} E \xrightarrow{f} F$
ie $f(X) := f \circ X$

Faits : $X : \Omega \to E$ VA
$f : E \to F$

On s'intéresse à $f(X)$

a) Soit $B \subset F$
Alors $\left(f(X) \in B\right) = \left(X \in f^{-1}(B)\right)$

b) Soit $y \in F$. Alors :
$\left(f(X) = y\right) = \left(X \in f^{-1}(\{y\})\right)$

c) Soit $y \in F$. Alors

$$\left(f(X) = y\right) = \bigsqcup_{\substack{x \in \text{Im}(X) \\ \text{tq } f(x) = y}} (X = x)$$

d) Donc en passant aux probas :

$$P\left(f(X) = y\right) = \sum_{\substack{x \in \text{Im}(X) \\ \text{tq } f(x) = y}} P(X = x)$$

e) donc, on en déduit la relation entre la loi $P_{f(X)}$ de $f(X)$ et P_X de X

$$\forall y \in F, \; P_{f(X)}(y) = \sum_{\substack{x \in \text{Im}(X) \\ \text{tq } f(x) = y}} P_X(x)$$

Exemple

Soit X une VAR dont la loi est donnée

k	-2	-1	0	1
$P(X = k)$	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/3$

Quelle variable image $f(X)$?

a) $|X| = f(X)$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

b) $1\!\!1_{\{1\}}(X)$

c) $\exp(X)$

Déterminons la loi de ces VA images

(?) X VA , $X : \Omega \to E$, $x \in E$
A-t-on $P_X(x) = 0 \Leftrightarrow (X = x)$ impossible ?

a) On a $\mathrm{Im}(X) = \{-2, -1, 0, 1\}$

donc $\mathrm{Im}(|X|) \underset{\mathbb{R}^X}{=} \{0, 1, 2\}$

et on a : $(|X| = 0) \overset{\mathbb{R}^X}{=} (X = 0)$

donc $P_{|X|}(0) = \frac{1}{6}$

De même : $(|X| = 1) = (X = 1) \sqcup (X = -1)$

donc $P_{|X|}(1) = P_X(1) + P_X(-1)$
$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

Enfin $(|X| = 2) = (X = 2) \sqcup (X = -2)$
$= (X = -2)$

donc $P_{|X|}(2) = P_X(-2) = \frac{1}{4}$

b) On a $\mathrm{Im}\left(1_{\{1\}}(X)\right) = \{0, 1\}$

On doit déterminer
$P_{1_{\{1\}}(X)}(0)$ et $P_{1_{\{1\}}(X)}(1)$

On a $(\underbrace{1_{\{1\}}}_{\text{c'est } f : \mathbb{R} \to \{0,1\},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}(X) = 0) = (X \neq 1)$

$(1\!\!1_{\{1\}}(X) = 0) = (X = -2) \sqcup (X = -1) \sqcup (X = 0)$

donc $P_{1\!\!1_{\{1\}}(X)}(0) = P_X(-2) + P_X(-1) + P_X(0)$

Mieux : $(1\!\!1_{\{1\}}(X) = 1) = (X = 1)$

donc $P_{1\!\!1_{\{1\}}(X)}(1) = P_X(1) = \frac{1}{3}$

donc comme $\mathrm{Im}\left(1\!\!1_{\{1\}}(X)\right) = \{0, 1\}$

donc $P_{1\!\!1_{\{1\}}(X)}(0) = \frac{2}{3}$

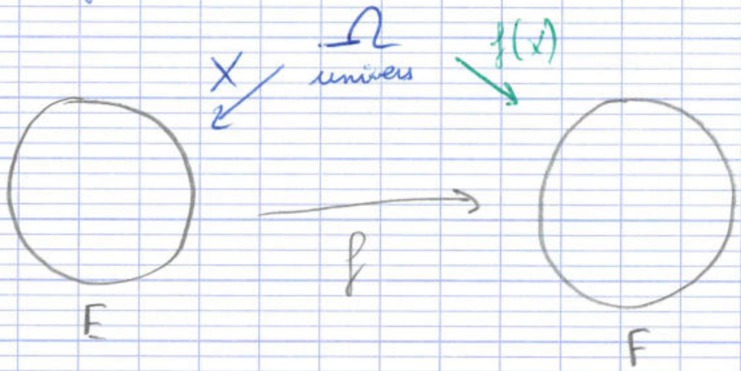
c) On a $\mathrm{Im}(\exp(X)) = \{e^{-2}, e^{-1}, 1, e\}$

et si $k \in \mathbb{Z}$: $(\exp(X) = e^k) = (X = k)$

car exp est injective

et $P_{\exp(X)}(e^k) = P_X(k)$

<u>démo du fait</u>

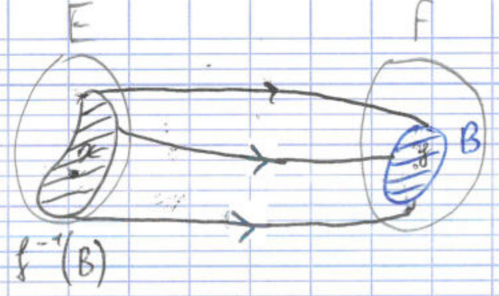


Ce diagramme commute ie $f(X) = f \circ X$

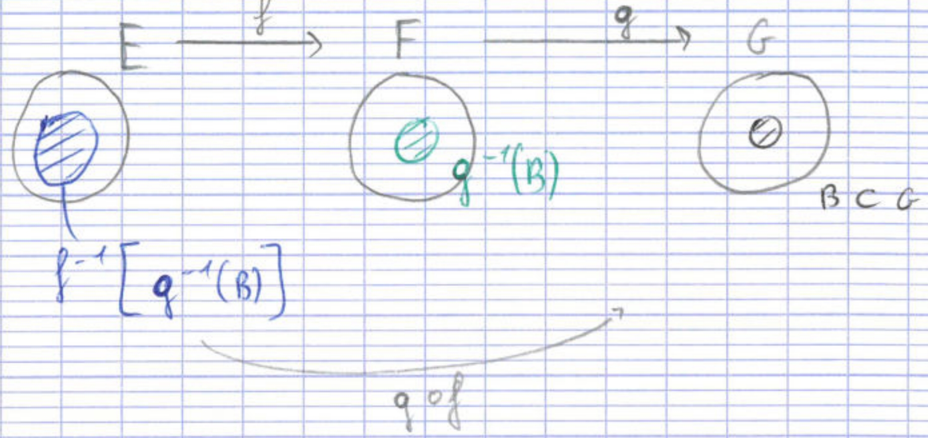
On a bien $f(X) : \Omega \to F$

a) Soit $B \subset F$

Mq $(f(X) \in B) = (X \in f^{-1}(B))$ $(*)$



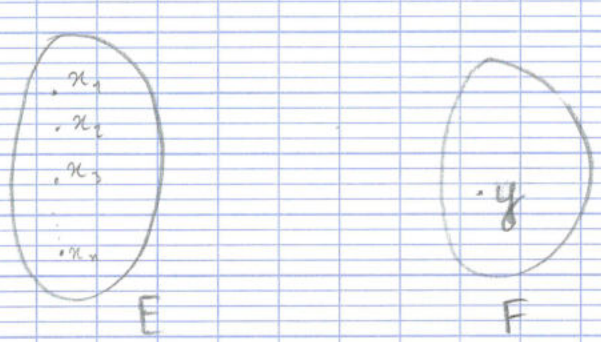
L'égalité (*) vient de la formule de théorie des ensembles pour les tirés en arrière



On a $g \circ f^{\langle -1 \rangle}[B] = f^{\langle -1 \rangle}\left[g^{\langle -1 \rangle}[B]\right]$

dans le cas $\Omega \xrightarrow{X} E \xrightarrow{f} F$

b)



On a
$$\begin{aligned}
\big(f(X) = y\big) &= \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; f(X)(\omega) = y \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; f(X(\omega)) = y \right\} \\
&= \big(f(X) \in \{y\} \big) \\
&= \big(X \in f^{-1}(\{y\}) \big)
\end{aligned}$$

c) Rappel : $X \in A = \bigsqcup_{a \in A} (X = a)$

donc $\left(X \in f^{\langle -1 \rangle}(\{y\})\right)$

$$= \bigsqcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} (X = x)$$

$$= \bigsqcup_{\substack{x \in E \\ \text{tq } f(x) = y}} (X = x)$$

d) On remplace E par $\mathrm{Im}(X)$

$$\left(f(X) = y\right) = \bigsqcup_{\substack{x \in \mathrm{Im}(X) \\ \text{tq } f(x) = y}} (X = x)$$

Or, $\mathrm{Im}(X)$ est finie. donc on passe aux probas

On obtient $P(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{Im}(x) \\ \text{tq } f(x) = y}} P(X = x)$

Autre démo :

Rappel : $(X \in A) = (X \in A \cap \mathrm{Im}(X))$

cf "X un dé" $(X \text{ pair}) = (X \in 2\mathbb{Z})$

$= (X \in 2\mathbb{Z} \cap [\![1,6]\!])$

$= (X \in \{2, 4, 6\})$

donc $(f(X) = y) = \left(X \in f^{-1}(\{y\})\right)$ $f^{-1}(y)$ n $\exists$ pas

$$= \left(X \in f^{-1}(\{y\}) \cap \mathrm{Im}(X)\right)$$

$$= \bigsqcup_{x \in \mathrm{Im}(x) \cap f^{-1}(\{y\})} (X = x)$$

d'où $\left(f(X)=y\right) = \bigsqcup_{\substack{x\in \mathrm{Im}(X) \\ \text{tq } f(x)=y}} (X=x)$

e) On a mq

$$P\left(f(X)=y\right) = \sum_{\substack{x\in \mathrm{Im}(X) \\ \text{tq } f(x)=y}} P(X=x)$$

c'est $P_{f(X)}(y)$; $P_X(x)$

Bilan : $P_{f(X)}(y) = \sum_{\substack{x\in \mathrm{Im}(X) \\ f(x)=y}} P_X(x)$

Contre-exemple important

X VA ; $X : \Omega \to E$

$x \in E$

A-t-on $P_X(x) = 0 \Rightarrow (X=x)$ est impossible ?

On prend $\Omega = [\![1,6]\!]$

muni de la prob. déf par

$P(\{6\}) = \frac{1}{5}$, $P(\{5\}) = \frac{1}{5}$, ..., $P(\{2\}) = \frac{1}{5}$

et $P(\{1\}) = 0$

Cet esp (Ω, P) vient modéliser l'expérience aléat. d'un dé pipé qui ne tombe jms sur 1

Soit X la VAR qui donne la face sur laquelle le dé est tombé

On a $X : \Omega \to \mathbb{R}$
$k \mapsto k$

On a $P_X(6) = P(X=6)$

On a $(X=6) = \{ k \in \Omega \mid X(k) = 6 \}$

$= \{6\}$

donc $P(X=6) = \frac{1}{5}$ par déf de $P(\cdot)$

de m̂ $\forall k \in [\![2,6]\!], P(X=k) = \frac{1}{5}$

On a $\mathrm{Im}(X) := X(\Omega)$

$= [\![1,6]\!]$

Enfin, $P_X(1) = P(X=1)$

On $(X=1) = \{1\} \neq \emptyset$

cet évé^t $(X=1)$ est possible.

Par déf, l'évé^t impossible est $\emptyset$.

donc $(X=1)$ n'est pas l'évé^t impossible

Mais $P(X=1) = 0$

II, Couples de VA

1) Définition

Déf : Soient $X : \Omega \to E$ et $X : \Omega \to F$ des VA

Alors, la VA (X,Y) appellée couple (X,Y) est l'application :

$$(X,Y) : \Omega \longrightarrow E \times F$$
$$\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

2) Image du couple

Fait : On a

1) $\mathrm{Im}((X,Y)) \subset \mathrm{Im}(X) \times \mathrm{Im}(Y)$

2) l'inclusion est stricte en g^{al}

démo :

1) Soit $\omega \in \Omega$. Alors

$$(X,Y)(\omega) = (\underset{\mathrm{Im}(X)}{\underset{\cap}{X(\omega)}}, \underset{\mathrm{Im}(Y)}{\underset{\cap}{Y(\omega)}})$$

$$\in \mathrm{Im}(X) \times \mathrm{Im}(Y)$$

2) On lance 2 dés, on note :

X : la ⊕ grande des 2 faces

Y : la somme des 2 faces

On a $\mathrm{Im}(X) = [\![1,6]\!]$

$\mathrm{Im}(Y) = [\![2,12]\!]$

On a $\mathrm{Im}((X,Y)) \subset [\![1,6]\!] \times [\![2,12]\!]$

On prend $(1,12) \in [\![1,6]\!] \times [\![2,12]\!]$

On note D_1 la VA : la face du 1^{er} dé

D_2 la VA : face du $2^{ème}$ dé

On a $X = \max(D_1, D_2)$

$Y = D_1 + D_2$

Si $X(\omega) = 1$, alors $\begin{cases} D_1(\omega) = 1 \\ D_2(\omega) = 1 \end{cases}$

donc $Y(\omega) = 2$

donc $\forall \omega \in \Omega$, $(X(\omega), Y(\omega)) \neq (1,12)$

Ie $(1,12) \notin \mathrm{Im}((X,Y))$

C'est pck X et Y ne sont pas indépendantes

3) Évènements associés à un couple

On note $(X \in A, Y \in B) := ((X,Y) \in A \times B)$

$(X = a, Y = b) := ((X,Y) = (a,b))$

Fait : $(X \in A, Y \in B) = (X \in A) \cap (Y \in B)$

démo : Soit $\omega \in \Omega$

On a $\omega \in (X \in A, Y \in B)$

$\iff \omega \in ((X,Y) \in A \times B)$

$\iff (X,Y)(\omega) \in A \times B$

$\iff (X(\omega), Y(\omega)) \in A \times B$

$\iff X(\omega) \in A$ et $Y(\omega) \in B$

$\iff \omega \in (X \in A)$ et $\omega \in (Y \in B)$

$\iff \omega \in (X \in A) \cap (Y \in B)$

Fait :

$$\left(X = x, Y = y\right)_{\substack{x \in \mathrm{Im}(X) \\ y \in \mathrm{Im}(Y)}}$$

est un SCE

Corollaire : A évènement

$$P(A) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{Im}(X) \\ y \in \mathrm{Im}(Y)}} P\left(A \cap (X = x, Y = y)\right)$$

démo : exo

4) Quelques propriétés

Fait : $$(X \in A, Y \in B) = \bigsqcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} (X = x, Y = y)$$

Prop : X, Y VAR
$a \in \mathbb{R}$

$$P(X + Y = a) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{Im}(X) \\ y \in \mathrm{Im}(Y) \\ \text{tq } x+y=a}} P(X = x, Y = y)$$

démo :

- $X + Y$ peut ê vue comme une VA image
- On pose $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- On a alors $X + Y = s((X, Y))$

donc
$$\begin{aligned}(X + Y = a) &= (s(X, Y) = a) \\ &= \bigsqcup_{\substack{(x,y) \in \mathrm{Im}(X,Y) \\ \text{tq c) de 7)} \\ s(x,y) = a}} ((X, Y) = (x, y)) \\ &= \bigsqcup_{\substack{x \in \mathrm{Im}(X) \\ y \in \mathrm{Im}(Y) \\ x+y=a}} (X = x, Y = y)\end{aligned}$$

Puis ĉ la $\bigsqcup$ est finie et $\mathrm{Im}(X)$, $\mathrm{Im}(Y)$ sont finis (car Ω fini), on passe à $P(\cdot)$

5) La loi conjointe

Déf : La loi conjointe de X et de Y est la loi de (X,Y)

c'est $P_{(X,Y)} : E \times F \longrightarrow [0,1]$
$(a,b) \longmapsto P(X=a, Y=b)$

Notation

Si X VA à valeurs dans E ie $X : \Omega \to E$, on notera $X \in VA(E)$

Idée 1 : la loi conjointe de X et Y est un tableau à deux entrées

Idée 2 : Si je connais la loi conjointe de X et Y je peux retrouver la loi de X et la loi de Y

Idée 3 : si je connais la loi de X et si je connais la loi de Y, je ne peux pas trouver la loi conjointe de X et Y

Exemple de loi conjointe

On tire 2 nbs au hasard entre 1 et 3. On note X la somme de ces dés et Y la + grde des valeurs

On a $Im(X) = [\![2,6]\!]$
$Im(Y) = [\![1,3]\!]$

Calculons la loi conjointe de X et Y
ie on cherche $P(X=x, Y=y)$
pour $x \in Im(X)$, $y \in Im(Y)$

On a

$y \backslash x$	2	3	4	5	6	loi de Y $P(Y=y)$
1	1/9	0	0	0	0	1/9
2	0	2/9	1/9	0	0	3/9
3	0	0	2/9	2/9	1/9	5/9
loi de X $P(X=x)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9	1

On prend $\Omega = [\![1,3]\!]^2$

On a $(Y=1) = \{(1,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } (Y=1) \subset (X=2) \\ \text{et } (X=2) \subset (Y=1) \end{array}\right\} \text{ si } Y=1 \text{ alors } X=2$$

<u>Exemple</u> on cherche X, Y_1, Y_2 tq Y_1 et Y_2 ont la m̂ loi mais (X, Y_1) et (X, Y_2) ont des lois conjointes $\neq^{tes}$

$X = 0, 1$ avec équiprob (pile ou face)

$Y_1 = 0, 1$

$$Y_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } X = Y_1 \\ 1 & \text{si } X \neq Y_1 \end{cases}$$

On lance deux pièces : on note $X=0$ si la 1ère pièce tombe sur face et $X=1$ sinon

On prend $\Omega := \{\text{pile}, \text{face}\}^2$

$$\text{On a } X = \Omega \longrightarrow \{0,1\}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = \text{face} \\ 1 & \text{si } x = \text{pile} \end{cases}$$

et $Y_1 : \Omega \to \{0,1\}$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } y = \text{face} \\ 1 \text{ si } y = \text{pile} \end{cases}$$

et $Y_2 : \Omega \to \{0,1\}$
$$\omega \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } X(\omega) = Y_1(\omega) \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Calculons la loi de X

On a $P(X=0) = \frac{1}{2} = P(X=1)$ (sans justification)

$(X=0) = \{(\text{face}, \text{pile}), (\text{face}, \text{face})\}$

donc $P(X=0) = \frac{|(X=0)|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

de m̂ pour $P(X=1)$

Ie $P_X : \{0,1\} \to [0,1]$
$$0 \mapsto 1/2$$
$$1 \mapsto 1/2$$

De m̂ on trouve $P_{Y_1} : \{0,1\} \to [0,1]$
$$0 \mapsto 1/2$$
$$1 \mapsto 1/2$$

donc on a $P_X = P_{Y_1}$ mais $X \neq Y_1$

Regardons Y_2

$\mathrm{Im}(Y_2) = \{0,1\}$

On a $(Y_2 = 0) = \{(\text{pile}, \text{pile}), (\text{face}, \text{face})\}$

donc, on a $P(Y_2 = 0) = \frac{|(Y_2=0)|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

donc $P(Y_2 = 1) = 1 - P(Y_2 = 0) = \frac{1}{2}$

donc $P_X = P_{Y_1} = P_{Y_2}$

Ici, le contre-exemple ne marche pas

6) Lois marginales

<u>Déf</u>: Les lois marginales de (X, Y) sont les lois P_X de X et P_Y de Y.

<u>Fait</u>: Connaissant $P_{(X,Y)}$ je peux trouver P_X et P_Y
On a : $\forall x \in E$,

$$P(X=x) \longleftarrow P_X(x) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P_{(X,Y)}((x,y))$$

$$P(X=x, Y=y)$$

et de m̂ pour P_Y

<u>démo</u>: c'est easy !
En effet, $(Y=y)_{y \in \mathrm{Im}(Y)}$ est un SCE

donc R^x qd j'ai un SCE je peux analyser n'importe quel évènet selon ce SCE
ie $A = \bigsqcup_{y \in \mathrm{Im}(Y)} A \cap (Y=y)$

ici $(X=x) = \bigsqcup_{y \in \mathrm{Im}(Y)} (X=x) \cap (Y=y)$

$= \bigsqcup_{y \in \mathrm{Im}(Y)} (X=x, Y=y)$

ĉ l'union est disjointe et finie, on passe à la proba
on obtient $P(X=x) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} (X=x, Y=y)$

Contre-exemple à la réciproque

1/4	1/4	1/2
1/4	1/4	1/2
1/2	1/2	

et

1/8	3/8	1/2
3/8	1/8	1/2
1/2	1/2	

ce tableau n'est pas la loi de 2 VA indépendantes

7) Lois conditionnelles

$X \in VA(E)$, $Y \in VA(F)$

Soit $y \in F$ tq $P(Y=y) > 0$

Déf : La loi conditionnelle de X sachant que $(Y=y)$

est $P_{X|(Y=y)} : E \to [0,1]$
$x \mapsto P\big((X=x) \mid (Y=y)\big) = P_{(Y=y)}(X=x)$

III, Indépendance des VA

⚠ Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'évèt, on dit que les A_i sont mutuellet indépendants ssi

$$\forall J \subset I, \; P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

à ne pas confondre avec les A_i sont 2 à 2 indépendants

⚠ indépendance et incompatibilité

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ $\qquad$ $P(A\cap B) = 0$

1) Indépendance de deux VA

a) Définition

Déf : Soient $X \in VA(E)$
$Y \in VA(F)$

On dit que X et Y sont indépendants ssi

$\forall x \in E, \forall y \in F$, $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants

ie ssi $\forall x \in E, \forall y \in F,$

$$(*) \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Rq : il suffit de vérifier $(*)$ pour $x \in \mathrm{Im}(X)$ et $y \in \mathrm{Im}(Y)$

Exemple : Je lance 2 dés
Je note X la somme des n° obtenus
et Y le + grand des n° obtenus
Alors X et Y ne sont pas indépendants

on a $P(X = 2, Y = 6) = 0$
mais $P(X = 2) > 0$ et $P(Y = 6) > 0$
donc $P(X = 2, Y = 6) \neq P(X = 2) \cdot P(Y = 6)$

Rq : On peut mq
hyp : $\forall A \in \Omega,\ P(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$
ou $\forall x \in \mathrm{Im}(X),\ P(X = x) = 0 \Rightarrow (X = x) = \emptyset$

X et Y indépendants $\Rightarrow \mathrm{Im}(X \times Y) = \mathrm{Im}(X) \times \mathrm{Im}(Y)$

Rq : X et Y indépendants $\Rightarrow \forall x, y \quad P_{(X,Y)}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

b) Théorème fondamental

Théorème : Soient $X : \Omega \to E$
$Y : \Omega \to F$ des VA
qu'on suppose indépendantes
Alors $\forall A \subset E$, $\forall B \subset F$,

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

Démo

Soient $A \subset E$ et $B \subset F$

Alors :

$$(X \in A, Y \in B) = \bigsqcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (X = a, Y = b)$$

On doit se ramener à une union disjointe finie

On a $(X \in A, Y \in B) = (X \in A) \cap (Y \in B)$

Or $(X \in A) = (X \in A \cap \mathrm{Im}\, X)$
$(Y \in B) = (Y \in B \cap \mathrm{Im}\, Y)$

donc $(X \in A, Y \in B) = (X \in A \cap \mathrm{Im}(X), Y \in B \cap \mathrm{Im}(Y))$

$$= \bigsqcup_{\substack{x \in A \cap \mathrm{Im}(X) \\ y \in B \cap \mathrm{Im}(Y)}} (X = x, Y = y)$$

Comme cette union est disjointe, on a :

$$P(X \in A, Y \in B) = \sum_{\substack{x \in A \cap \mathrm{Im}(X) \\ y \in B \cap \mathrm{Im}(Y)}} P(X = x, Y = y)$$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

R^x : c'est une somme à variables séparées

$$P(X \in A, Y \in B) = \left(\sum_{x \in A \cap \mathrm{Im}(X)} P(X = x) \right) \times \left(\sum_{y \in B \cap \mathrm{Im}(Y)} P(Y = y) \right)$$

$$\left(X \in A \cap \mathrm{Im}(X) \right) = \bigsqcup_{x \in A \cap \mathrm{Im}(X)} (X = x)$$

donc $P(X \in A \cap \mathrm{Im}(X)) = \sum_{x \in A \cap \mathrm{Im}(X)} P(X = x)$

de plus $(X \in A) = (X \in A \cap \mathrm{Im}(X))$
donc $P(X \in A) = P(X \in A \cap \mathrm{Im}(X))$

Bilan : $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$

Exemple

X, Y VAR indépendantes
alors $P(X > 1, Y < 0) = P(X > 1) \times P(Y < 0)$

c) Reformulation

Théorème

$X \in VA(E)$, $Y \in VA(F)$
Osq X et Y sont indépendantes
Soient $A \subset E$ et $B \subset F$

Alors $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants

2) !! Transfert de l'indépendance

Théorème : $X : \Omega \to E$ VA indépendantes
$Y : \Omega \to F$

Soient $f : E \to E'$ et $g : F \to F'$

alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes

Démo : Mq $\forall x \in E', \forall y \in F',$

$$P(f(X) = x, g(Y) = y) = P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y)$$

Soient $x \in E'$, $y \in F'$
On a :
$$(f(X) = x, g(Y) = y) = (X \in f^{-1}(\{x\}), Y \in g^{-1}(\{y\}))$$
donc $P(f(X) = x, g(Y) = y) = P(X \in f^{-1}(\{x\}), Y \in g^{-1}(\{y\}))$
Or, X et Y indépendants
D'après le thm fondamental, on a
$$P(f(X) = x, g(Y) = y) = P(X \in f^{-1}\{x\}) \times P(Y \in g^{-1}(\{y\}))$$
$$= P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y)$$

3) Indépendance de n VA

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Définition

Déf : Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ VA

On dit que

a) $X_1, \dots, X_n$ sont 2 à 2 indépendantes
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall i, j, \ i \neq j \Rightarrow X_i$ et X_j indépendantes

b) $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall \ (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Im}(X_1) \times \dots \times \mathrm{Im}(X_n)$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

$$= P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n)$$

b) Lemmes de coalition

Prop : $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$
Alors les VA
$\underbrace{(X_1, \dots, X_k)}_{\text{c'est un } k\text{-uplet de VA à valeurs dans } E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k}$ et $(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes

Remarques :

a) On a des énoncés + généraux que celui là :

Soit $I_1, \dots, I_p \subset [\![1, n]\!]$ tq

- $\forall j$, $I_j \neq \emptyset$. $\forall i \neq j$, $I_i \cap I_j = \emptyset$
- (*) $\bigcup_{j=1}^{p} I_j = [\![1, n]\!]$

Alors les VA $(X_i)_{i \in I_1}, (X_i)_{i \in I_2}, \dots, (X_i)_{i \in I_p}$ sont mutuellement indépendantes

b) En fait, on peut enlever l'hyp. (*)

c) ⚠ Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes alors toute sous famille des $X_1, \dots, X_n$ sera encore une famille de VA indépendantes

d) En particulier :
⚠ $X_1, \dots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ 2 à 2 indépendantes

Exemple X, Y, Z, T, U, V, W VA indép.

Prop : $(X, Y, Z), (T, U, V, W)$ sont indép.

a) $X, (V, W), (Z, Y, T), U$ sont indép

b) $X, (Z, T), U$ indép

c) X, Z, U sont indép.

démo : Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$

Mq $(X_1, \dots, X_k)$ et $(X_{k+1}, \dots X_n)$ sont indép.

Ie par déf :

$\forall (x_1, \dots, x_k) \in E_1, \dots, E_k$ (ou $\in \mathrm{Im}(X_1) \times \dots \times \mathrm{Im}(X_k)$)

$\forall (x_{k+1}, \dots, x_n) \in E_{k+1} \times \dots \times E_n$.

$P((X_1, \dots, X_k) = (x_1, \dots, x_k), (X_{k+1}, \dots, X_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n))$

$= P((X_1, \dots, X_k) = (x_1, \dots, x_k)) \times P((X_{k+1}, \dots, X_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n))$

$((X_1, \dots, X_k) = (x_1, \dots, x_k))$

$= (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \dots \cap (X_k = x_k)$
$= (X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k)$

Lemme : $X_1, \dots, X_n$ indép. $\Rightarrow X_1, \dots, X_k$ indép

démo : Onq $X_1, \dots, X_n$ indép
Soit $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in E_1 \times \dots \times E_{n-1}$
Mq $P(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i = a_i)$

On sait que si $a_n \in E_n$
$P(X_1 = a_1, \dots X_{n-1} = a_{n-1}, X_n = a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(X_1 = a_i) \cdot P(X_n = a_n)$

On écrit $P(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1})$
$= P(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}, X_n \in I_m(X_n))$
$= \bigsqcup_{x_n \in \mathrm{Im}(X_n)} (X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}, X_n = x_n)$

donc :

$$P(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}) = \sum_{x_n \in \mathrm{Im}(X_n)} \underbrace{P(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}, X_n = x_n)}_{\text{par déf}}$$

$$= \sum_{x_n \in \mathrm{Im}(X_n)} \boxed{P(X_1 = a_1) \cdot P(X_2 = a_2) \cdots P(X_{n-1} = a_{n-1})} \cdot P(X_n = x_n)$$

indep de la somme

$$= P(X_1 = a_1) \cdot P(X_2 = a_2) \cdots P(X_{n-1} = a_{n-1}) \cdot \underbrace{\sum_{x_n \in \mathrm{Im}(X_n)} P(X_n = x_n)}_{= 1 \text{ car SCE}}$$

et ainsi de suite

Corollaire du lemme :

Si $X_1, \dots, X_n$ indép alors toute sous-famille est indépendante

donc, on peut terminer la preuve du lemme de coalition.

Prop : $X_1, \dots, X_n$ VA indépendantes
Soient $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $f : E_1 \times \dots \times E_k \to E$
$g : E_{k+1} \times \dots \times E_n \to F$

Alors $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indép.

Rq : il y a des versions ⊕ perfectionnées

Exemples : X, Y, Z, U, V, W, T VA ind alors

$$\underbrace{X \quad U \quad W} \qquad \underbrace{Z \; T} \qquad \underbrace{Y}$$

$$\frac{X^2 - U}{\exp(W)}, \quad \ln(Z^2+1) - T, \quad Y^3 \text{ sont indép.}$$

démo : Il suffit d'appliquer successivement le lemme de coalition donné en b) et le thm de transfert d'indépendance

c) Théorème fondamental

Théorème

Soient $X_1, \dots, X_n$ VA indépendantes

Soit $A_1 \subset E_1$, $A_2 \subset E_2$, ...

Alors

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot P(X_2 \in A_2) \dots P(X_n \in A_n)$$

Ex. X, Y, Z VAR indép

$$P(X \geq 0, Y \geq 0, Z < 0) = P(X \geq 0) \cdot P(Y \geq 0) \cdot P(Z < 0)$$

démo : Par récurrence sur n

$n = 2$: ok cf 2)

$HR_n \Rightarrow HR_{n+1}$. Soit $n \geq 2$

Je suppose q si $Y_1, \dots, Y_n$ VA indép j'ai le thm

Mq le théorème est vrai pour $(n+1)$ VA

Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ VA indép.

Soient $A_1 \subset E_1, \dots, A_{n+1} \subset E_{n+1}$

Astuce : $(X_1, \dots, X_n)$ et X_{n+1} sont indép

D'après le cas $n = 2$. On a

$$P((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n, X_{n+1} \in A_{n+1})$$
$$= P((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \cdot P(X_{n+1} \in A_{n+1})$$

Avec HR_n on a

$$= P(X_1 \in A_1) \cdot P(X_2 \in A_2) \times \dots \times P(X_{n+1} \in A_{n+1})$$

d) Reformulation

Prop : $X_1, \dots, X_n$ VA indép.

$A_1 \subset E_1, \dots, A_n \subset E_n$

Alors, les évène^t $(X_1 \in A_1), (X_2 \in A_2), \dots, (X_n \in A_n)$ sont mutuelle^t indép.

démo : ⚠ déf de mutuelle^t ind.

Soit $I \subset [\![1, n]\!]$

Mq $P\left(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i \in I} P(X_i \in A_i)$

On applique le c) avec $\begin{cases} A'_i = A_i \text{ si } i \in I \\ A'_i = E_i \text{ si } i \notin I \end{cases}$

IV, Espérance d'une VA

Intuitivement, l'espérance de X VA correspond à la moyenne de X

1) Définition

Déf : Soit X VA

L'espérance de X, notée $E(X)$ est le nb réel défini par :

$$E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega)$$

Rq : Cette déf a bien un sens car Ω est fini

2) Réécriture fondamentale de l'espérance

Théorème :

Soit X VAR

. Soit E un ensemble fini tq $\mathrm{Im}(X) \subset E$

Alors :

$$E(X) = \sum_{x \in E} x \cdot P(X = x)$$

. En particulier :

$$E(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X = x)$$

Rq : on peut écrire : $E(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P_X(x)$

On voit que $E(X)$ ne dépend que de la loi de X.

Ie : $\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ VAR} \\ P_X = P_Y \end{array}\right\} \Rightarrow E(X) = E(Y)$

démo :

. $\subset$ $\mathrm{Im}(X) \subset E$, on a

$$(X \in E) = \Omega$$

. On écrit $\Omega = \bigsqcup_{x \in E} (X = x)$

donc on a : $E(X) = \sum_{\omega \in \bigsqcup_{x \in E} (X = x)} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega)$

$$= \sum_{x \in E} \sum_{\omega \in (X = x)} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega)$$

Par déf. de $(X = x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$

On a $X(\omega) = x$

$$E(X) = \sum_{x \in E} \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) \cdot x$$

$$= \sum_{x \in E} x \cdot \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\})$$

Or, pour tout ensemble A, on a

$$A = \bigsqcup_{a \in A} \{a\}$$

donc, pour $A = (X = x)$, on a

$$(X = x) = \bigsqcup_{\omega \in (X=x)} \{\omega\}$$

Comme cette union disjointe est finie, on a :

$$P(X = x) = \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\})$$

donc on obtient :

$$E(X) = \sum_{x \in E} x \cdot P(X = x)$$

3) Premiers exemples

a) Avec VA indicatrice

Soit (Ω, P) un eff
Soit $A \subset \Omega$ un évène^t
On a défini la VAR $\mathbb{1}_A$

C'est $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$
$$\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

"C'est une VA tout ou rien"

Prop : $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$

démo : On utilise la réécriture fondamentale.
On a toujours :

$$\cancel{\mathrm{Im}(\mathbb{1}_A) = \{0, 1\}} \text{ faux en général}$$

$$\mathrm{Im}(\mathbb{1}_A) \subset \{0, 1\}$$

donc on a :

$$\begin{aligned} E(\mathbb{1}_A) &= \sum_{x \in \{0,1\}} x \cdot P(\mathbb{1}_A = x) \\ &= 0 \cdot P(\mathbb{1}_A = 0) + 1 \cdot P(\mathbb{1}_A = 1) \\ &= P(\mathbb{1}_A = 1) \end{aligned}$$

Or, l'évènement $(\mathbb{1}_A = 1) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{1}_A(\omega) = 1\}$
$= A$

et $(\mathbb{1}_A = 0) = \overline{A}$

donc $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$

b) avec une VA constante

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé
On considère la VA constante égale à a
On la note encore :

$$\tilde{a} : \Omega \to \mathbb{R}$$

Fait : $E(\tilde{a}) = a$

démo : On peut utiliser les 2 formules

- $E(\tilde{a}) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot \underbrace{\tilde{a}(\omega)}_{= a}$

$$= a \cdot \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})}_{= 1}$$

on a $\Omega = \bigsqcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$ on sait qu'une probabilité sur Ω est déterminée par la donnée de $(P_\omega)_{\omega \in \Omega} \in [0,1]^\Omega$ tq $\sum_{\omega \in \Omega} P_\omega = 1$

- On a $\mathrm{Im}(\tilde{a}) = \{a\}$
donc $E(\tilde{a}) = \sum_{x \in \{a\}} x \cdot P(\tilde{a} = x)$

$$= a \cdot P(\tilde{a} = a) = a \cdot 1 = a$$

4) Propriétés de l'espérance

Proposition

Soient X, Y VAR
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors, on a :

1) L'espérance est linéaire
ie $E(X+\lambda Y) = E(X) + \lambda \cdot E(Y)$
ie l'application

$$E(\cdot) : VA(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$X \mapsto E(X)$$

est une forme linéaire sur $VA(\mathbb{R})$

2) On a donc $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX+b) = aE(X)+b$

3) L'espérance est positive
a) $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$
b) Plus généralement, si I intervalle, alors :

$$X \in I \Rightarrow E(X) \in I$$

Rq : on note $X \geq 0 \overset{\Delta}{\text{ssi}} \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$
et $X \in I \overset{\Delta}{\text{ssi}} \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \in I$

4) L'espérance est croissante
$X \geq Y \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$

5) Inégalité triangulaire
$$|E(X)| \leq E(|X|)$$

6) Inégalité de CS pour l'espérance

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \cdot \sqrt{E(Y^2)}$$

démo :

1) Elle serait "compliquée" à dém. avec la réécriture
Avec la déf, c'est facile.

On a $E(X+\lambda Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \, (X+\lambda Y)(\omega)$

la valeur de la somme de 2 fct est la somme des valeurs de chacune des fct

$$= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \left(X(\omega) + \lambda Y(\omega) \right)$$

$$= E(X) + \lambda E(Y)$$

2) On applique 1) avec $Y = \tilde{b}$
On a $E(aX + \tilde{b})$ ici, $aX+b$ c'est pareil que $aX+\tilde{b}$

$$= E(aX) + \underbrace{E(\tilde{b})}_{b}$$

$$= a E(X) + b$$

3) a) On utilise la déf.
Orq $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$
donc $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0} \cdot \underbrace{X(\omega)}_{\geq 0}$

donc $E(X) \geq 0$

b) cno

4) Croissance de l'espérance

Osq $X \geq Y$ donc $X - Y \geq 0$

donc par 3. a) $E(X-Y) \geq 0$
Or par 1) $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$

donc $E(X) \geq E(Y)$

5) Inégalité triangulaire

On a $-|X| \leq X \leq |X|$

donc par 4) : $-E(|X|) \leq E(X) \leq E(|X|)$

ie $E(X) \in \Big[-E(|X|) \,;\, E(|X|)\Big]$

donc $|E(X)| \leq E(|X|)$

6) Inégalité de Cauchy-Schwarz pour $E(\cdot)$

Rq : E $\mathbb{R}$-ev
Si $p : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifie :
1°) p est bilinéaire
2°) p est positive ie $\forall x \in E,\ p(x,x) \geq 0$

Alors on a :
$$\forall x, y \in E,\ |p(x,y)| \leq \sqrt{p(x,x)}\,\sqrt{p(y,y)}$$

la condition 3°) $\forall x \in E \quad , p(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$
ne sert que à caractériser le cas d'$=^{té}$ de CS

Ici, on prend $E := VA(\mathbb{R})$
et $p : VA(\mathbb{R}) \times VA(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$(X, Y) \mapsto E(XY)$

Rq : on peut imaginer que $E(\cdot)$ est un peu comme une intégrale
cf $(f|g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt \; m(t) dt$
où m C^0
$m > 0$

p est symétrique : $E(XY) = E(YX)$
p est bilinéaire : $p(X_1 + \lambda X_2, Y)$
$E((X_1 + \lambda X_2)Y) = E(X_1 Y + \lambda X_2 Y) = p(X_1, Y) + \lambda p(X_2, Y)$

p est positif : $p(X, X) = E(X^2) \geq 0$ car $X^2 \geq 0$

Rq : Est-ce que $p(X,Y)$ est défini ?

1) A-t-on $E(X^2) = 0 \iff X = 0$?

2) A-t-on un analogue du thm aux 3 hyp. pour les VA ?
a-t-on
$$\left.\begin{array}{l} X \geq 0 \\ E(X) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X = 0 \ ?$$

La réponse est non pour les 2 questions car on peut avoir des $\omega \in \Omega$ tq $X(\omega) > 0$ mais $P(\{\omega\}) = 0$

déf : On dit X est presque sûrement nulle et on note $X \overset{ps}{=} 0$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $(X = 0)$ est quasi-certain
ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $P(X=0) = 1$

Rq : de même on définit $X \overset{ps}{\geq} Y$
c'est $P(X \geq Y) = 1$ ...

$X \overset{ps}{=} E(X)$ ssi $P(X = E(X)) = 1$
↓
X VAR ps constante

On a donc $E(X^2) = 0 \Rightarrow X \overset{ps}{=} 0$
On est presque défini.

5) Théorème de transfert

Théorème

Soit X VAR
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

. Soit E fini contenant $\mathrm{Im}(X)$

Alors $E(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x) \, P(X = x)$

. Ainsi :
$$E(f(X)) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} f(x) \cdot P(X = x)$$

démo :
. On a $\mathrm{Im}(f(X)) = f(\mathrm{Im}(X))$

On utilise la réécriture fondamentale de l'espéra

On a : $E(f(X)) = \sum_{y \in f(E)} y \cdot P(f(X) = y)$

Or $(f(X) = y) = \bigsqcup_{\substack{x \in E \\ tq\ f(x) = y}} (X = x)$

donc $P(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in E \\ tq\ f(x) = y}} P(X = x)$

donc $E(f(X)) = \sum_{y \in f(E)} y \sum_{\substack{x \in E \\ tq\ f(x) = y}} P(X = x)$

$$= \sum_{y \in f(E)} \sum_{\substack{x \in E \\ tq\ f(x) = y}} f(x) \cdot P(X = x)$$

$$= \sum_{\substack{(x,y) \in E \times f(E) \\ tq\ y = f(x)}} f(x) \cdot P(X = x)$$

$$= \sum_{x \in E} \underbrace{\sum_{\substack{y \in f(E) \\ tq\ f(x) = y}}}_{\text{somme à 1 seul élément : c'est } f(x)} \underbrace{f(x) \cdot P(X = x)}_{\text{ne dépend pas de } y}$$

$$= \sum_{x \in E} f(x) \cdot P(X = x)$$

Corollaire 1.

E fini tq $\mathrm{Im}(X) \subset E$

$$E(X^2) = \sum_{x \in E} x^2 P(X = x)$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x^2 P(X = x)$$

Corollaire 2

Soit X, Y VA à valeurs dans E et F
$f : E \times F \to \mathbb{R}$

Alors $E\left(f(X,Y)\right) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{Im}(X) \\ y \in \mathrm{Im}(Y)}} f(x,y) \cdot P(X=x, Y=y)$

démo : ?

⚠ Quand on est dans $\mathbb{C}$, on peut pas dire
$(n+1)\alpha \to +\infty$

Si $\alpha \neq 0$, alors $\sum_n \alpha$ est grossièrement divergente car $\alpha \not\to 0$

Idée de propriété presque sûre

Def : Soit X VAR
Soit $P(x)$ un prédicat de x réel
On dit que $P(x)$ est vraie presque sûrement
et on note $P(x)$ ps ssi $P(P(x)) = 1$

Exemple

Je lance un dé une infinité de fois.
J'obtiens une suite de variables aléatoires $(X_1, X_2, X_3, \dots)$
où X_i = le n° de la face du i-ème lancer
On a $\mathrm{Im}(X_i) = [\![1,6]\!]$
On note Y la VA déf. par :

$$\begin{cases} Y = +\infty & \text{si } \forall i \ X_i \neq 6 \\ Y = \min\{k \geq 1 \mid X_k = 6\} \end{cases}$$

ie Y est l'indice du premier lancer où on tombera sur un 6

On a $\mathrm{Im}(Y) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$

On a $P(Y \in \mathbb{N}^*) = 1$

$P(Y = +\infty) = 0$

démo : On considère l'évènement

$$(X_1 \neq 6, X_2 \neq 6, \dots, X_N \neq 6)$$

On a $(Y = +\infty) \subset (X_1 \neq 6, \dots, X_N \neq 6)$

donc $P(Y = +\infty) \leq P(X_1 \neq 6, \dots, X_N \neq 6)$

Or, les X_i sont indépendantes, ss entendu mutuellement indépendantes

donc $\mathbb{R}^*$: $P(X_1 \neq 6, \dots, X_N \neq 6) = \underbrace{P(X_1 \neq 6)}_{= \frac{5}{6}} \times P(X_2 \neq 6) \dots$

Bilan : $P(Y = +\infty) \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

A la limite qd $N \to \infty$: on obtient $P(Y = +\infty) = 0$

ie $P(Y \in \mathbb{N}^*) = 1$

On dira que $Y \in \mathbb{N}^*$ presque sûrement

<u>Théorème</u> : Soit X VAR

$$\left.\begin{array}{l} X \geq 0 \\ E(X) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X \overset{ps}{=} 0$$

<u>démo</u> :

- On a $E(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x) = 0$

Or, $\mathrm{Im}(X) \subset \mathbb{R}_+$ et $\forall x,\ P(X=x) \geq 0$

donc $\forall x \in \mathrm{Im}(X),\ x\, P(X=x) \geq 0$

Or, une somme de termes ≥ 0 est nulle ssi tous ces termes sont nuls

donc $\forall x \in \mathrm{Im}(X),\ x \cdot P(X=x) = 0$

donc $\forall x \in \mathrm{Im}(X),\ x \neq 0 \Rightarrow P(X=x) = 0$

Or $(X>0) = \bigsqcup_{\substack{x \in \mathrm{Im}(X) \\ x \neq 0}} (X=x)$

donc $P(X>0) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{Im}(X) \\ x \neq 0}} P(X=x) = 0$

Or $(X=0) = \overline{(X>0)}$ car $X \geq 0$

donc $P(X=0) = 1$

- Comme Ω est fini, $\mathrm{Im}(X)$ est fini

On note $\mathrm{Im}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ avec $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N$

On a $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i\, P(X=x_i)$

De $\hat{m}$, on a $\forall i,\ x_i\, P(X=x_i) \geq 0$

donc $\forall i,\ x_i\, P(X=x_i) = 0$

Or $x_2, x_3, \dots, x_N > 0$
donc $P(X = x_i) = 0$ si $i \in [\![2, N]\!]$

Or $\sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) = 1$

donc $P(X = x_1) = 1$

donc $E(X) = x_1 P(X = x_1) = x_1 = 0$

Bilan $P(X = 0) = 1$

Rq : Version ⊕ générale du thm de transfert

Théorème : E, ensemble
$X \in VA(E)$
$f : E \to \mathbb{R}$
Ainsi, $f(X)$ VAR
Alors, si E' est fini et $\mathrm{Im}(X) \subset E'$, On a :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in E'} f(x) \cdot P(X = x)$$

En particulier, $E(f(X)) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} f(x) \cdot P(X = x)$

6) Espérance du produit dans le cas indépendant

Théorème : X, Y VA indépendantes

alors $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

démo :

On considère la VA (X, Y)

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto xy$

On a d'après le corollaire 2 :

$$E(f(X,Y)) = \sum_{\substack{x \in \operatorname{Im}(X) \\ y \in \operatorname{Im}(Y)}} f(x,y) \cdot P(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{\substack{x \in \operatorname{Im}(X) \\ y \in \operatorname{Im}(Y)}} xy \; P(X = x, Y = y)$$

R^{x} : X, Y, Z VAR

$$E(\sqrt{X^2+1}) \underset{R^x \text{ transfert}}{=} \sum_{x \in \operatorname{Im}(X)} \sqrt{x^2+1} \; P(X = x)$$

Si on écrit $\operatorname{Im} X = \{x_1, \dots, x_N\}$

Alors $E(\sqrt{X^2+1}) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x_i^2+1} \; P(X = x_i)$

$$E\left(\frac{XY}{1+Z^2}\right) = \sum_{\substack{x \in \operatorname{Im}(X) \\ y \in \operatorname{Im}(Y) \\ z \in \operatorname{Im}(Z)}} \frac{xy}{1+z^2} P(X = x, Y = y, Z = z)$$

$= \sum xy \; P(X=x) \cdot P(Y=y)$ car X, Y indép.

donc $E(XY) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{Im} X \\ y \in \mathrm{Im} Y}} xy \; P(X=x) \cdot P(Y=y)$

$= \sum_{x \in \mathrm{Im} X} x \; P(X=x) \cdot \sum_{y \in \mathrm{Im} Y} y \; P(Y=y)$

$= E(X) \cdot E(Y)$

■

Corollaire : $X_1, \dots, X_N$ indépendants

Alors, $E(X_1 X_2 \dots X_N) = E(X_1) \cdot E(X_2) \dots E(X_N)$

démo : par récurrence sur $N \geq 2$

$N = 2$: cf ci-dessus

Hérédité : Soit N tq la propriété est choisie au rang N

Soient $X_1, \dots, X_{N+1}$ VAR indépendantes

Or d'après le lemme de coalition, les VA

$X_1 \cdot X_2 \dots X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes

donc d'après la prop. ci-dessus

$$E(X_1 X_2 \dots X_N \cdot X_{N+1}) = E(X_1 X_2 \dots X_N) \cdot E(X_{N+1})$$
$$= E(X_1) \dots E(X_N) \cdot E(X_{N+1})$$

hyp de récurrence :

pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $P(N)$: " $\forall X_1, \dots, X_N$ VAR indép,

$E(X_1 X_2 \dots X_N) = \prod_{i=1}^{N} E(X_i)$ "

⚠ Si X, Y ne sont pas indépendantes, c'est F

sinon on aurait $E(X^2) = E(X)^2$ $(*)$

mais (*) a de ntx contre-exemples
En effet, on peut avoir $E(X) = 0$ assez facilement

Ex : X VA tq $\mathrm{Im}(X) = \{-1, 1\}$
et $P(X=-1) = \frac{1}{2}$, $P(X=1) = \frac{1}{2}$

Déf : Soit X VAR
On dit que X est centrée ssi $E(X) = 0$

mais $E(X^2) = 0 \Rightarrow X \overset{PS}{=} 0$

Bilan : $E(X) = 0 \Rightarrow X$ centrée
$E(X^2) = 0 \Rightarrow X \overset{PS}{=} 0$

Prop : Soit X VAR
Alors, la VAR $X - E(X)$ est centrée

démo :
$E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

Vocabulaire : On dit que $X - E(X)$ est la VA des écarts de X à sa moyenne

7) Variance

a) définition

L'idée : on souhaite connaître, si X VAR, l'écart moyen de X à sa moyenne.

Ex

Élève A : 10, 10, 10, 10

Élève B : 5, 15, 5, 15

Élève C : 0, 20, 0, 20

Les trois élèves A, B, C ont la m̂ moyenne mais les notes de A sont + régulières

d'où l'idée de mesurer l'écart-moyen à la moyenne qu'on appellera l'écart-type de X

Premier essai : Soit X VAR

On regarde l'écart à la moyenne : c'est $X - E(X)$

on prend la moyenne de cet écart à la moyenne c'est $E(X - E(X))$

Ça ne marche pas : c'est égal à 0

Deuxième essai :

On regarde $E(|X - E(X)|)$ → écart absolu à la moyenne

Troisième essai :

Idée : on remplace $E(|X - E(X)|)$ par $E((X - E(X))^2)$

on cherche qqch d'homogène à X

Définition : Soit X VAR

. On appelle écart-type de X et on note $\sigma(X)$ le nombre réel positif défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{E\left((X-E(X))^2\right)}$$

. On appelle variance de X et on note $V(X)$ le nombre réel positif défini par :

$$V(X) = E\left((X-E(X))^2\right) = \sigma(X)^2$$

b) Cas où $\sigma(X) = 0$

Intuitivement, dire que l'écart-type est nul, c'est dire que l'écart entre X et sa moyenne est nul.

Prop Soit X VAR

Alors : $\sigma(X) = 0 \Rightarrow X$ ps cste

mieux : $\sigma(X) = 0 \Rightarrow X \overset{ps}{=} E(X)$

démo : Osq $\sigma(X) = 0$

On a donc $V(X) = 0$

ie $E\left((X-E(X))^2\right) = 0$

Or $(X-E(X))^2 \geq 0$

donc, d'après le complément, $X - E(X) \overset{ps}{=} 0$

Cela implique $X \overset{ps}{=} E(X)$

démo :

Méthode **notation** : pour se simplifier la tâche, on note $m := E(X)$

On a $X - m \overset{ps}{=} 0$

ie $P(X - m = 0) = 1$

Or $(X - m = 0) = (X = m)$

Ex R* Soient X, Y VAR

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$

alors : $(X \geq 3aY + b - 2) = (X - b + 2 \geq 3aY)$

$= \left(\frac{X - b + 2}{3a} \geq Y\right)$ si $a > 0$

Soient X, Y VAR avec $X, Y \geq 0$

alors $(X \geq Y) = (X^2 \geq Y^2)$

démo : on a si $\omega \in \Omega$

$(X(\omega) \geq Y(\omega) \Leftrightarrow X^2(\omega) \geq Y^2(\omega))$

Fait : Soient X, Y VAR

Alors $(X \geq Y) = (e^X \geq e^Y)$

Plus généralement si $f : I \to \mathbb{R}$ ↗↗

Si X, Y VAR à valeurs dans I

Alors $(X \geq Y) \Rightarrow (f(X) \geq f(Y))$

Rq : si f ↗ alors $(X \leq Y) \subset (f(X) \leq f(Y))$

donc $P(X \leq Y) \leq P(f(X) \leq f(Y))$

donc $P(X = m) = 1$

ie $X - m \overset{ps}{=} 0 \Leftrightarrow X \overset{ps}{=} m$

Si $\sigma(X) = 0$, on a $X \overset{ps}{=} m$

ie $X \overset{ps}{=} E(X)$

c) Formule de König - Huygens

Prop

Soit X VAR

Alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Rq : On a $V(X) \geq 0$

et $E(X) = 0$ est facile

mais $E(X^2)$ est contraignant

démo : & Méthode notation

On note $m := E(X)$

On a $V(X) = E((X-m)^2)$

$= E(X^2 - 2mX + m^2)$

$= E(X^2) + E(-2mX) + E(m^2)$

$= E(X^2) - 2m\,E(X) + m^2$

$= E(X^2) - 2m^2 + m^2$

$= E(X^2) - m^2$

$= E(X^2) - E(X)^2$

d) Propriétés de la variance

Prop :

1) $V(X+\alpha) = V(X)$

2) $V(\alpha X) = \alpha^2 \cdot V(X)$

démo :

1) On a $E(X+\alpha) = E(X) + \alpha$

donc $(X+\alpha) - E(X+\alpha) = X - E(X)$

donc $((X+\alpha) - E(X+\alpha))^2 = (X - E(X))^2$

En passant à $E(\cdot)$:

$$E\left(((X+\alpha) - E(X+\alpha))^2\right) = E\left((X-E(X))^2\right)$$

ie $V(X+\alpha) = V(X)$

2) On utilise König - Huygens

donc $V(\alpha X) = E\left((\alpha X)^2\right) - [E(\alpha X)]^2$

$$= \alpha^2 E(X^2) - \alpha^2 E(X)^2$$
$$= \alpha^2 \left(E(X^2) - E(X)^2\right)$$
$$= \alpha^2 \cdot V(X)$$

8) Covariance

a) Déf : Soient X, Y VAR
La covariance de X et Y est le nb réel défini par

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big)$$

Rq : on a $V(X) = cov(X,X)$

b) Additivité de la variance pour les VA indépendantes

Prop : X, Y indépendantes $\Rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

⚠ c'est F en général

Contre-exemple : je prends $X = Y$

$$V(X+X) = V(2X) = 4V(X) \neq V(X) + V(X)$$

démo : On utilise König-Huygens

1°) $E((X+Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2)$
$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$

Rᵗ indépendants : $E(XY) = E(X)E(Y)$

$= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2)$

2°) $[E(X+Y)]^2 = (E(X) + E(Y))^2$
$= E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2$

donc $V(X+Y) = E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2)$
$- E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$

$= V(X) + V(Y)$

Corollaire

$X_1, \dots, X_N$ VAR indépendantes

alors $V(X_1 + \dots + X_N) = \sum_{i=1}^{N} V(X_i)$

c) Propriétés de la covariance

1°) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$

2°) $\mathrm{cov}(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire

ie $\mathrm{cov}(X_1 + \lambda X_2, Y) = \mathrm{cov}(X_1, Y) + \lambda\, \mathrm{cov}(X_2, Y)$

3°) $\mathrm{cov}(X,X) \geqslant 0$

Bilan : $\mathrm{cov}(\cdot,\cdot)$ est un quasi produit scalaire sur $VA(\mathbb{R})$

Prop : Formule de König-Huygens pour la covariance

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$

Rq : $\mathrm{cov}(X,Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big)$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

démo : Méthode notation

On note $m_X := E(X)$ et $m_Y := E(Y)$

On calcule :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\big((X - m_X)(Y - m_Y)\big)$$

$$= E(XY - m_Y X - m_X Y + m_X m_Y)$$

$$= E(XY) - m_Y \underbrace{E(X)}_{m_X} - m_X \underbrace{E(Y)}_{m_Y} + m_X m_Y$$

$$= E(XY) - 2 m_X m_Y + m_X m_Y$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

Prop : X, Y indépendantes $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$

Rq : la recip est fausse
Mais on aura quand même ĉ 1ère intuition de $\text{cov}(X,Y)$ est un nb réel qui caractérise l'indépendance

d) Inégalité de CS covariante

On a 2 inégalités de CS pour les VA

Rappel : $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \cdot \sqrt{E(Y^2)}$

Prop : $|\text{cov}(X,Y)| \leq \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$

Déf : Soient X, Y VAR tq $\sigma(X), \sigma(Y) > 0$
Le coefficient de corrélation entre X et Y, noté $\rho(X,Y)$ est :

$$\rho(X,Y) := \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

On a $|\rho(X,Y)| \leq 1$
ie $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

Prop : X et Y indépendants $(\sigma(X), \sigma(Y) > 0)$

$$\Downarrow$$

$$\rho(X,Y) = 0$$

9) Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebitchev

Idée :

. Si X VAR, on a associé à X deux nombres réels qui ne dépendent que de la loi de X : $E(X)$ et $V(X)$

. On cherche à établir des réciproques
Connaissant $E(X)$ et $V(X)$, quelles contraintes ceci impose sur la loi de X

Ex intuitif : Si $E(X)$ est très grande et si $X \geq 0$ alors il n'y a pas bcp de cas où X est petite
ie $P(X \text{ petite})$ ne peut pas ê très grande

a) Inégalité de Markov

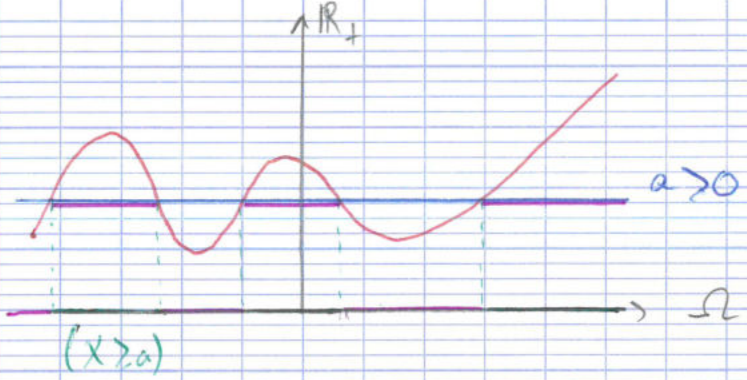
Prop : Soit X VAR tq $X \geq 0$
Soit $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

démo : Astuce : je considère l'évèt $(X \geq a)$ et je considère $1\!\!1_{(X \geq a)}$

On a $X \geq a \cdot 1\!\!1_{(X \geq a)}$

$a \cdot 1\!\!1_{(X \geq a)}$



On a bien la courbe rouge au dessus de la courbe violette

Mq $X \geq a \cdot 1\!\!1_{(X \geq a)}$

Soit $\omega \in \Omega$, on distingue 2 cas

1er cas : $\omega \in (X \geq a)$: j'ai $X(\omega) \geq a$

$$a \cdot 1\!\!1_{(X \geq a)}(\omega) = a$$

2e cas : $\omega \notin (X \geq a)$: j'ai $X(\omega) < a$

et $a \cdot 1\!\!1_{(X \geq a)}(\omega) = 0$

Or $X \geq 0$ donc j'ai bien $X(\omega) \geq a \cdot 1\!\!1_{(X \geq a)}(\omega)$

Bilan : $X \geq a \cdot 1\!\!1_{(X \geq a)}$ car $X \geq 0$

On passe à $E(\cdot)$ qui est croissante

$$E(X) \geq a \cdot E\left(1\!\!1_{(X \geq a)}\right)$$

$R^\times$ $E(1\!\!1_A) = P(A)$

ie $E(X) \geq a \cdot P(X \geq a)$

donc $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

b) Inégalité de Bienaymé - Tchebtchev

Prop : X VAR et $a > 0$

alors $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$

démo :

Déjà, on a :

$$(|X - E(X)| \geq a) \underset{R^x}{=} \left((X - E(X))^2 \geq a^2 \right)$$

On applique Markov à la VA ≥ 0 : $(X - E(X))^2$

On obtient :

$$P(|X - E(X)| \geq a) = P\left((X - E(X))^2 \geq a^2 \right)$$

$$\leq \frac{E\left((X - E(X))^2 \right)}{a^2}$$

$$= \frac{V(X)}{a^2}$$

VI, Lois usuelles

1) Loi de Bernoulli

<u>Déf</u> : Soit $p \in [0, 1]$
Soit X VAR

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
$X \sim \mathcal{B}(p)$

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $P(X = 1) = p$
$P(X = 0) = 1 - p$

En pratique, on pourra toujours supposer $\operatorname{Im}(X) = \{0, 1\}$

<u>Prop</u> : A évènement
Alors $1\!\!1_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$

<u>démo</u> : On a $(1\!\!1_A = 1) = A$

donc $P(1\!\!1_A = 1) = P(A)$

$(1\!\!1_A = 0) = \bar{A}$

donc $P(1\!\!1_A = 0) = 1 - P(A)$

<u>Prop</u> : $p \in [0, 1]$ on note $q := 1 - p$
Soit X VAR tq $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Alors . $E(X) = p$
. $V(X) = pq = p(1-p)$

Remarque : Si X VAR et si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
en toute rigueur, on n'a pas $\mathrm{Im}(X) = \{0, 1\}$

Car on pourrait avoir des issues $\omega \in \Omega$ telles que
$$X(\omega) = 42$$
mais $P(\{\omega\}) = 0$

Fait : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \Rightarrow X \overset{ps}{\in} \{0, 1\}$

démo : On veut mq $P(X \in \{0, 1\}) = 1$

Or, on a :
$$(X \in \{0, 1\}) = (X = 0) \sqcup (X = 1)$$

donc $P(X \in \{0,1\}) = P(X=0) + P(X=1)$
$= 1-p + p$
$= 1$

En pratique : si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, on pourra supposer si on le souhaite que $\mathrm{Im}\, X = \{0, 1\}$

Prop : $E(X) = p$
$V(X) = pq$

démo : Osq $\mathrm{Im}(X) = \{0, 1\}$
On a $E(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X = x) = 1 \cdot P(X = 1) = p$

On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
On a $X^2 = X$
démo : Soit $\omega \in \Omega$
Si $X(\omega) = 0$, on a $X^2(\omega) = 0 = X(\omega)$
Si $X(\omega) = 1$, c'est pareil

donc $V(X) = E(X) - E(X)^2$
$$= p - p^2$$
$$= p(1-p)$$
$$= pq$$

démo quand $\mathrm{Im}(X) \neq \{0, 1\}$

On se ramène au cas $\mathrm{Im}\, X = \{0, 1\}$

On définit une nouvelle VAR notée $\widetilde{X}$ définie par :

$$\widetilde{X}(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien $\mathrm{Im}(\widetilde{X}) = \{0, 1\}$

On a $X \overset{ps}{=} \widetilde{X}$

En effet, par déf de $\widetilde{X}$, on a :

$$(X = \widetilde{X}) \supset (X \in \{0, 1\})$$

En effet, si $X = 0$, on a $X = \widetilde{X}$
si $X = 1$, on a $X = \widetilde{X}$

$$\text{donc } P(X = \widetilde{X}) \geq \underbrace{P(X \in \{0, 1\})}_{P(X=0) + P(X=1) = 1}$$

$$\text{d'où } P(X = \overline{X}) = 1 \quad \text{ie} \quad X \overset{ps}{=} \widetilde{X}$$

R^{x} :

$$X \overset{ps}{=} Y \implies \begin{cases} E(X) = E(Y) \\ V(X) = V(Y) \end{cases}$$

démo : Osq $X \overset{ps}{=} Y$

On tente une démo en repassant à la définition

On a $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega)$

$$E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot Y(\omega)$$

donc $E(X) - E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot (X(\omega) - Y(\omega))$

On sépare la Σ en 2 cas

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = Y(\omega)}} \cdots}_{=0} + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \neq Y(\omega)}} \cdots$$

$$= \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \neq Y(\omega)}} P(\{\omega\}) \cdot (X(\omega) - Y(\omega))$$

1°) X, Y sont des f° définies sur des ensembles finis Ω donc elles sont bornées

donc $\left| \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \neq Y(\omega)}} (X(\omega) - Y(\omega)) \right| \leq M \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \neq Y(\omega)}} P(\{\omega\})$

un majorant de $|X(\cdot) - Y(\cdot)|$ $\quad \sum P(\{\omega\}) = P(X \neq Y)$

car $(X \neq Y) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}$

$$= \bigsqcup_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \neq Y(\omega)}} \{\omega\}$$

donc $P(X \neq Y) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \neq Y(\omega)}} P(\{\omega\})$

donc $\left| \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \neq Y(\omega)}} P(\{\omega\}) (X(\omega) - Y(\omega)) \right| \leq M \cdot P(X \neq Y)$

$(X \neq Y) = \overline{(X = Y)}$

donc $P(X \neq Y) = 1 - \underset{\substack{\shortparallel \\ 1 \text{ car } X \overset{ps}{=} Y}}{P(X = Y)}$

$= 0$

2°) On veut mq $\displaystyle\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \neq Y(\omega)}} P(\{\omega\})(X(\omega) - Y(\omega)) = 0$

$\forall$ $\omega \in \Omega$ tq $X(\omega) \neq Y(\omega)$, on a :

$$\{\omega\} \subset (X \neq Y)$$

donc $P(\{\omega\}) \leq P(X \neq Y) = 0$

donc $X \overset{ps}{=} Y \Rightarrow E(X) = E(Y)$

Variance

Astuce : $X \overset{ps}{=} Y \Rightarrow X^2 \overset{ps}{=} Y^2$

On a $(X^2 = Y^2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{union non disjointe}}}{=} (X = -Y) \cup (X = Y)$

En particulier, $(X = Y) \subset (X^2 = Y^2)$

donc $\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{P(X = Y)} \leq \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{P(X^2 = Y^2)}$

Orq $X \overset{ps}{=} Y$, on a $X^2 \overset{ps}{=} Y^2$

donc $E(X^2) = E(Y^2)$

donc $V(X) = V(Y)$

On a donc $E(X) = E(\tilde{X})$
$V(X) = V(\tilde{X})$

Il reste à montrer que $\tilde{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

On a $\Omega = (X = \tilde{X}) \sqcup \underbrace{(X \neq \tilde{X})}_{\text{négligeable}}$ (*)

Ainsi, on prend la trace de (*)

$(\tilde{X} = 1) = (\tilde{X} = 1) \cap (X = \tilde{X}) \sqcup (\tilde{X} = 1) \cap (X \neq \tilde{X})$

donc $P(\tilde{X} = 1) = P(\tilde{X} = 1 \cap (X = \tilde{X})) + P((\tilde{X} = 1) \cap (X \neq \tilde{X}))$

Ici, $X \neq \tilde{X}$ est négligeable
donc $(\tilde{X} = 1) \cap (X \neq \tilde{X})$ est négligeable

donc $P(\tilde{X} = 1) = P((\tilde{X} = 1) \cap (X = \tilde{X}))$

Et $(\tilde{X} = 1) \cap (X = \tilde{X}) \subset (X = 1)$
donc $P(\tilde{X} = 1) \leqslant P(X = 1)$

Or les rôles de X et $\tilde{X}$ sont interchangeables
donc, $P(X = 1) \leqslant P(\tilde{X} = 1)$
ie $P(X = 1) = P(\tilde{X} = 1)$
de m̂ $P(\tilde{X} = 0) = P(X = 0)$

donc $\tilde{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Idée : $\left.\begin{array}{l} X \overset{ps}{=} Y \\ X, Y \text{ VAR} \end{array}\right\} \Rightarrow P_X = P_Y$: faux en général

2) Lois binomiales

Déf : Soit $p \in [0,1]$
Soit $n \in \mathbb{N}$
Soit X VAR

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p ssi $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Fait : . $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

$$\Downarrow$$

$$X \overset{ps}{\in} [\![0,n]\!]$$

. $[\![0,n]\!] \subset \operatorname{Im} X$ si $p \in]0,1[$

? $\left.\begin{array}{l} X \overset{ps}{=} Y \\ X, Y \text{ VAR} \end{array}\right\} \Rightarrow P_X = P_Y$

démo : $(X \in [\![0,n]\!]) = \bigsqcup_{k=0}^{n} (X=k)$

donc $P(X \in [\![0,n]\!]) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= (p + (1-p))^n = 1$

Newton

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Mq $k \in \operatorname{Im}(X)$ ie $(X=k) \neq \emptyset$

Or, $P(X=k) > 0$ si $p \neq 0$ et $p \neq 1$

donc $(X=k) \neq \emptyset$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on pourra supposer que $\operatorname{Im}(X) \subset [\![0,n]\!]$

Rq : Une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ modélise l'expérience suivante :

1) On a 1 expérience aléatoire qui a 2 issues et dont le succès survient avec proba p

2) On répète n fois cette expérience et on compte le nb de succès obtenus qu'on note X

On a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

R^x : si on répète le m̂ acte, souvent il y a de la binomiale

Ex : un élève répond au hasard pour son QCM de 50 questions (avec 5 réponses possibles)

1°) $p = \frac{1}{5}$

2°) on fait ça 50 fois

Prop : $p \in [0,1]$
$n \in \mathbb{N}$

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VAR indépendantes tq
$\forall i, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ $\begin{pmatrix} 1 = \text{succès} \\ 0 = \text{échec} \end{pmatrix}$

Alors $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

démo :

Si X est une VAR tq 1°) $\mathrm{Im}(X) \subset \mathbb{N}$
2°) $\mathrm{Im}(X)$ finie

on définit pour $t \in \mathbb{R}$:

$$G_X(t) := \sum_{\substack{k \in \mathrm{Im}(X) \\ \cap \\ \mathbb{N}}} P(X = k) \cdot t^k$$

Alors la fonction $G_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$t \mapsto \sum_{k \in \mathrm{Im}(X)} P(X=k) \cdot t^k$$

est une fonction polynomiale.

Si $k \notin \mathrm{Im}(X)$ alors $(X=k) = \emptyset$ et $P(X=k) = 0$

. On a : $G_X(0) = 0 \iff P(X=0) = 0$

Mieux $G_X(0) = P(X=0)$

. On a $G_X(1) = 1$

. On a $G_X \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

. On a $G'_X(t) = \sum_{\substack{k \in \mathrm{Im}(X) \\ k \neq 0}} k \, P(X=k) \cdot t^{k-1}$

$$G'_X(1) = \sum_{\substack{k \in \mathrm{Im}(X) \\ k \neq 0}} k \cdot P(X=k) = E(X)$$

Rq : en considérant $G''(x)$, on obtient $V(X)$

G_X s'appelle la fonction génératrice de X

Fait : X, Y VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$

$G_X = G_Y \implies X$ et Y ont m̂ lois $\implies E(X) = E(Y)$
$V(X) = V(Y)$

démo : On considère les polynômes

$$\Gamma_X := \sum_{k \in \mathrm{Im} X} P(X=k) \cdot X^k$$

$$\text{et } \Gamma_Y := \sum_{k \in \mathrm{Im} Y} P(Y=k) \cdot X^k$$

Osq $G_X = G_Y$ ie $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = G_Y(t)$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \Gamma_X(t)$

donc Γ_X et $\Gamma_Y \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes qui coïncident en une $\infty^{té}$ de valeurs.
Donc leurs coeffs sont égaux
donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = P(Y=k)$
ie $P_X = P_Y$

Fait fondamental :
Soit $t \in \mathbb{R}$
Alors : $G_X(t) = E(t^X)$

démo : t est fixé

1°) Qu'est-ce que t^X ?
C'est le "nb aléatoire t puissance mon nb"

c'est $t^X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto t^{X(\omega)} \end{array}$

Rq : t^X est une VA image de X ie $t^X = f(X)$
où $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto t^x \end{array}$

2°) La formule du transfert donne donc

$$E(t^X) = E(f(X))$$
$$= \sum_{k \in \mathrm{Im}X} f(k) \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k \in \mathrm{Im}\, X} t^k \cdot P(X = k)$$

$$E(t^X) = G_X(t)$$

retour à la démo de la proposition.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on note $S := X_1 + X_2 + \dots + X_n$

On a $G_S(t) = E(t^S)$
$= E(t^{X_1+X_2+\dots+X_n})$
$= E(t^{X_1} \cdot t^{X_2} \cdot t^{X_3} \cdot \dots \cdot t^{X_n})$

Or, les VAR $t^{X_1}, t^{X_2}, \dots, t^{X_n}$ sont indépendantes

$$= E(t^{X_1}) \cdot E(t^{X_2}) \dots \cdot E(t^{X_n})$$

Soit k, $E(t^{X_k}) = G_{X_k}(t)$
$= \sum_{\ell \in \mathrm{Im}(X_k)} P(X_k = \ell) \cdot t^\ell$
$= P(X=0) \cdot 1 + P(X=1) \cdot t$
$= (1-p) + pt$

Bilan : $G_S(t) = \left((1-p) + pt\right)^n$
$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k}_{P(S=k)} \cdot t^k$

En identifiant les coefficients de ces deux f° polynomiales égales

On a $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X_1 + \dots + X_n = k) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k$

ie $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Prop : Soit X VAR tq $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

alors : 1) $E(X) = np$
2) $V(X) = npq$

démo : On a vu que X et $X_1 + \ldots + X_n$ suivent la $\hat{m}$ loi

où $\forall i$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, les X_i sont indépendants

donc

$$E(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P_X(x)$$

$$E(X) = E(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{= p} = np$$

de $\hat{m}$, $V(X) = V(X_1 + \ldots + X_n)$
$= V(X_1) + \ldots + V(X_n)$ car X_i indépendantes
$= npq$

3) Loi uniforme

Déf : Soit E un ens. fini
Soit X VA à valeurs dans E
On dit que X suit la loi uniforme sur E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x \in E, \ P(X = x) = \frac{1}{\# E}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$

En pratique, on pourra supposer que $Im(X) = E$

En q^{al}, on a :

Fait :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(E) \Rightarrow X \overset{ps}{\in} E$$

Fait : Soit X tq $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$

Alors $\forall A \subset E$, $P(X \in A) = \dfrac{|A|}{|E|}$

Rq : E qcq ie on n'a pas forcément $E \subset \mathbb{R}$

Ex. $P_3 \in VA(PCSI3)$
tq $P_3 \hookrightarrow \mathcal{U}(PCSI3)$
On choisit un élève au hasard

⚠ Pour calculer $E(X)$, $V(X)$, on doit avoir X VAR

Prop : Soit $n \geqslant 1$
Soit X VAR tq $X \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦1, n⟧)$

Alors, on a :

1°) $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

2°) $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

? Donner $E(X)$ et $V(X)$ si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦a,b⟧)$
où $a, b \in \mathbb{Z}$ tq $a \leq b$

<u>démo :</u>

Osq $\operatorname{Im} X = [\![1, n]\!]$

donc $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(X = k)$

$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n+1}{2}$

On a $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

...