Chapitre 33 : Intégration

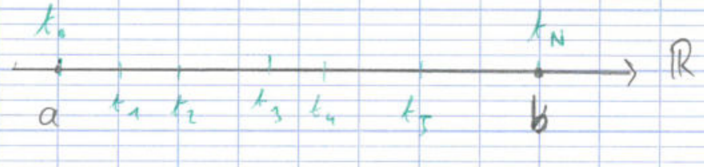
Notations : $a, b \in \mathbb{R}$

Convention : quand on écrira $[a,b]$, on supposera $a \leqslant b$

I. Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

1) Subdivisions

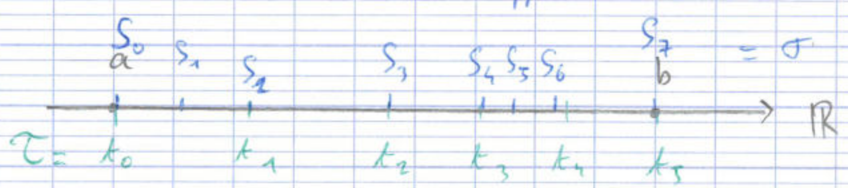
Déf. Une subdivision de $[a,b]$ est une famille $(t_0, t_1, \dots, t_N)$
où $N \geqslant 1$ et $t_0 = a$
$t_N = b$
$\forall i,\ t_i < t_{i+1}$



On note σ, τ, etc les subdivisions

. Si $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ le support de σ est $\{t_0, \dots, t_N\}$
noté $\mathrm{supp}(\sigma)$

. Si σ, τ subdivisions, on dit σ est plus fine que τ
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\mathrm{Supp}(\tau) \subset \mathrm{Supp}(\sigma)$



+ de subdivisions
= division + fine

Si $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ le pas de σ est :

$$\max_{0 \leq i \leq N-1} t_{i+1} - t_i$$

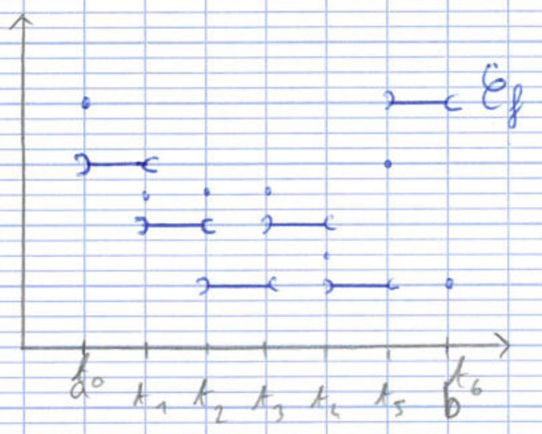
2) Fonctions en escalier

Déf : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

On dit que f est en escalier $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\exists\, \sigma = (t_0, \dots, t_N)$ subdivision de $[a,b]$:
$\forall i \in [\![0, N-1]\!]$, f est constante sur $]t_i, t_{i+1}[$

On note $\mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ l'ens des f° en escalier



Si $f \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ et si $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ est une subdivision tq $\forall i$, $f|_{]t_i, t_{i+1}[}$ est constante

on dira que σ est adaptée à f

Fait : Si σ est adaptée à f et si τ est plus fine que σ, alors τ est adaptée à f

Prop : Soient $f, g \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors : 1) $f + \lambda g \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$

preuve : σ adaptée à f
τ adaptée à g
il existe une uniq subdivision S telle que
$Supp(S) = Supp(\sigma) \cup Supp(\tau)$
On a S plus fine que σ et τ
donc S est adaptée à f et g
Alors S est adaptée à $f + \lambda g$

2) $fg \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$

3) $\mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ sev $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$

4) $|f| \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$

5) f prend un nombre fini de valeurs

6) f est bornée

3) Fonctions continues par morceaux

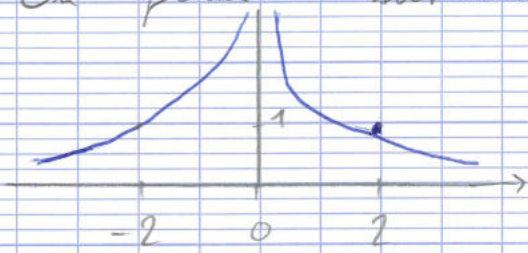
Déf fausse :

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux si $\exists\, \sigma = (t_0, \dots t_N)$ de $[a,b]$: $\forall i$, $f\big|_{]t_i, t_{i+1}[}$ est C^0

↳ Pb : Avec cette déf, on aurait $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On prend la subdivision $-2, 0, 2$



Il faut ajouter que les limites à droite et à gauche existent et sont finies

Déf : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

On dit q f est continue par morceaux

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists\, \sigma = (t_0, \dots, t_N)$ subdivision de $[a,b]$:

$\forall i \in [\![0, N-1]\!]$, $f\big|_{]t_i, t_{i+1}[}$ est continue

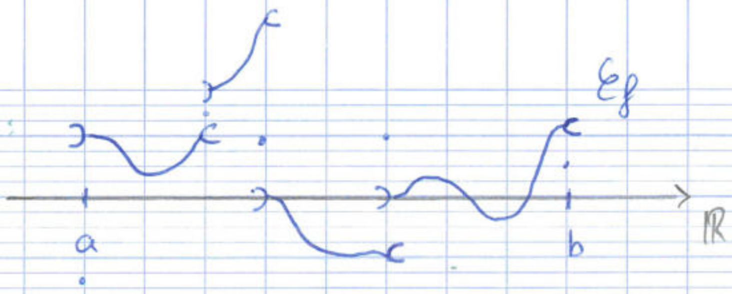
et $\lim\limits_{t \underset{>}{\to} t_i} f(t)$, $\lim\limits_{t \underset{<}{\to} t_{i+1}} f(t)$ existent et sont finies

ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists\, \sigma = (t_0, \dots, t_N)$ subdivision de $[a,b]$:

$\forall i \in [\![0, N-1]\!]$, $\exists f_i \in \mathcal{E}([t_i, t_{i+1}], \mathbb{R})$:

$f\big|_{]t_i, t_{i+1}[} = f_i\big|_{]t_i, t_{i+1}[}$

Ex :



est continue par morceaux

On dit alors que σ est adaptée à f

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, on note $f \in \mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R})$ ou $f \in \mathcal{E}_m([a,b],\mathbb{R})$

Prop : $f, g \in \mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $f + \lambda g \in \mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R})$

ie $\mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev

b) $fg \in \mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R})$

c) $|f| \in \mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R})$

d) $\mathcal{E}_{sc}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R})$

e) $\mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$

ie $f \in \mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R}) \Rightarrow f$ est bornée

Contre-exemple :

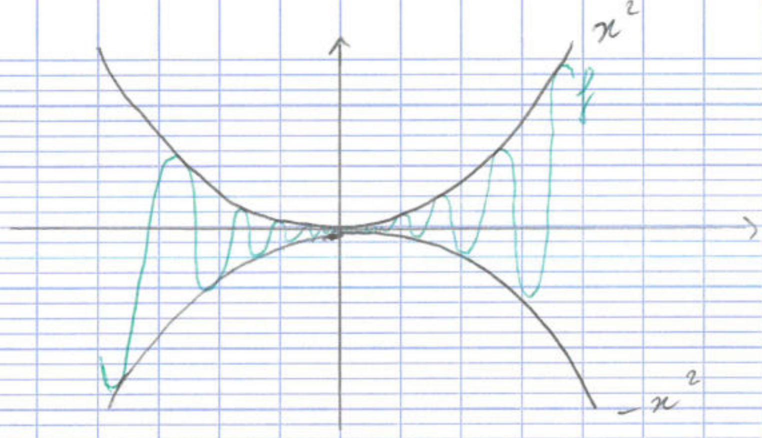
$f, g \in \mathcal{E}_m([a,b],\mathbb{R}) \not\Rightarrow g \circ f \in \mathcal{E}^{\circ}_m([a,b],\mathbb{R})$

est fausse en g^{al}

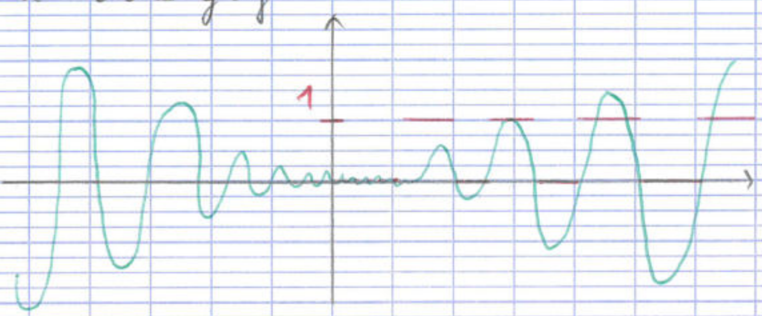
On prend $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

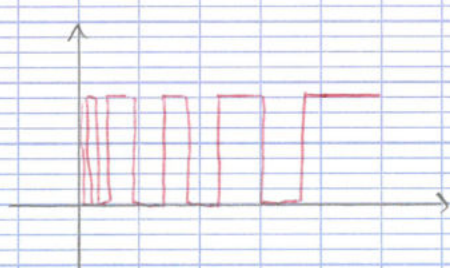
$g = 1_{\mathbb{R}_+}$ on regarde $g \circ f$



On a donc $g \circ f$



au $v(0)$:



On ne peut pas trouver de subdivision finie qui convienne.

4) Approximation de $\mathcal{C}^0_m$ par Esc

a) Rappels sur $\|\cdot\|_\infty$

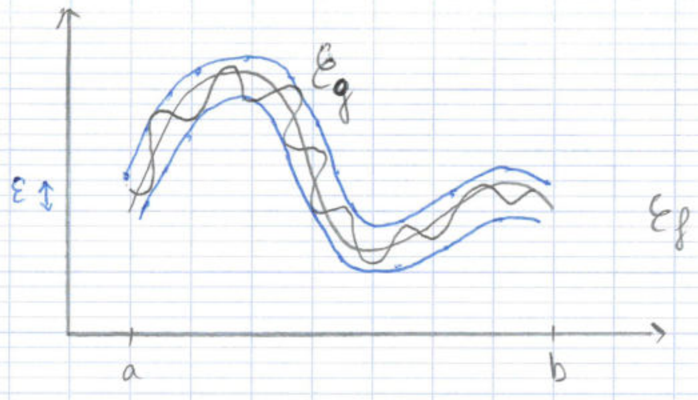
Si $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

C'est une norme.

Ainsi, $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un evn

Soit $f \in \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$

Dessinons : g est ε-proche de f pour $\|\cdot\|_\infty$



$\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$

b) Densité de $\mathcal{E}sc$ dans $\mathcal{C}^0_m$

Théorème : $\mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0_m([a,b], \mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$

ie $\forall f \in \mathcal{C}^0_m([a,b], \mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R}) : \|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon$

ie $\forall f \in \mathcal{C}^0_m([a,b], \mathbb{R}), \exists (p_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$:
$\forall n \geqslant 1, \|f - p_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$

Rq : $(f | g) = \int_a^b fg$, $\|f\|_2 = \int_a^b f^2$

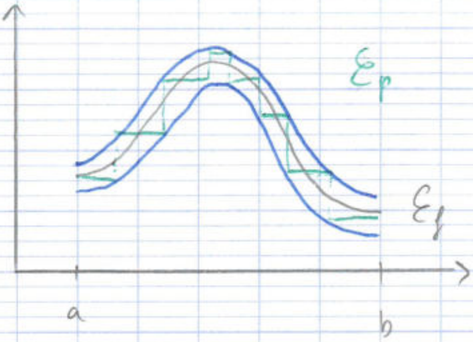
$\|f - g\|_2 = \int_a^b (f-g)^2$

ie $\exists (p_n)_n \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}} : \|f - p_n\|_\infty \longrightarrow 0$

c) $\exists (p_n)_n \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}} : p_n \xrightarrow[\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$

Lemme : C'est vrai pour les fonctions continues

démo du lemme :



Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$
Soit $\varepsilon > 0$
On cherche $p \in \mathcal{E}_{sc}([a,b], \mathbb{R})$ tq $\|p - f\|_\infty \leq \varepsilon$

On considère

$$A := \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g \in \mathcal{E}_{sc}([a,x], \mathbb{R}) : \\ \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon \end{array} \right\}$$

But : mq $b \in A$

1°) $A \neq \emptyset$
En effet, $\bar{c}$ f est continue en a : soit $\delta > 0$ tq

$$\forall x \in [a, a+\delta], \; |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Alors on prend $g : [a, a+\delta] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(a)$

Rpx : $f, g : I \to \mathbb{R}$; $\varepsilon > 0$
$\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in I, \; |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$

(⇐) Si on a $\forall x,\ |f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon$
alors en passant au sup :
$$\sup_{x\in I} |f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon$$
ie $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$

(⇒) Mq $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$
Soit $x \in I$
On a $|f(x)-g(x)| \leqslant \underbrace{\sup_{t\in I} |f(t)-g(t)|}_{\leqslant \varepsilon}$

On a sur $[a, a+\delta]$, $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$
car $\forall x \in [a, a+\delta]$, $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$

Bilan : $\exists \delta > 0 : a+\delta \in A$
donc $A \neq \emptyset$
On pose $\beta := \sup A$
(en effet : $A \neq \emptyset$ et A majorée par b)

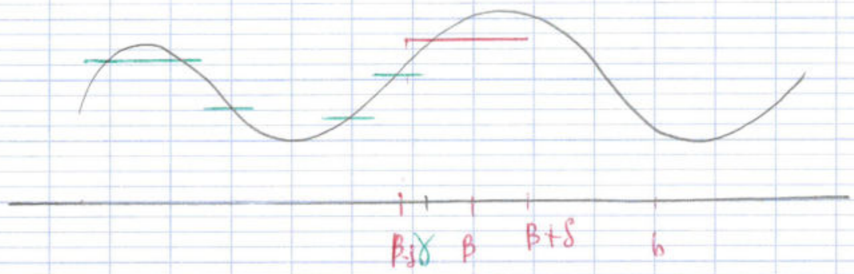
Mq $\beta = b$
On suppose que $\beta < b$
Ĉ f est c^0 en β
Soit $\delta > 0$ tq $\forall x \in [\beta-\delta, \beta+\delta]$, $|f(x)-f(\beta)| \leqslant \varepsilon$

Comme $\beta = \sup A$ et $\beta - \delta < \beta$,
il existe $\gamma \in]\beta-\delta ; \beta]$ tq $\gamma \in A$
Caractérisation à la ε de sup A
On fixe un tel $\gamma \in A$: soit $g_1 \in \mathcal{E}_{sc}([a,\gamma], \mathbb{R})$
tq $\|g_1 - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ sur $[a,\gamma]$
puis on prolonge g_1 sur $[a, \beta+\delta]$ en posant :

$$g_2 : [a, \beta+\delta] \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} g_1(x) \text{ si } x \leqslant \beta-\delta \\ f(\beta) \text{ si } x \in]\beta-\delta, \beta+\delta] \end{cases}$$

donc $\beta + \delta \in A$: absurde

donc $\beta = b$



On montre de même que $b \in A$

démo du théorème :

Soit $f \in \mathcal{E}^0_m([a,b], \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$

Soit $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ adaptée à f

On se place sur $]t_i, t_{i+1}[$

Soit $f_i : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$f\Big|_{]t_i, t_{i+1}[} = f_i\Big|_{]t_i, t_{i+1}[}$$

Grâce au lemme, on a $g_i \in \mathcal{E}_{se}([t_i, t_{i+1}], \mathbb{R})$ tq

$$\| g_i - f_i \|_\infty \leqslant \varepsilon$$
sur $[t_i, t_{i+1}]$

On met ces g_i "bout à bout" pour obtenir g.

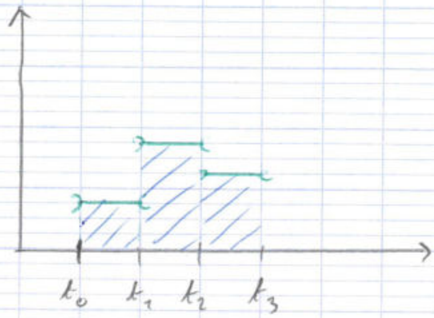
Enfin en t_i, on impose $g(t_i) = f(t_i)$

II, Construction de l'intégrale

1) Intégrale des fonctions en escalier

<u>Déf :</u> Soit $f \in \mathcal{E}sc([a,b],\mathbb{R})$ et soit $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ une subdivision adaptée à f

On pose $I(f,\sigma) := \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)$



<u>Prop :</u> Si σ, τ adaptées à f alors $I(\sigma, f) = I(\tau, f)$

<u>démo :</u>

1°) Mq σ ⊕ fine que $\tau \Rightarrow I(\sigma, f) = I(\tau, f)$
ok

2°) Si σ, τ adaptées à f
on prend $\sigma \cup \tau$ ⊕ fine que σ et τ
donc $I(\sigma, f) = I(\sigma \cup \tau, f) = I(\tau, f)$

<u>Définition :</u> Soit $f \in \mathcal{E}sc([a,b],\mathbb{R})$
l'intégrale de f, notée $\int_{[a,b]} f$ est la valeur commune $I(\sigma, f)$ quand σ est adaptée à f

2) Intégrale des fonctions continues par morceaux

Soit $f \in \mathcal{E}^0_m([a,b], \mathbb{R})$

D'après le thm d'approximation pour les fonctions en escalier

Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0} \in Esc([a,b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

On mq

1°) La suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

converge vers un nombre noté I

2°) Si on prend $(q_n)_n \in Esc([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $q_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

alors $\left(\int_{[a,b]} q_n\right)_{n\geq 0}$ converge également vers I

<u>Définition</u> : Ce nombre réel I qui ne dépend pas de l'approximation de f choisie est appelée intégrale de f sur $[a,b]$ et est noté $\int_{[a,b]} f$

<u>démo</u> :

1°) Admis

Idée : Mq la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\geq 0}$ vérifie le critère de Cauchy

⚠ $\left.\begin{array}{l} u_{n+1} - u_n \to 0 \\ (u_n)_n \text{ bornée} \end{array}\right\} \not\Rightarrow (u_n) \xrightarrow{CV}$

contre exemple :

On part de $u_0 = 0$ et on ajoute $\frac{1}{n}$ jusqu'au moment où on dépasse 2 strict^t

Puis on soustrait $\frac{1}{n}$ jusqu'à ce qu'on passe sous $-\ln 2$
Puis on inverse ...

On peut mq :
$\forall l \in [-\ln 2, \ln 2], \exists \varphi$ extractrice : $u_{\varphi(n)} \to l$

Idée : Se ramener à des séries
ie mq $\sum_{n \geq 0} I_{n+1} - I_n \xrightarrow{CV}$ où $I_n = \int_{[a,b]} p_n$

démo de 2°)

Soient $(p_n)_n, (q_n)_n \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$
tq $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$
$q_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

On note $I_n := \int_{[a,b]} p_n$ et $J_n := \int_{[a,b]} q_n$

On admet que $I_n \to I$
$J_n \to J$

Mq $I = J$
Soit n, on calcule

$$|I_n - J_n| = \left| \int_{[a,b]} p_n - \int_{[a,b]} a_n \right| \underset{\text{admis}}{=} \left| \int_{[a,b]} (p_n - a_n) \right|$$

$$\underset{\text{admis}}{\leq} \int_{[a,b]} |p_n - a_n|$$

Lemme : $p \in \mathcal{E}sc$

$$\left| \int_{[a,b]} p \right| \leq (b-a) \cdot \|p\|_\infty$$

<u>démo</u> : $(t_0, \dots t_N)$ adaptée à p

On calcule $\left| \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot p\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \right|$

$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot \left| p\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \right|$$

inégalité Δ

$$\leq \|p\|_\infty \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} t_{i+1} - t_i}_{b-a}$$

donc $\int |p_n - q_n| \leq (b-a) \cdot \|p_n - q_n\|_\infty$

$$= (b-a) \cdot \|p_n - f + f - p_n\|_\infty$$

$$\leq (b-a) \cdot \left(\underbrace{\|p_n - f\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{\|f - p_n\|_\infty}_{\to 0} \right)$$

Bilan : $|I_n - J_n| \leq$ suite qui tend vers 0

donc $I = J$ $\blacksquare$

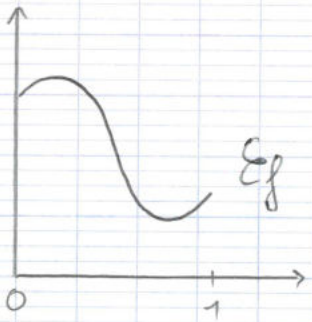
III, Propriétés de l'intégrale

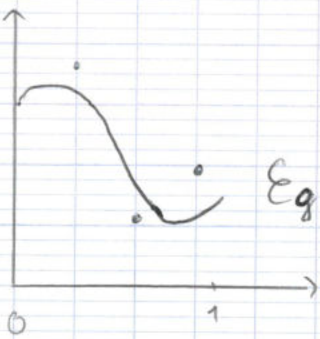
1) Changer un nombre fini de valeurs ne change pas l'intégrale

Prop : Soient $f, g \in \mathcal{E}^{\circ}_{m}([a,b], \mathbb{R})$
tq $f = g$ sauf en un nombre fini de points

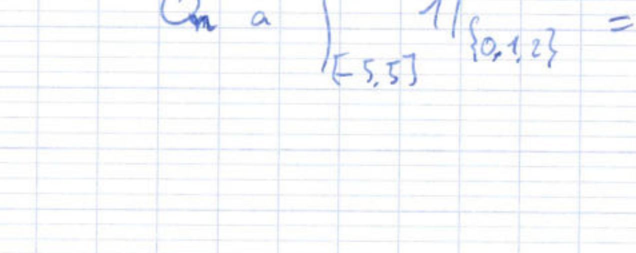
Ie tq $\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\}$ est fini

alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$





Exemple : on considère $1\!\!1_{\{0,1,2\}}$



$\in \mathcal{E}^{\circ}_{m}([-5,5], \mathbb{R})$

On a $\displaystyle\int_{[-5,5]} 1\!\!1_{\{0,1,2\}} = 0$

2) Linéarité

Prop : Soient $f, g \in \mathcal{E}^\circ_m([a,b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $$\int_{[a,b]} f + \lambda g = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g$$

3') Inégalité triangulaire $R^\times$

Prop : Soit $f \in \mathcal{E}^\circ_m([a,b], \mathbb{R})$

Alors, $$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

schéma démo :

. On mq c'est vrai pour les fct en escalier

. On mq $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ alors $|f_n| \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} |f|$

. On passe à la limite :

$$\begin{array}{ccc} \left| \int_{[a,b]} \varphi_n \right| & \leqslant & \int_{[a,b]} |\varphi_n| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left| \int f \right| & & \int |f| \end{array}$$

4) Positivité

Prop : Soit $f \in \mathcal{E}^\circ_m([a,b], \mathbb{R})$, alors

$$f \geqslant 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geqslant 0$$

5) Croissance

Prop : Soient $f, g \in \mathcal{E}^0_m([a,b], \mathbb{R})$

$$f \leq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

6) Stricte positivité

Prop : Soit $f \in \mathcal{E}^0([a,b], \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} f \geq 0 \\ f \neq \tilde{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{[a,b]} f > 0$$

Rq : c'est F si f est $\mathcal{E}^0_m$
ctr-exemple : $\mathbb{1}_{\{0\}}$ sur $[-1, 1]$

Théorème aux 3 hypothèses

Osq $a < b$
Soit $f \in \mathcal{E}^0_m([a,b], \mathbb{R})$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \in \mathcal{E}^0([a,b], \mathbb{R}) \\ \cdot\ f \geq 0 \\ \cdot\ \int_{[a,b]} f = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f = \tilde{0}$$

démo : Soit $f \in \mathcal{E}^0_m([a,b], \mathbb{R})$ tq $f \geq 0$
Mq $f \neq \tilde{0} \Rightarrow \int_{[a,b]} f > 0$

Osq $f \neq \tilde{0}$
Soit $x_0 \in [a,b]$ tq $f(x_0) > 0$
Comme f est continue en x_0, on sait que $f > 0$ au $\mathcal{V}(x_0)$

On veut un ε_0 de sécurité

On prend $\varepsilon_0 := \dfrac{f(x_0)}{2}$

On sait que $f \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$ au $\mathcal{V}(x_0)$

Soit donc $\delta > 0$ tq $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$

On pose alors $g := \dfrac{f(x_0)}{2} \cdot \mathbb{1}|_{[x_0-\delta, x_0+\delta]}$

On a $f \geqslant g$

. Sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, c'est car $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$ sur cet intervalle

. ailleurs c'est car $f \geqslant 0$

donc $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} g$

$g \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$

On a $\displaystyle\int_{[a,b]} g = 2\delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0$

Bilan : $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$

7) L'intégrale est une forme linéaire continue

Prop : On considère

$$I : \mathcal{E}^{\circ}_{m}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \int_{[a,b]} f$$

Alors :

1°) $I(\cdot)$ est une forme linéaire

2°) $I(\cdot)$ est $(b-a)$-lipschitzienne

ie $\forall f, g \in \mathcal{E}^{\circ}_{m}([a,b],\mathbb{R}),\ \left| I(f) - I(g) \right| \leqslant |b-a| \cdot \|f-g\|_\infty$

3°) donc $I(\cdot) : (\mathcal{E}^{\circ}_{m}([a,b],\mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue

4°) Si $(f_n)_n \in \mathcal{E}^{\circ}_{m}([a,b],\mathbb{R})$ et si $f \in \mathcal{E}^{\circ}_{m}([a,b],\mathbb{R})$
alors :

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \Rightarrow \int_{[a,b]} f_n \longrightarrow \int_{[a,b]} f$$

démo : 1°) ok cf 2)

2°) Soient $f, g \in \mathcal{E}^{\circ}_{m}([a,b],\mathbb{R})$

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} g \right| = \left| \int_{[a,b]} (f-g) \right|$$
$$\leqslant \int_{[a,b]} |f-g|$$

Or $|f-g| \leqslant \|f-g\|_\infty$

$$\leqslant \int_{[a,b]} \|f-g\|_\infty = |b-a| \cdot \|f-g\|_\infty$$

Ainsi $\left| I(f) - I(g) \right| \leqslant M \cdot \|f-g\|_\infty$ où $M := |b-a|$

3°) lipschitzienne $\Rightarrow$ continue

Rq : $\Rightarrow$ uniformément continue

4°) C'est la caractérisation séquentielle de la continuité.

ou $|I(f_n) - I(f)| \leqslant |b-a| \cdot \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\to 0}$ $\to 0$

ie $\displaystyle\int_{[a,b]} f_n \longrightarrow \int_{[a,b]} f$

Théorème de Bolzano - Weierstrass (HP)

Si une suite est bornée, je peux en extraire une sous-suite convergente

ie si $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice et $l \in \mathbb{R}$ tq $u_{\varphi(n)} \to l$

Si $(f_n)_n \in \mathcal{E}^0_m([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

$f \in \mathcal{E}^0_m([a,b], \mathbb{R})$

alors $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\Longrightarrow} f \Rightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f_n \longrightarrow \int_{[a,b]} f$ dans $\mathbb{R}$

IV, Intégrale orientée

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\ell(I)>0$

1) Fonctions continues par morceaux sur I

Jusqu'à présent on avait $I=[a,b]$ (un segment)
Maintenant I est qcq.

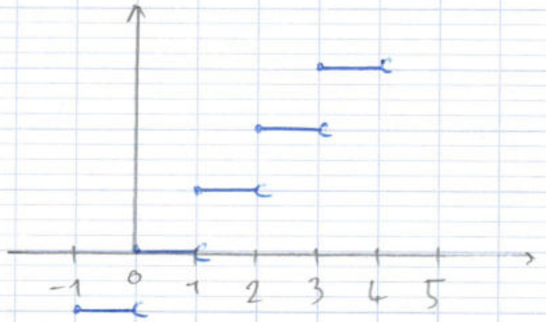
Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que f est continue par morceaux sur I ssi
$\forall J \subset I$ segment, $f|_J \in \mathcal{E}^0_m(J,\mathbb{R})$

On note $\mathcal{E}^0_m(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{E}_m(I,\mathbb{R})$ l'ens. de ces fonctions

Rq : $\mathcal{E}^0_m(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev qui contient $\mathcal{E}(I,\mathbb{R})$ qui est stable par produit et $|\cdot|$

⚠ Si I n'est pas un segment,
$f \in \mathcal{E}^0_m(I,\mathbb{R}) \not\Rightarrow f$ bornée en g^{al}

Contre-ex :
On prend $I=\mathbb{R}$
On prend $f=\lfloor\cdot\rfloor$



Soit a,b tq $a<b$

On voit que $f|_{[a,b]}$ admet une subdivision adaptée

Bilan : $\lfloor \cdot \rfloor \in \mathcal{E}^\circ_{n}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

et $\lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas bornée

p. ex : $\lfloor \cdot \rfloor \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

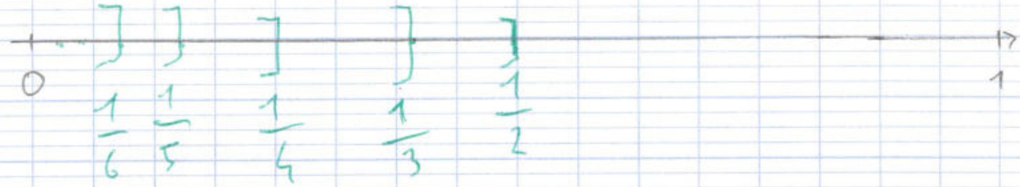
. Autre exemple

On prend $I =]0,1]$

On a $]0,1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

et cette réunion est disjointe

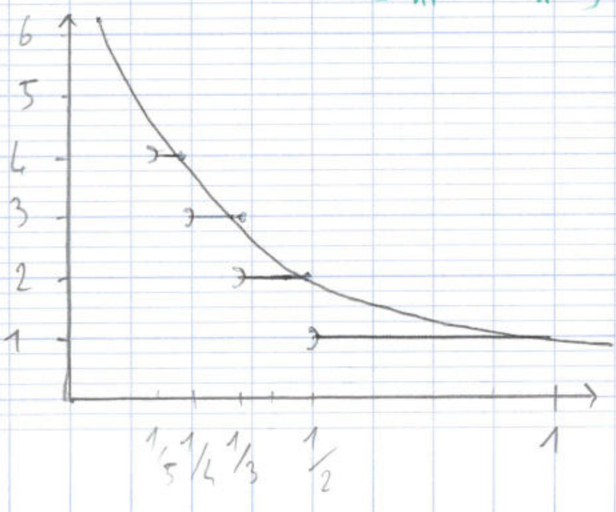
ie $]0,1] = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ (*)



(*) signifie q $\forall x \in]0,1], \exists! n \in \mathbb{N}^* : x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

On définit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], f(x) = n$



On a $f \in \mathcal{E}^0_m(]0,1], \mathbb{R})$

En effet, un segment $J \subset]0,1]$ est de la forme $[a, b]$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$

On a $f(x) \xrightarrow[0^+]{} +\infty$

donc f est non bornée

2) Définition de l'intégrale orientée

Déf : Soit $f \in \mathcal{E}^0_m(I, \mathbb{R})$

Soient $a, b \in I$ — si $a \leqslant b$: donc $[a,b] \subset I$ car I est convexe

donc $f|_{[a,b]} \in \mathcal{E}^0_m([a,b], \mathbb{R})$

On note $\int_a^b f$ le nombre réel défini par :

$$\int_a^b f := \begin{cases} \text{si } a < b : & \int_{[a,b]} f \\ \text{si } a = b : & 0 \\ \text{si } a > b : & -\int_{[b,a]} f \end{cases}$$

On note aussi $f(t)\,dt$ si t est une variable libre

3) Relation de Chasles

Prop : Soit $f \in \mathcal{E}^0_m(I, \mathbb{R})$, soient $a, b, c \in I$, alors :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

démo :

Si $a \leqslant b \leqslant c$, mq : $\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]} f \quad (*)$

On mq $(*)$ pour les fonctions en escalier

Puis on passe à la limite en prenant une approximation $(\varphi_n)_n \in \mathcal{E}_{sc}([a,c],\mathbb{R})$ de f

Si $a \leqslant c \leqslant b$

On a $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

$\iff \int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$

$\iff \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$: cas précédent

4) Inégalité triangulaire

⚠ En g^{al}, $\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$ est F !!

Contre - exemple :

$a = 1$
$b = 0$
$f = \tilde{1}$

on a $\left| \int_1^0 1\, dt \right| = \left| [t]_1^0 \right| = |-1| = 1$

et $\int_1^0 1\, dt = -1$

donc $1 \leqslant -1$: faux

L'inégalité est fausse si on intègre dans le mauvais sens

⚠ qd les bornes sont variables

$$\left| \int_a^x f \right| \leqslant \int_a^x |f| \quad \text{si } x \geqslant a$$

$$\leqslant \int_x^a |f| \quad \text{si } x \leqslant a$$

V, Théorème fondamental de l'analyse

Idée : L'opération d'intégration correspond à la primitivation

Notations : . I intervalle tq $\ell(I) > 0$
. $f \in \mathcal{E}^\circ_m(I, \mathbb{R})$
. $x_0 \in I$

On pose $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\, dt$

Cette fonction est parfaitement définie car si $x \in I$,
on a $x, x_0 \in I$
donc si $x_0 \leqslant x$, $[x_0, x]$ est un segment inclus dans I
donc par déf : $f|_{[x_0, x]} \in \mathcal{E}^\circ_m([x_0, x], \mathbb{R})$

$\int_{[x_0, x]} f$ est bien définie

1) F est continue

Prop : $F : I \to \mathbb{R}$ est continue

démo : Soit $a \in I$, soit $\varepsilon > 0$

Mq F est continue en a

On se place dans le cas où $a \subsetneq I$, $a \in \mathring{I}$

Soit donc $\delta > 0$ tq $[a-\delta, a+\delta] \subset I$

On cherche $\delta' > 0$ tq $\forall x \in [a-\delta', a+\delta']$, $|F(x) - F(a)| \leq \varepsilon$

Rq : $f|_{[a-\delta, a+\delta]} \in \mathcal{E}^{\circ}_{m}([a-\delta, a+\delta], \mathbb{R})$

donc f est bornée sur $[a-\delta, a+\delta]$

On note $M := \sup_{t \in [a-\delta, a+\delta]} |f(t)|$

On considère la restriction de F au segment $[a-\delta, a+\delta]$

Mq F est M-lipschitzienne sur cet intervalle

ie $\forall x, y \in [a-\delta, a+\delta]$, $|F(x) - F(y)| \leq M \cdot |x-y|$

donc on aura que F est continue sur $]a-\delta, a+\delta[$, donc on aura que F est continue en a

Soient $x, y \in [a-\delta, a+\delta]$

On a :
$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f - \int_{x_0}^{y} f \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} f + \int_{y}^{x_0} f \right| \\
&= \left| \int_{y}^{x} f \right| \\
&\leq \int_{y}^{x} |f| \quad \text{si } y \leq x \\
&\leq \int_{y}^{x} M \\
&= M(x-y) \\
&= M \cdot |y-x|
\end{aligned}$$

si $x \leqslant y$ on a $\left|\int_y^x f\right| = \left|\int_x^y f\right|$

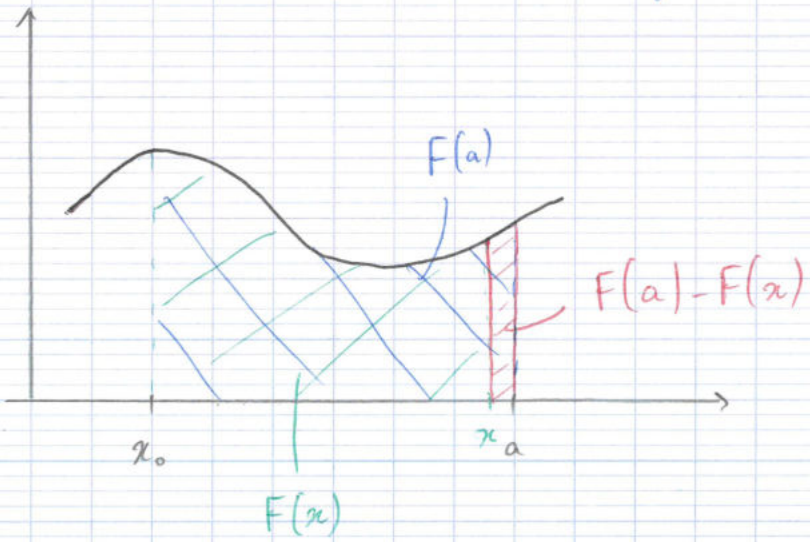
$$\leqslant \int_x^y |f|$$

$$\leqslant M(y-x)$$

$$= M|y-x|$$

Dans tous les cas, on a :

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M \cdot |x-y|$$



Rq : $f \in \mathcal{E}^\circ_m(I, \mathbb{R})$ alors f est localement bornée :
$\forall a \in I$, $\exists \delta > 0$: $f|_{I \cap]a-\delta, a+\delta[}$ est bornée

Ainsi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas $\mathcal{E}^\circ_m([a,b], \mathbb{R})$ donc elle n'est pas bornée au $v(0)$

mais $\frac{1}{x}$ est $\mathcal{E}^\circ_m(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

2) Un exemple

On prend $I = \mathbb{R}$, $f = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}$ et on prend $x_0 = 0$

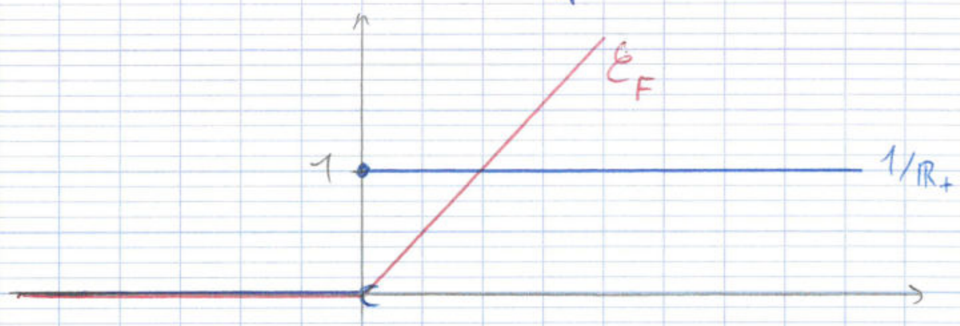
Calculons puis dessinons F

Soit $x \in \mathbb{R}$

. Si $x = 0$: On a $F(x) = \int_0^0 f = 0$

. si $x < 0$: on a $F(x) = \int_0^x f = -\int_x^0 \underbrace{f(t)}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ car } t<0}} dt = 0$

. si $x > 0$: on a $F(x) = \int_0^x \underbrace{f(t)}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} dt = [t]_0^x = x$



Rq : 1°) F est continue

2°) F n'est pas dérivable en 0 et f n'est pas continue en 0

3) Gain de régularité local

<u>Prop</u>. Soit $a \in I$, on a :

$$f \text{ continue en } a \Rightarrow \begin{cases} F \text{ dérivable en } a \\ \text{et } F'(a) = f(a) \end{cases}$$

<u>démo</u> : Soit $a \in I$. Osq f est continue en a
Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On calcule :

$$\tau_{F,a}(x) = \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{\int_{x_0}^{x} f - \int_{x_0}^{a} f}{x-a}$$
$$= \frac{\int_a^x f}{x-a}$$

rq : $\tau_{F,a}(x)$ est la valeur moyenne de f entre a et x

démo non rigoureuse :
si $x \simeq a$, alors $\hat{c}$ f est c^0 en a, si t est compris entre a et x on a $f(t) \simeq f(a)$
donc si $x \simeq a$, on a

$$\tau_{F,a}(x) = \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a} \simeq \frac{\int_a^x f(a)\,dt}{x-a} = f(a)$$

Bilan : $x \simeq a \Rightarrow \tau_{f,a}(x) \simeq f(a)$

<u>démo</u> :
Mq $\tau_{F,a}(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} f(a)$

Soit $\varepsilon > 0$. $\hat{C}$ f est continue en a,
Soit $\delta > 0$ tq $\forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I$, $|f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$
On calcule : soit $x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I$ tq $x \neq a$

$$\left| \tau_{F,a}(x) - f(a) \right| = \left| \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a} - f(a) \right|$$

Q : homogénéiser les termes

On a $f(a) = \dfrac{\int_a^x f(a)\,dt}{x-a}$

donc $\left| \tau_{F,a}(x) - f(a) \right| = \left| \dfrac{\int_a^x f(t) - f(a)\,dt}{x-a} \right|$

si $x \geq a$, on a : $\left| \tau_{F,a}(x) - f(a) \right| \leq \dfrac{\int_a^x |f(t) - f(a)| dt}{x-a}$

Or $\hat{c}$ $x \in]a-\delta, a+\delta[$

et $\hat{c}$ $t \in [a, x]$, on a $t \in [a-\delta, a+\delta]$

donc $f(t) - f(a) \leq \varepsilon$

donc $|\tau_{F,a}(x) - f(a)| \leq \dfrac{\int_a^x \varepsilon \, dt}{(x-a)} = \varepsilon$

si $x \leq a$, on procède de même

On a bien montré que $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[\cap I \setminus \{a\}$,

$|\tau_{F,a}(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Bilan : on part de $f \in \mathcal{E}^\circ_m(I, \mathbb{R})$

on définit $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) \, dt$

On a F continue

On a f C° en a $\Rightarrow$ F est dérivable en a

4) Théorème fondamental de l'analyse

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{E}^\circ_m(I, \mathbb{R})$

Soit $x_0 \in I$

On pose $F : I \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) \, dt$

Alors :

f continue sur I $\Rightarrow \begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ \text{et } F' = f \end{cases}$

ie f continue sur $I \Rightarrow F$ est une primitive de f sur I

Rq : En particulier :

$$f \in \mathcal{C}^0 \Rightarrow F \in \mathcal{C}^1$$

démo : ok

5) Gain de régularité

Prop : Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$f \in \mathcal{C}^k \Rightarrow F \in \mathcal{C}^{k+1}$$

démo :

. $k \in \mathbb{N}$

Osq $f \in \mathcal{C}^k$

Mq $F \in \mathcal{C}^{k+1}$

Déjà, on a $F \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ car f est continue

et $F' = f$

donc $F' \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ donc $F \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{R})$

. $k = \infty$

Osq $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$

Mq $F \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$

Rappel : $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$

On veut mq $F \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ pour tout $k \geq 0$

Si $k = 0$: ok car $F \in \mathcal{C}^0$

si $k \geq 1$: on a $f \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$, donc d'après ce qui précède, on a : $F \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$

Ainsi : $\forall k \geq 0$, $F \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$

ie : $F \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$

Rq : on a aussi $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{k \geq 42} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$

VI, Sommes de Riemann

Données : $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$

. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

1) Définition

Déf : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$

$S_n(f)$ est appelée somme de Riemann associée à f d'ordre n

2) Dessin

Regardons les $a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

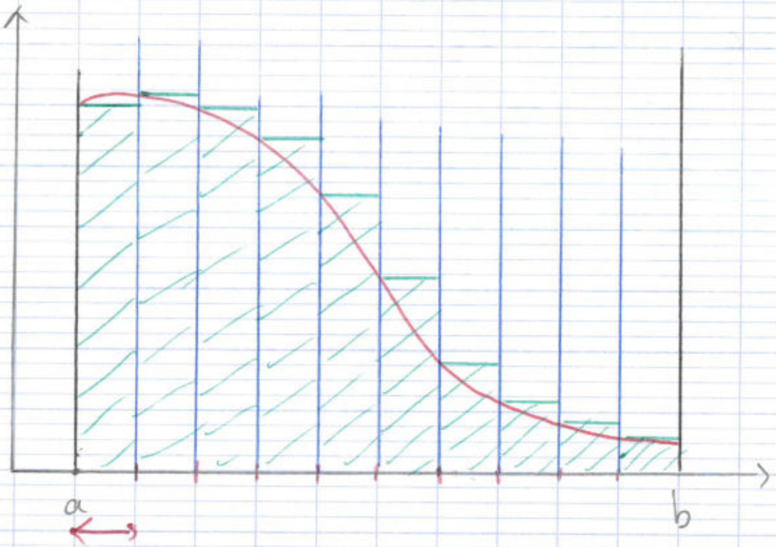
c'est a, $a + \frac{b-a}{n}$, $a + \frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n}$, ...

et pour $k = n-1$, on a

$$a + (n-1)\frac{b-a}{n} = a + n \cdot \frac{b-a}{n} - \frac{b-a}{n}$$

$$= b - \frac{b-a}{n}$$

$\frac{b-a}{n}$ est le pas de $S_n(f)$



$\frac{b-a}{n}$; on a divisé $[a,b]$ en n parties égales

3) Méthode des rectangles

Théorème :

$$f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \Longrightarrow S_n(f) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$$

démo :

On fait la démo dans le cas où $f \in \mathcal{C}^1$

Osq $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, on note $t_k := a + k\cdot\frac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$

Soit $n \geq 1$, on calcule :

$$S_n(f) - \int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(t_k) - \int_a^b f(t)\,dt$$

Méthode : homogénéiser la différence

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(t_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\,dt$$

Rq : $t_{k+1} - t_k = \frac{b-a}{n}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k)\,dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underbrace{f(t_k) - f(t)}_{\frac{b-a}{n}}\,dt$$

Ainsi, on a par inégalités triangulaires

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k) - f(t)|\,dt$$

Or, f est $\mathcal{C}^1$ donc f' est continue donc bornée par $\|f'\|_\infty$

d'après l'IAF, on a :

$$\forall t, t', \quad |f(t) - f(t')| \leqslant \|f'\|_\infty \cdot |t - t'|$$

existe car f' est c^0 donc bornée

$$\leqslant \|f'\|_\infty \; |t_{k+1} - t_k|$$

$$\leqslant \|f'\|_\infty \; (t_{k+1} - t_k)$$

Ainsi $\left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leqslant \|f'\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{b-a}{n}\right) dt$

$$\leqslant \|f'\|_\infty \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

$$\leqslant \|f'\|_\infty \cdot \underbrace{\frac{(b-a)^2}{n}}_{\to 0}$$

Rq : on peut améliorer cette majoration car $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'\|_\infty \cdot |t - t_i|\,dt$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'\|_\infty (t - t_i)\, dt$$

$$= \|f'\|_\infty \left[\frac{(t-t_i)^2}{2} \right]_{t_i}^{t_{i+1}}$$

$$= \|f'\|_\infty \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2}$$

$$= \|f'\|_\infty . \frac{(b-a)^2}{2n^2}$$

donc $\left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leqslant \|f'\|_\infty . \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{2n^2}$

$$= \|f'\|_\infty . \frac{(b-a)^2}{2n}$$

Bilan : 1°) $S_n(f) - \int_a^b f \longrightarrow 0$

ie $S_n(f) \longrightarrow \int_a^b f$

2°) Mieux, on contrôle la vitesse de convergence

On a $\left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} . \frac{1}{n}$

donc $S_n(f) - \int_a^b f = O\left(\frac{1}{n}\right)$

Prop : Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$

Alors : $S_n(f) = \int_a^b f + O\left(\frac{1}{n}\right)$

On a convergence en $O\left(\frac{1}{n}\right)$

4) Sommes de Riemann par excès

On pose $S_n^+(f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$

pour $n \geqslant 1$

Fixons $n \geqslant 1$

Calculons $S_n^+(f) - S_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$

$S_n^+(f) - S_n(f) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(b) - f(a)\right)$

ie $S_n^+(f) \underset{n \to \infty}{=} S_n(f) + O\left(\frac{1}{n}\right)$

Prop :

$f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) \Rightarrow S_n^+(f) \longrightarrow \int_a^b f$ en $O\left(\frac{1}{n}\right)$

ie $S_n^+(f) - \int_a^b f = O\left(\frac{1}{n}\right)$

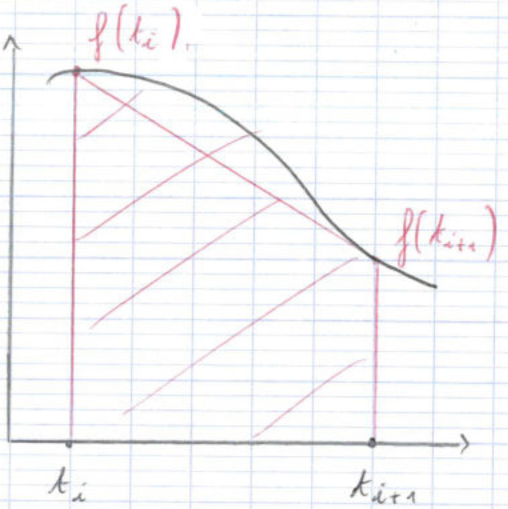
ie $S_n^+(f) = \int_a^b f = O\left(\frac{1}{n}\right)$

Rq : . Si f est continue, la preuve utilise l'uniforme continuité de f (thm de Heine)

. on a aussi :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f$$

5) Méthode des trapèzes



aire $= \dfrac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{2} \times (t_{i+1}-t_i)$

On pose $T_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{2}$

On a $\forall n \geq 1$, $T_n(f) = \dfrac{S_n(f) + S_n^+(f)}{2}$

Prop : $f \in \mathcal{E}^2 \Rightarrow T_n(f) \longrightarrow \int_a^b f$ en $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Lemme : $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$

$$\int_a^b f - \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a) =$$

démo :

Astuce : on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ si $x \in [a,b]$

On applique Taylor avec reste intégrale à F

On a $\underbrace{F(b)}_{\int_a^b f} = \underbrace{F(a)}_{0} + \underbrace{F'(a)}_{f(a)}(b-a) + \int_a^b \underbrace{F''(t)}_{f'(t)} \cdot (b-t)\, dt$

ie $\int_a^b f = f(a) \cdot (b-a) + \underbrace{\int_a^b f'(t)(b-t)\, dt}_{I_1}$ (1)

On agit symétriquement

on pose $G(x) = \int_b^x f(t)\, dt$

$\underbrace{G(a)}_{\int_b^a f} = \underbrace{G(b)}_{0} + \underbrace{G'(b)}_{f(b)} (a-b) + \int_b^a G''(t) \cdot (a-t)\, dt$

$+ \int_a^b f'(t)\, (a-t)\, dt$

donc $\int_a^b f = f(b) \cdot (b-a) + \underbrace{\int_b^a f'(t)\, (a-t)\, dt}_{I_2}$ (2)

On a $I_1 = \int_a^b f'(t) \cdot \underbrace{(b-t)}_{\theta}\, dt$

$= - \int_{b-a}^{0} f'(b-\theta)\, \theta\, d\theta$ $t = b - \theta$, $dt = -d\theta$

$= \int_0^{b-a} f'(b-\theta)\, \theta\, d\theta$

et $I_2 = \int_a^b f'(t)\, (a-t)\, dt$

$u = t - a$ $= \int_{u=0}^{b-a} f'(a+u)\, (-u)\, du$

On somme (1) et (2)

$$2\int_a^b f = (b-a)\left(f(b)+f(a)\right) + \int_0^{b-a}\left(f'(b-u) - f'(a+u)\right)u\,du$$

donc
$$\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{b-a}\left(f'(b-u) - f'(a+u)\right)u\,du$$

On suppose $f \in \mathcal{E}^2$ et $a \leq b$

On a alors :

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \right| \leq \frac{1}{2}\int_0^{b-a} |f'(b-\theta) - f'(a+\theta)|\,\theta\,d\theta$$

$$\underset{IAF}{\leq} \frac{1}{2}\|f''\|_\infty \int_0^{b-a} |(b-\theta)-(a+\theta)|\,\theta\,d\theta$$

$$(b-\theta - (a+\theta)) = 2\left(\frac{b-a}{2} - \theta\right)$$

ça se calcule en coupant l'intégrale en $\frac{b-a}{2}$

$$\leq \frac{\|f''\|_\infty}{2}\int_0^{b-a}(b-a)\,u\,du$$
$$= \frac{\|f''\|_\infty}{2}(b-a)\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{b-a}$$
$$= \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{4}$$

Bilan :

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2} \right| \leq \|f'\|_\infty \cdot \frac{(b-a)^3}{4} \quad (*)$$

démo de la méthode du trapèze

On applique $(*)$ avec $a = t_i$, $b = t_{i+1}$

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{2} \right| \leqslant \|f''\|_\infty \cdot \frac{(b-a)^3}{4n^3}$$

donc
$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - T_n(f) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{2} \right|$$
$$\leqslant n \cdot \|f''\|_\infty \cdot \frac{(b-a)^3}{4n^3}$$
$$= \frac{(b-a)^3}{4} \cdot \|f''\|_\infty \cdot \frac{1}{n^2}$$

VII, Extension à $\mathbb{C}$

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{C}$

On dit q f est C^0 par morceaux ssi

$$\mathrm{Re}(f),\ \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{E}^0_m([a,b], \mathbb{R})$$

On définit $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)$

$$a \leqslant b \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

module

module