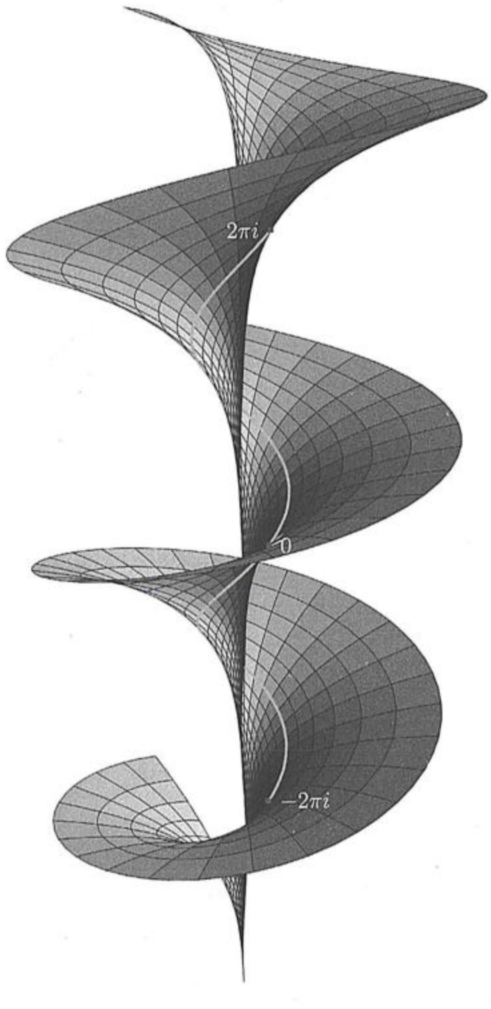
Chapitre 3

Nombres complexes



Représentation du revêtement de $\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{C}^*$ donné par $z \mapsto \exp(z)$

Les nombres complexes sont apparus pour la première fois aux alentours de 1545, pour résoudre des équations du troisième degré. Au début uniquement considérés comme un moyen artificiel de trouver de « véritables nombres », ils sont depuis devenus un objet central des mathématiques.

En effet, on a depuis compris que « $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$ » : toutes les équations algébriques dans $\mathbb{R}$ (comme par exemple $x^2 = -1$) ont « toutes leurs solutions » dans $\mathbb{C}$. Ainsi, d'un certain point de vue, $\mathbb{C}$ est le *bon ensemble de nombres à considérer en mathématiques : beaucoup d'énoncés sont plus esthétiques, symétriques, naturels quand ils sont exprimés dans $\mathbb{C}$ plutôt que dans $\mathbb{R}$.*

Nombres complexes

Rappels

1 Ensemble des nombres complexes

1.1 Définition des nombres complexes

Nous ne construirons pas dans ce cours les nombres complexes. Donnons quand même rapidement l'idée. On munit $\mathbb{R}^2$ de deux opérations $+$ et $\times$ définies par :

$$(a,b)+(a',b') := (a+a', b+b')$$
$$(a,b)\times(a',b') := (aa'-bb', ab'+a'b).$$

On note $i := (0,1)$; si $x \in \mathbb{R}$, on note encore x le couple $(x,0)$. On peut alors calculer

$$i^2 = i \times i = (-1,0) = -1.$$

Théorème 1
Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ tel que :

(i) *$\mathbb{C}$ est muni d'opérations $+$ et $\times$ vérifiant « les propriétés habituelles » ;*

(ii) *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;*

(iii) *$\mathbb{C}$ possède un élément remarquable, qu'on note i et qui vérifie $i^2 = -1$;*

(iv) *on a*
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2 : z = a + ib.$$

Quelques remarques :

- Par « propriétés habituelles », on entend par exemple
  - ▷ $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ z + z' = z' + z$
  - ▷ $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ z \times z' = z' \times z$
  - ▷ $\forall u, v, w \in \mathbb{C},\ (u+v)\times w = u \times w + v \times w$
  - ▷ *etc.*
- En fait, en plus de demander que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on doit aussi imposer que si $x, y \in \mathbb{R}$, les résultats de $x+y$ et $x \times y$ soient les même quand ces opérations sont effectuées dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.
- La démonstration de ce théorème est admise mais elle ne pose en fait pas de difficulté : comme dit plus haut, on peut par exemple construire $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}^2$. Cependant, il y a plusieurs autres manières de construire $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1.2 Partie réelle et partie imaginaire

L'assertion *(iv)* du théorème 1 permet de définir les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe :

Définition
Soit $z \in \mathbb{C}$.
D'après, le point (iv) du théorème 1, il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ et un unique $b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

(i) Le nombre a est appelé partie réelle de z *et est noté* $\operatorname{Re}(z)$ *;*
(ii) le nombre b est appelé partie imaginaire de z *et est noté* $\operatorname{Im}(z)$ *;*

On dispose donc de deux fonctions

$$\operatorname{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On a, par définition,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z).}$$

On a aussi :

$$\boxed{\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases} \implies z = z'.}$$

Fait
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

a) $z = 0 \iff \big(\operatorname{Re}(z) = 0 \ \text{ et } \ \operatorname{Im}(z) = 0\big)$
b) $z \neq 0 \iff \big(\operatorname{Re}(z) \neq 0 \ \text{ ou } \ \operatorname{Im}(z) \neq 0\big)$

Fait
Les fonctions partie réelle et partie imaginaire sont « compatibles » avec l'addition.

a) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Alors, on a

$$\operatorname{Re}(u+v) = \operatorname{Re}(u) + \operatorname{Re}(v);$$
$$\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v).$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Alors, on a

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(z_k);$$
$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(z_k).$$

Attention ! En général, on n'a pas $\operatorname{Re}(u \times v) = \operatorname{Re}(u) \times \operatorname{Re}(v)$! C'est complètement faux. Par exemple, on a $\operatorname{Re}(i^2) = -1 \neq 0^2$. De même pour la partie imaginaire. On a cependant un résultat partiel :

Fait
Soient $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\operatorname{Re}(tz) = t \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(tz) = t \operatorname{Im}(z).$$

Exercice 1
Démontrer les trois faits précédents.

1.3 Un exemple de propriété

Les réflexes calculatoires que vous avez acquis par le passé concernant les nombres réels restent encore valables dans $\mathbb{C}$. En voilà un exemple :

> **Propriété**
> *On a :* $\forall z \in \mathbb{C},\ 0 \times z = 0.$

Démonstration. — Soit $z \in \mathbb{C}$. L'une des « propriétés usuelles » que les opérations de $\mathbb{C}$ doivent vérifier est

$$\forall u, v, w \in \mathbb{C}, \quad u \times (v \times w) = (u \times v) \times w.$$

Ainsi, on a

$$2 \times (0 \times z) = (2 \times 0) \times z$$

Or, 2×0 peut être calculé dans $\mathbb{R}$: on sait que $2 \times 0 = 0$. Ainsi, on a

$$2 \times (0 \times z) = 0 \times z \qquad ie \qquad (0 \times z) + (0 \times z) = 0 \times z. \tag{$*$}$$

En soustrayant des deux côtés le nombre $0 \times z$ à $(*)$, on obtient : $0 \times z = 0$. ■

1.4 Inverse d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ qu'on écrit $z = a + ib$.
On veut savoir « si z est inversible ». Mathématiquement, on se pose la question :

L'assertion « $\exists \omega \in \mathbb{C} : z \times \omega = 1$ » est-elle vraie ?

Pour commencer, faisons deux remarques :

- Si un tel ω existe, on pourra le noter $\dfrac{1}{z}$.
- Premier élément de réponse : 0 n'est pas inversible.
  - $\longrightarrow$ Déjà, cela doit être un réflexe pour vous : on ne peut pas diviser par 0, *ie* 0 n'est pas inversible.
  - $\longrightarrow$ Démontrons-le par l'absurde en choisissant $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $0 \times \omega = 1$. Or on a $\forall z \in \mathbb{C}, 0 \times z = 0$. Donc, on a $0 = 1$, ce qui est absurde.

On suppose donc $z \neq 0$ *ie* $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. **On va raisonner par analyse-synthèse.**
Analyse. On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $z \times \omega = 1$. On fixe un tel ω et on écrit $\omega = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{aligned} & (a + ib)(\alpha + i\beta) = 1 \\ ie \quad & a\alpha - b\beta + i(a\beta + \alpha b) = 1. \end{aligned}$$

Donc, par identification des parties réelles et imaginaires, on a

$$(S) : \begin{cases} a\alpha - b\beta = 1 \\ a\beta + \alpha b = 0 \end{cases}.$$

Utilisons l'astuce suivante : comme $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, on est assuré que $a^2 + b^2 \neq 0$. Pour être plus précis, on sait même que :

> **Fait**
> *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Alors, on a*
> $$(a = 0 \text{ et } b = 0) \iff a^2 + b^2 = 0.$$

Ainsi, porté par cette idée, on va faire apparaître dans le système (S) la quantité a^2+b^2. En multipliant la première ligne de (S) par a et la seconde par b, on obtient :

$$\begin{cases} a^2\alpha - ab\beta = a \\ ab\beta + \alpha b^2 = 0 \end{cases}.$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient $\alpha(a^2+b^2) = a$ et donc

$$\boxed{\alpha = \frac{a}{a^2+b^2}.}$$

Exercice 2
En suivant la même méthode, trouver β.

Analyse. Une fois la valeur de β trouvée, on peut vérifier que ça marche.

1.5 Méthode de la quantité conjuguée

Maintenant qu'on sait que tout nombre complexe non nul est inversible, on peut écrire $\frac{1}{z}$ si $z \neq 0$. En utilisant la méthode suivante, qui permet de « chasser les parties imaginaires du dénominateur », on retrouve facilement l'expression de l'inverse d'un nombre complexe.

Proposition
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. On a

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

2 Conjugaison complexe

2.1 Définition

Définition
Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle conjugué de z *et on note* $\overline{z}$ *le nombre complexe défini par*

$$\overline{z} := \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z).$$

La conjugaison complexe est l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$.

2.2 Propriétés fondamentales

Proposition
La conjugaison complexe est « compatible avec les opérations algébriques » :

(i) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(ii) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

C'est une « involution » :

(iii) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{\overline{z}} = z$.

On dit que « la conjugaison est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$ ». On en déduit :

Corollaire
On a :

(i) $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n$;

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;

(iii) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exercice 3
Démontrer la proposition précédente et son corollaire.

2.3 Conjugaison et parties réelles et imaginaires

Si $z \in \mathbb{C}$, on dit que z *est imaginaire pur* $\overset{\Delta}{\textit{ssi}}$ $\mathrm{Re}(z) = 0$; on note alors $z \in i\mathbb{R}$.
On a :

Fait
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff \overline{z} = z \\ z \in i\mathbb{R} &\iff \overline{z} = -z. \end{aligned}$$

On a aussi :

Fait
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

3 Module

3.1 Définition

Pour commencer, remarquons qu'on a :

Proposition
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, on a

$$z \times \overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Démonstration. — C'est un simple calcul, laissé au lecteur à titre d'exercice. ∎

On peut donc définir :

Définition
Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle module de z *et on note $|z|$ le nombre réel positif ou nul défini par*

$$|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

3.2 Propriété

Proposition
On a :

(i) $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z \times z'| = |z| \times |z'|$;

(ii) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \iff z = 0$;

(iii) Si $z \in \mathbb{R}$, le module de z égale la valeur absolue de z.

On en déduit :

Corollaire
On a :

(i) $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |z^n| = |z|^n$;

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}^*,\quad \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$;

(iii) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*,\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Exercice 4
A-t-on $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z + z'| = |z| + |z'|$?
Si oui, prouvez-le ; sinon, donnez un contre-exemple.

3.3 Retour sur l'inverse

On a :

Fait
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

4 Affixes

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

4.1 Affixe d'un point

Définition
Soit M un point du plan, de coordonnées (a, b).
On appelle affixe de M *le nombre complexe $a + ib$. On note $M(a + ib)$.*

Exercice 5
On considère le nombre complexe $z := \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n le point d'affixe z^n.

1) *Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5.*
2) *Que remarquez-vous ?*

4.2 Affixe d'un vecteur

Définition
Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan, de coordonnées (x, y).
On appelle affixe de $\vec{v}$ *le nombre complexe $x + iy$. On note $\vec{v}(x + iy)$.*

Exercice 6
Quel est le vecteur d'affixe 1 ? Quel est le vecteur d'affixe i ?

Chapitre 3 : Nombres complexes

I, Rappels

1) Trigonométrie

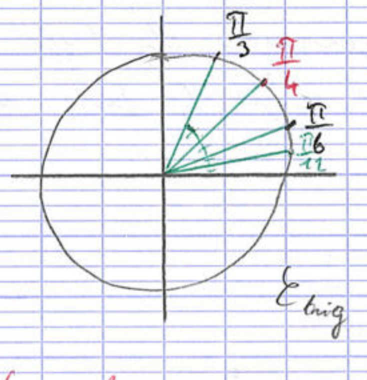
a) De $\frac{\pi}{12}$ en $\frac{\pi}{12}$

On appelle cercle trigonométrique et on note $\mathcal{C}_{trig}$ le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Calculons :

- $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$
- $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$
- $\frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}$.

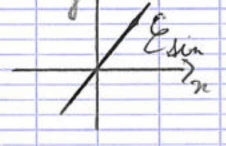
donc, les angles classiques sont les multiples successifs de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{4}$ est entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$



b) Graphes de sin et cos

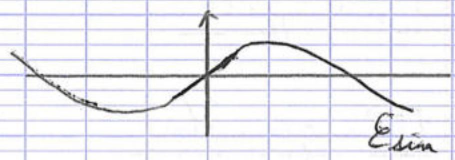
Il suffit de connaître $\mathcal{C}_{sin}$ au voisinage de 0 (noté : $V(0)$)

C'est :



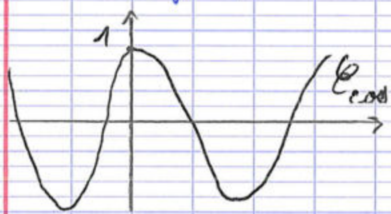
On en déduit :

- $\sin(0) = 0$
- sin est impaire
- le graphe de sin :



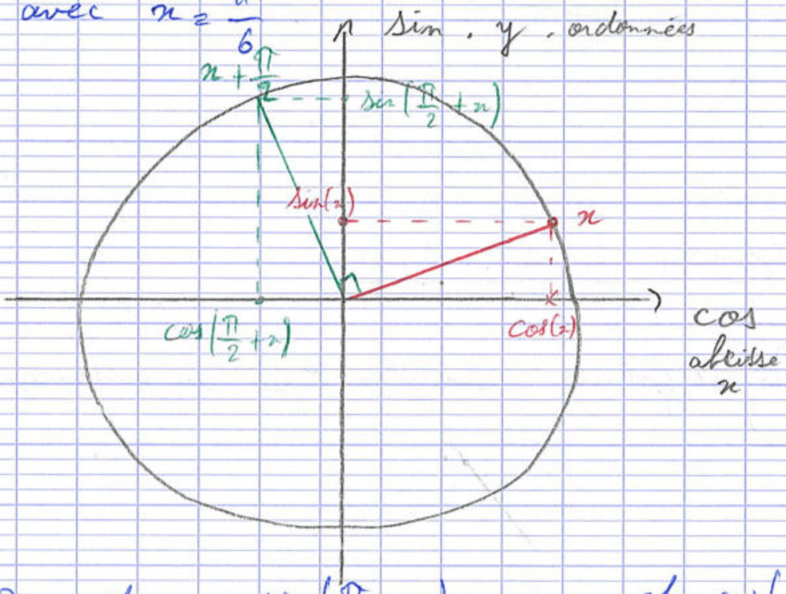
- on voit que $\sin'(0) > 0$
On en déduit $\sin' = +\cos$
- $\sin(\varepsilon) \simeq \varepsilon$ si ε est petit

- Dualement, on en déduit
que $\cos(0) = 1$, cos est paire, $\cos' = -\sin$
et le graphe de cos :



c) Angles associés

Pour retrouver les formules du type $\cos(\pi - x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, etc, il suffit de faire un beau $\mathcal{E}_{trig}$ avec $x = \frac{\pi}{6}$



On voit que $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

d) Formules d'addition

"cause, cause, cause, toujours" (expression négative)

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

2) Nombres complexes

a) Calculer $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$

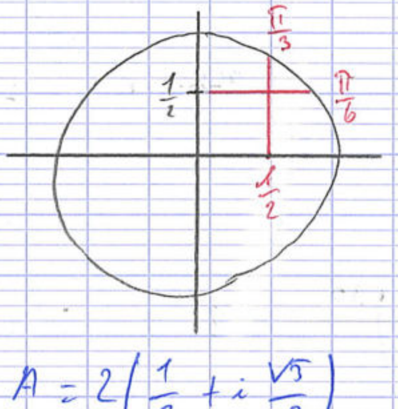
Idée : la forme exp d'un nb complexe est adaptée aux produits, aux quotients et aux puissances

Méthode notation

On note $\begin{cases} A := 1+i\sqrt{3} \\ B := 1-i \end{cases}$

Pour A : on force à apparaître $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rappel:

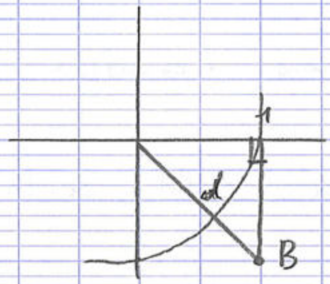


$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

On a $A = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

donc $A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Pour B, on fait un dessin



Pythagore : $d = \sqrt{2}$

On a $B = \sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Donc $\dfrac{A}{B} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$

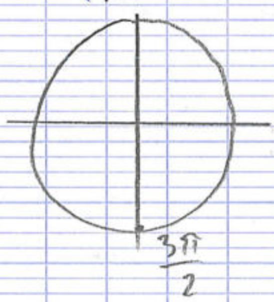
$= \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

donc $\left(\dfrac{A}{B}\right)^{30} = \sqrt{2}^{\,30}\, e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\times 30\right)}$

et $\dfrac{7\times 30}{12}\pi = \dfrac{7\times 5}{2}\pi = \dfrac{35\pi}{2} \equiv \dfrac{35}{2}\pi - 16\pi\ [2\pi]$

ie $\dfrac{35\pi}{2} \equiv \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

donc $\left(\dfrac{A}{B}\right)^{30} = 2^{15}\, e^{i\frac{3\pi}{2}}$



donc $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

CCL : $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30} = -2^{15} i$

b) On pose $A := \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$

Calculons A. On pose $B := \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}$

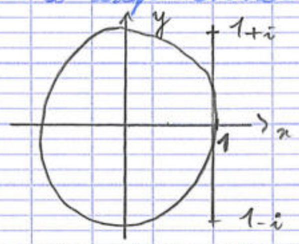
On a $A = B + \overline{B}$ Astuce

donc $A = 2\,\mathrm{Re}(B)$

Puis on calcule B à l'aide des formes exponentielles

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

et $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$



donc $B = \frac{2^2 e^{i\pi}}{2\sqrt{2}\, e^{-i3\pi/4}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Or $\frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

On a donc $\mathrm{Re}(B) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$
$= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

Donc, $A = 2$

II, Formule du binôme de Newton

1) Coefficients binomiaux !!

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{Z}$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments

ie $\binom{n}{k} := \mathrm{card}\left(\left\{ A \in \mathcal{P}(\llbracket 1; n \rrbracket) \;\middle|\; \mathrm{card}\, A = k \right\}\right)$

Exemples :

Calculons $\binom{4}{2}$

Rq : si E est fini, on a $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

Donc, $\mathcal{P}(⟦1,4⟧)$ a $2^4 = 16$ éléments

Notons $P_2(⟦1,4⟧)$ l'ensemble des parties à 2 éléments de $⟦1,4⟧$.

on énumère de façon ordonnée

$P_2(⟦1,4⟧) = \{$ les parties à 2 éléments contenant 1 : $\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{1,4\}$

2 : $\{2,3\}$ $\{2,4\}$

3 : $\{3,4\}$

CCL : $\binom{4}{2} = |P_2(⟦1,4⟧)| = 6$

Proposition : Soit $n \in \mathbb{N}$

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Démo :

1) On a $\binom{n}{0} = 1$ car la seule partie de $⟦1,n⟧$ à 0 élément est $\emptyset$

Ie $P_0(⟦1,n⟧) = \{\emptyset\}$

2) On a $\binom{n}{1} = n$.

En effet, $\mathcal{P}_1(\llbracket 1,n \rrbracket) = \left\{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \dots \{n\} \right\}$

ie $= \left\{ \{i\} \mid i \in \llbracket 1,n \rrbracket \right\}$

3) On traite uniquement le cas suivant :

soit $k \in \llbracket 0,n \rrbracket$

On veut calculer $\left| \mathcal{P}_k(\llbracket 1,n \rrbracket) \right|$

Pour compter les parties $A \subset \llbracket 1,n \rrbracket$ telles que $|A| = k$, on peut compter les parties $B \subset \llbracket 1,n \rrbracket$ telles que $|B| = n-k$.

En effet, en associant à B la partie complémentaire : $A := \llbracket 1,n \rrbracket \setminus B$, on établit une "correspondance" entre $\mathcal{P}_{n-k}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ et $\mathcal{P}_k(\llbracket 1,n \rrbracket)$

Puis on en déduit $\binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$

Rq !! Si $n \in \mathbb{N}$, on a :

. $\forall k < 0$, $\binom{n}{k} = 0$

. $\forall k > n$, $\binom{n}{k} = 0$

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Démo : Soit $n \in \mathbb{N}$

Pour construire $A \in \mathcal{P}_2(\llbracket 1,n \rrbracket)$, on procède c suit :

1. on choisit un 1er élément de $\llbracket 1,n \rrbracket$: on a n choix

2. on choisit un 2e élément $\neq$ du 1er : on a $n-1$ choix

Au total, on a : $n(n-1)$ choix possibles

Cependant avec un tel procédé, chaque partie $\{a, b\}$ a été comptée deux fois :

- une fois avec les choix a puis b
- une $2^{\text{ème}}$ fois avec les choix b puis a

Ainsi, on a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

2) Relation de Pascal !!

Proposition : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}$$

Démonstration : à connaître

Ⓐ Premier cas. $n = 0$

- si $k < 0$: on a : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} = 0$ (*)
- si $k = 0$: on a $\binom{n+1}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{-1} = 0$ (**)
- si $k = 1$: on a $\binom{1}{1} = 1$, $\binom{0}{k} = 0$, $\binom{0}{0} = 1$
- si $k > 1$: on a $\binom{1}{k} = 0$, $\binom{0}{k} = 0$ et $\binom{0}{k-1} = 0$

car $k - 1 > 0$

Ⓑ On suppose $n \geq 1$

. si $k < 0$; cf (*)

. si $k = 0$: cf (**)

. si $k = n+1$: on a $\binom{n+1}{n+1} = 1$, $\binom{n}{n+1} = 0$ et $\binom{n}{n} = 1$

. si $k > n+1$: on a $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} = 0$

. si $k \in [\![1, n]\!]$:

Soit E un ensemble à $(n+1)$ éléments

On veut compter le nb de parties à k éléments de E

On fixe $a_0 \in E$ un élément de E

Il y a deux types de parties à k éléments de E

a) les parties A telles que $a_0 \in A$

b) les parties A tq $a_0 \notin A$

. Dans le cas a)

Pour construire une partie A à k éléments tq $a_0 \in A$

On choisit une partie A' de $E \setminus \{a_0\}$ à $(k-1)$ éléments.

Ainsi, le nombre de parties vérifiant a) est $\binom{n}{k-1}$

. Dans le cas b)

Pour construire une partie A à k éléments tq $a_0 \notin A$, il suffit de choisir une partie à k éléments de $E \setminus \{a_0\}$

Donc, il y a $\binom{n}{k}$ telles parties.

⚠ $|E| = n+1$ $|E \setminus \{a_0\}| = n$

CCL : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

3) Triangle de Pascal

On représente les coeff binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $n \geqslant 0$ ds un tableau et on remplit ce tableau grâce à la relation de Pascal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

4) Formule du binôme de Newton

Théorème :

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}$

alors, on a :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Démonstra° combinatoire

On écrit : $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ fois}}$

On développe ce produit : pour chaque facteur $(a+b)$ on choisit soit a, soit b

Fixons $k \in [\![0, n]\!]$

Considérons le cas où dans les n choix à faire, on a choisi k fois "a". On a donc choisi $(n-k)$ fois "b"

Donc le produit résultant de ces choix vaut :

$a^k b^{n-k}$

Combien y a-t-il de tels cas ?

il y en a autant que de choix des k facteurs où je prendrai "a" parmi les n facteurs

ex : choix de 2 "a" dans $(a+b)^4$:

Donc, il y en a $\binom{n}{k}$

Développer un produit, c'est transformer un produit en somme (et inverse pr la factorisation)

On a : $(a+b)^n$ = somme de tous les développements possibles

$= \sum_{k=0}^{n}$ des développe^t où j'ai choisi k fois "a"

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemple :

. $(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k}$

$= \underbrace{\binom{2}{0} \times a^0 \times b^2}_{k=0} + \underbrace{\binom{2}{1} \times a^1 \times b^1}_{k=1} + \underbrace{\binom{2}{2} a^2 b^0}_{k=2}$

$= a^2 + 2ab + b^2$

. $(a+b)^3$?

1°) on part de a^3 puis on décrémente la puissance de a et on incrémente la puissance de b

$? \, a^3 + ? \, a^2 b + ? \, ab^2 + ? \, b^3$

Rq : la somme des exposants est constante, égale à 3

2°) Je coefficiente cette somme avec la ligne du triangle de Pascal correspondante

D'où $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

? faire $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Deuxième démo : à connaître

Soient $a, b \in \mathbb{C}$

Pour $n \geq 0$, on note $P(n)$: " $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ "

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence

Initialisation : $n = 0$

On a : $(a+b)^0 = 1$

et $\underbrace{\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}}_{\text{Il y a 1 terme dans cette } \Sigma} = \underbrace{\binom{0}{0} a^0 b^0}_{k=0} = 1 \times 1 \times 1 = 1$

donc $P(0)$ est vraie

Hérédité :

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Mq $P(n+1)$

On a :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a+b)$$
$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k + b^{n+1-k}}_{S_2}$$

On va homogénéiser les termes généraux de S_1 et S_2

On fait un change^t de variables dans S_1

en posant $k+1 = l$

$k = l - 1$

Dans S_1, k varie de $0 \mapsto n$

Donc dans S_1, l varie de $1 \mapsto n+1$

On a

$$S_1 = \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{(n+1)-l}$$

Comme dans S_1, la variable l est muette, on la remplace par k

On a : $S_1 = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{(n+1)-k}$

Dans S_1, on a $k : 1 \mapsto n+1$

Dans S_2, on a $k : 0 \mapsto n$

Le domaine commun de sommation est

$[\![1, n+1]\!] \cap [\![0, n]\!] = [\![1, n]\!]$

On écrit

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{(n+1)-k} + \underbrace{\binom{n}{n} a^{n+1}}_{A}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n+1)-k} + \underbrace{\binom{n}{0} b^{n+1}}_{B}$$

$$\text{Donc, } (a+b)^{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}_{\text{formule de Pascal}} \right) a^k b^{(n+1)-k} \right) + A + B$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1} a^{n+1}}_{A} + \underbrace{\binom{n+1}{0} b^{n+1}}_{B}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k}$$

donc $P(n+1)$

d'où l'hérédité

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

5) Forme explicite des coeffs binomiaux

Proposition : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$

$$\text{alors } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ex : on calcule

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

Réflexe : $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \dots \times (n-2)} = n(n-1)$

possède n facteurs

n − 2 facteurs

il reste 2 facteurs

Démonstration

Pour $n \geq 0$, on note $P(n)$: " $\forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ "

Initialisation : pour $n = 0$

Je dois mq $\forall k \in [\![0, 0]\!], (\dots)$

Pour $k = 0$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{0}{0} = 1 \qquad \forall \ell, \binom{\ell}{0} = 1$$

$$\text{et } \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

donc $P(0)$ est vraie

Hérédité :

Mq $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Mq $\forall k \in [\![0,n+1]\!],\ \binom{n+1}{k} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

Soit $k \in [\![0,n+1]\!]$

On distingue 3 cas :

. 1er cas : $k=0$

On a $\binom{n+1}{0} = 1$ et $\dfrac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} = 1$

. 2ème cas : $k = n+1$

On a :

$$\binom{n+1}{n+1} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!} = 1$$

. si $k \in [\![1,n]\!]$

On a : $\binom{n+1}{k} \overset{\text{Pascal}}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

$$\overset{P(n)}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!\,k}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!((n+1)-k)!}$$

dénominateur commun $k!(n-k+1)!$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(1+n)!}{k!\,((n+1)-k)!}$$

Ainsi $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $\binom{n+1}{k} = \dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$

Ie $P(n+1)$ est vraie

Rq :

1) Ici, la récurrence se fait ligne par ligne
2) à savoir refaire car ici $P(n)$ est une $\forall$-assertion
3) On préfèrera en sit. concrète écrire :

$$\binom{n}{k} = \frac{\text{produit de } k \text{ facteurs}}{k!}$$

$$= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots}^{k \text{ facteurs}}}{k!}$$

ex : $\binom{n}{3} =$ "3 facteurs"

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

C'est un polynôme de degré 3

exo : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, mq $\dfrac{\binom{n}{p}}{e^n} \to 0$

Démo de 3)

On a : $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{\overbrace{1 \times 2 \times \dots \times n}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{1 \times 2 \times \dots \times (n-k)}_{n \text{ facteurs}}}$

et ds cette fraction, tout se simplifie
Il reste : $n-(n-k)$ facteurs après simplification
Ie : il reste k facteurs

② Pr le voir → réflexe "petit n"

Ie on a

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{(n-0)(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}^{k \text{ facteurs}}}{k!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

6) Formule des capitaines d'équipe

Proposition :

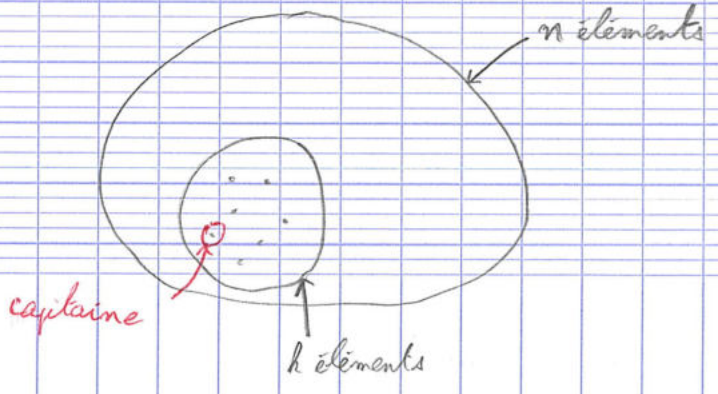
Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ tq $1 \leq k \leq n$
alors on a

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$$

Démo :

Soit E un ens. de n joueurs de rugby.
Une équipe est un ens. de k joueurs et d'un joueur parmi ces k joueurs appelé capitaine

Dessin



Comptons le nb d'équipes possibles de deux façons différentes

1°) . Tout d'abord, on choisit k joueurs : $\binom{n}{k}$ choix

. Puis, parmi ces k joueurs, on choisit le capitaine : k choix

donc, $\binom{n}{k} k$ choix

2°) . Tout d'abord, on choisit le capitaine : n choix

. Puis, le capitaine choisit ces $(k-1)$ co-équipiers parmi les $(n-1)$ autres joueurs : $\binom{n-1}{k-1}$ choix

donc, $n\binom{n-1}{k-1}$ choix

CCL : on a $\binom{n}{k} k = n\binom{n-1}{k-1}$

(?) Montrer cela avec le 5)

7) Formule d'absorption

Proposition : Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq k \leq n$ alors, on a

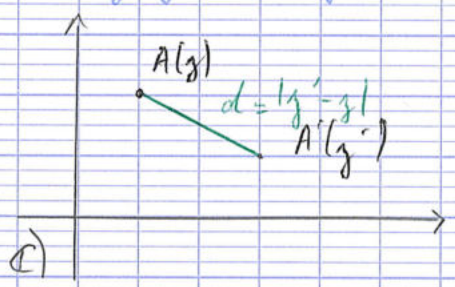
$$\frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

Démo : cno

III, Inégalités triangulaires

1) Rappels sur le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$
Soient A, A' les points du plan tq $\begin{cases} A(z) \\ A'(z') \end{cases}$
alors $|z-z'|$ est égal à la distance AA' entre A et A'

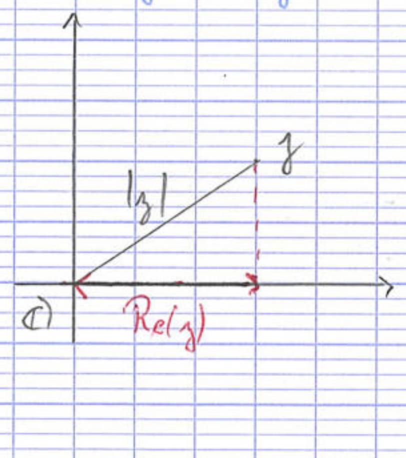


On notera $d(z,z') = d(A,A') := |z'-z|$

2) Un lemme

Lemme: Soit $z \in \mathbb{C}$, alors

1) $Re(z) \leq |z|$
2) $Re(z) = |z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}_+$



Démo :

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $z = a + ib$
$(\text{ie } a := Re(z) \text{ et } b := Im(z))$

On a $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
$|z| \geq \sqrt{a^2}$ car $b^2 \geq 0$ d'où $a^2+b^2 \geq a^2$ et $\sqrt{\cdot}$ croît sur $\mathbb{R}_+$
$|z| = |a| = |Re(z)|$

(!) Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq x$

$|z| \geq Re(z)$

2) Mq $Re(z) = |z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}_+$

Osq $Re(z) = |z|$

1°) Mq $b = 0$

On raisonne par l'absurde

Osq $b \neq 0$

On a alors $b^2 > 0$

donc $a^2 + b^2 > a^2$

donc $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt{a^2} = |a|$ car $\sqrt{\cdot} \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

Ie $|z| > |Re(z)|$

Or $|z| = Re(z)$ donc $Re(z) > |Re(z)|$ absurde

Donc $b = 0$ (ie $z \in \mathbb{R}$)

2°) donc $Re(z) = z$

Or $Re(z) = |z|$

donc $z \in \mathbb{R}_+$

Ainsi, $|z| = Re(z) \Rightarrow z \in \mathbb{R}_+$

3) Inégalité triangulaire

a) énoncé

Théorème : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \ |z+z'| \leq |z| + |z'|$

Démo : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

On a $|z|, |z'|, |z+z'| \in \mathbb{R}_+$

et $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ est $\nearrow\nearrow$

Donc : On a

$$|z+z'| \leq |z|+|z'| \quad (1)$$
$$\Updownarrow$$
$$|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2 \quad (2)$$

Ainsi, on va montrer 2, ce qui montrera que 1 est vrai

Calculons

Réflexe $\forall z \in \mathbb{C}, |z|^2 = z\bar{z}$

- $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'})$

$$= (z+z')(\bar{z}+\bar{z'})$$
$$= z\bar{z} + z\bar{z'} + z'\bar{z} + z'\bar{z'}$$
$$= |z|^2 + \underbrace{(z\bar{z'} + z'\bar{z})}_{\text{très symétrique}} + |z'|^2$$

Un terme est le conjugué de l'autre

ie $\overline{z\bar{z'}} = z'\bar{z}$

Réflexe rotation

On pose $t := z\bar{z}'$

On a $z\bar{z}' + \bar{z}z' = t + \bar{t}$

$= 2\,\mathrm{Re}(t)$

. De plus, on a

$$(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$$

Or, $|z||z'| = |z| \cdot |\bar{z}'|$

$= |z \cdot \bar{z}'|$

$= |t|$

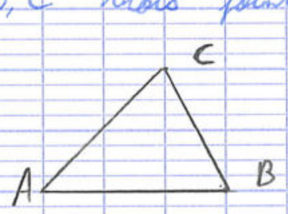
Or, $\mathrm{Re}(t) \leq |t|$ d'après le lemme

donc $|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2$

. Ainsi, on a $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ ■

b) Interprétation géométrique

Soient A, B, C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C



On a $AB = d(A,B)$

$= |z_B - z_A|$ on passe par le point C

Ie : on force z_C à apparaître

$= |z_B - z_C + z_C - z_A|$ méthode ajoute / retranche

$= |(z_B - z_C) + (z_C - z_A)|$

Réflexe inégalité triangulaire

$$AB = |(z_B - z_C) + (z_C - z_A)| \leq |z_B - z_C| + |z_C - z_A|$$

$$AB \leq d(C,B) + d(A,C)$$

$$AB \leq BC + AC$$

c) version négative

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

On a :

$$|z - z'| \leq |z| - |z'| \qquad \underline{\text{FAUX}}$$

⚠ à gauche : c'est ≥ 0

à droite : ça peut être < 0

ctre-ex : $z = 1$ et $z' = 2$

$$|1-2| \not\leq |1| - |2|$$

On a : $\underline{|z - z'| \leq |z| + |z'|}$

Démo : on écrit

$$|z - z'| = |z + (-z')| \leq |z| + |-z'| = |z| + |z'|$$

⚠ $|z - z'| \neq |z + z'|$ en général

ctre-exemple : $z = z' = 1$

$$|0| \neq |2|$$

4) Inégalité triangulaire généralisée !!

Proposition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Alors, on a :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

ie $|z_1 + \dots z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$

Démo : Par récurrence ∎

5) Inégalité triangulaire renversée !!

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors, on a :

$$|z| - |z'| \leq |z + z'| \quad (*)$$

Démo :

- Idée : on remet d'aplomb $(*)$ ie on écrit

$$|z| \leq |z + z'| + |z'|$$

On a enlevé le négatif

- On a deux choses

1) On sait que $\forall u, v \in \mathbb{C} \; |u+v| \leq |u| + |v|$

2) On veut que $\quad |z| \leq |z + z'| + |z'|$

On doit exprimer $|z|$ comme une somme

On a : $z = (z+z') - z'$

Donc, par inég. Δ, on a :

$$|z| \leq |z+z'| + |z'|$$

ie $|z|-|z'| \leq |z+z'|$

Corollaire

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big|\, |z| - |z'| \,\big| \leq |z+z'|$$

valeurs absolues

modules

Démo :

On a $|z|-|z'| \overset{①}{\leq} |z+z'|$ d'après $(*)$

De même, en échangeant z et z', on a $|z'|-|z| \overset{②}{\leq} |z+z'|$

Mq $\big||z|-|z'|\big| \leq |z+z'|$

On distingue deux cas

1er cas : $|z|-|z'| \geq 0$

On a $\big||z|-|z'|\big| = |z|-|z'| \overset{1)}{\leq} |z+z'|$

2ème cas : $|z|-|z'|<0$

On a $\big||z|-|z'|\big| = |z'|-|z| \overset{2)}{\leq} |z+z'|$

Dans tous les cas, c'est vrai ∎

Rq : On a

$$\big||z|-|z'|\big| \leq |z-z'| \quad (**)$$

(?) Interprétation géom. de $(**)$

6) Inégalité triangulaire bilatérale

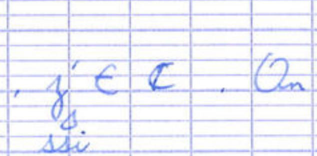
Prop. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a :

$$\boxed{\big||z|-|z'|\big| \leq |z+z'| \leq |z|+|z'|}$$

7) Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Dessin :

a)



on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

b)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont positivement colinéaires

Déf :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On dit que z et z' sont positivement colinéaires ssi

$$\left(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : z = \alpha z' \text{ ou } \exists \beta \in \mathbb{R}_+ : z' = \beta z\right)$$

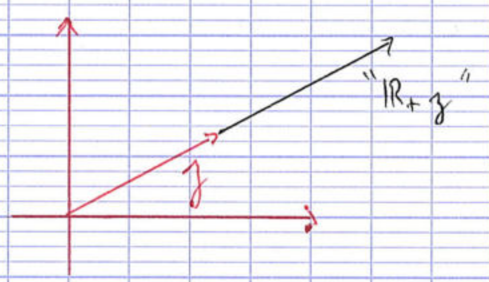
Rq : si on avait dit que z, z' sont positivement colinéaires ssi
$$\exists \alpha \geq 0 : z = \alpha z'$$
alors on aurait eu :

1) $\forall z \in \mathbb{C}$, 0 et z sont positivement colinéaires

2) le seul $z \in \mathbb{C}$ tq z et 0 sont $\oplus^t$ colinéaires est $z=0$

d'où la symétrisation dans la déf.

Rq : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ positivement colinéaires
Si on sait que $z' \neq 0$, on peut le prendre comme support



alors on peut dire $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : z = \alpha z'$

Prop :
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ alors
$$|z+z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z \text{ et } z' \text{ sont positivement colinéaires}$$

On dit qu'on est ds le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Rq : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, on dit que
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ st colinéaires et on note $\vec{u} \,/\!/\, \vec{v}$ (p le cours) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \vec{u} = \alpha \vec{v} \quad \text{ou} \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \vec{v} = \beta \vec{u}$$
On parle aussi de complexes colinéaires
ex $(1+i)$ et $(8+8i)$ sont $\mathbb{R}$-colinéaires

Démo :

On mq $\Leftarrow$

. Osq $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : z = \alpha z'$

Fixons un tel $\alpha \geq 0$

On a :

$1+\alpha \geq 0$ car $\alpha \geq 0$

$$|z+z'| = |\alpha z' + z'| = |(1+\alpha) z'|$$

$$|z+z'| = |1+\alpha| |z'|$$

$$\text{et } |z| + |z'| = |\alpha z'| + |z'|$$
$$= \alpha |z'| + |z'| = (1+\alpha)|z'|$$

$\alpha \geq 0$

. l'autre cas ($\exists \beta \in \mathbb{R}_+ : z' = \beta z$) se traite de $\hat{m}$

On mq $\Rightarrow$ On pose $t := z\overline{z'}$

On a $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(t) + |z'|^2 \quad (1)$

$$(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|t| + |z'|^2 \quad (2)$$

voir démo du 3)

Osq $|z+z'| = |z| + |z'|$

On a donc $(1) = (2)$ donc $\mathrm{Re}(t) = |t|$

d'après le lemme 2.2), on a $t \in \mathbb{R}_+$

On distingue plusieurs cas :

. 1er cas : $z = 0$: ok

. 2ème cas : $z' = 0$: ok

} z, z' sont ≥ 0 colinéaires $\oplus$ t

. 3^e cas : $z, z' \neq 0$

On écrit :

$$z = z\overline{z'} \times \frac{1}{\overline{z'}}$$

on force t à apparaître → naturel

$\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$

$$z = z\overline{z'} \times \frac{1}{\overline{z'}} \times \frac{1}{z'} \times z'$$

on veut $z = \underset{(\geq 0)}{\text{qqch}} \times z'$

→ naturel ; on force à apparaître le $z \times z'$

Ainsi, $z = \overset{\geq 0}{\frac{t}{|z'|^2}} \times z'$

et z et z' sont positivement colinéaires ∎

Généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots z_n \in \mathbb{C}$ tq

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

alors $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, z_i et z_j sont positivement colinéaires

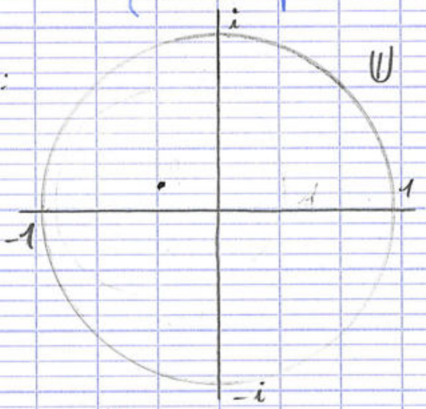
IV, Le cercle unité $\mathbb{U}$

1) Définition

On appelle cercle unité ou groupe des complexes de module 1 et on note $\mathbb{U}$ l'ens. défini par

$$\mathbb{U} := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$$

Dessin :



2) Propriétés !!!

Prop : Soient $z, z' \in \mathbb{U}$. Alors :

1) $z z' \in \mathbb{U}$ ($\mathbb{U}$ est stable par produit)

2) $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$ ($\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse)

Démo : On a $|z| = |z'| = 1$

1) Donc $|z z'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$

2) Et $\left| \dfrac{1}{z} \right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$ ∎

3) Expression de l'inverse dans $\mathbb{U}$

Prop : Soit $z \in \mathbb{U}$. alors, on a :

$$\frac{1}{z} = \bar{z}$$

Démo : On calcule :

on force à apparaître $\bar{z}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\underbrace{z\bar{z}}_{=|z|^2=1}} \times \bar{z} = \bar{z}$$

Rq : en fait, il s'agit d'une caractérisation

ie $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left(\frac{1}{z} = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}\right)$

4) $e^{i\theta}$

a) définition

Notation : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nb complexe défini par :

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i \sin\theta$$

b) Formules d'Euler !!!

Prop : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

démo : en exo

c) Propriétés

Prop : Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

1) $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$

2) $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

3) $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$

4) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

6) $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Démo :

1) On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

2) On calcule $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta)$

De plus, on sait que :

$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$

$\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta$

Ainsi, on a bien :

$e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$

$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$

3) Rappel : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Donc, $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$

$= \overline{(\cos\theta + i \sin\theta)}$

$= \cos\theta - i \sin\theta$

$= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

4) Comme $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, on a $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

5) 2) + récurrence

6) 5) appliqué à $(-\theta)$

d) Formules de Moivre

Le 5) se réécrit :

Prop : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{(\cos\theta \pm i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) \pm i \sin(n\theta)}$$

5) "Noyau" de $\theta \longmapsto e^{i\theta}$

a) Congruences modulo λ

Déf : Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$

On dit que a et b sont congrus modulo λ ssi

$\exists k \in \mathbb{Z} : b - a = k\lambda$

On note alors $a \equiv b \ (\lambda)$

Rq : Dans la suite du cours, on s'autorisera parfois à écrire de façon plus synthétique mais moins rigoureuse certains énoncés.
↳ exo : écrire les versions rigoureuses

Proposition

a) $\left.\begin{array}{l} a \equiv b \ (\lambda) \\ \alpha \equiv \beta \ (\lambda) \end{array}\right\} \Leftrightarrow a + \alpha \equiv b + \beta \ (\lambda)$

b) Soit $T \in \mathbb{C}^*$ alors

$$a \equiv b \ (\lambda) \Rightarrow \frac{a}{T} \equiv \frac{b}{T} \ \left(\frac{\lambda}{T}\right)$$

⚠ à cette erreur :
"Démo : Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$
Soient $k, k' \in \mathbb{Z}$ tq — on a montré $\forall k, k' \in \mathbb{Z}$.
On a $\begin{cases} a = b + k\lambda \\ \alpha = \beta + k'\lambda \end{cases}$
donc $(a + \lambda) = (b + \beta) + (k + k')\lambda \ (\ldots)$"

Démo : Soient $a, \alpha, b, \beta \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$

1) Osq $a \equiv b \ (\lambda)$ et $\alpha \equiv \beta (\lambda)$
💡 Quand on sait qu'une $\exists$ assertion est vraie (⚠ différent de la démonstration de cette assertion), alors on pourra écrire "soit donc"
Bilan : Si on sait que $\exists x_0 \in E, P(x_0)$ est vraie. Pour utiliser cette $\exists$ assertion on écrira "soit donc $x_0 \in E$ tq"

Si on veut montrer une $\exists$-assertion, on écrira :
"Posons $x_0 := (\ldots)$. on a $x_0 \in E$. Vérifions que $P(x_0)$ est vraie

Soit donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\lambda$
et $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \beta + k'\lambda$

On a : $(a+\alpha) = (b+\beta) + (k+k')\lambda$
Ainsi, on a bien $\exists \ell \in \mathbb{Z} : (a+\alpha) = (b+\beta) + \ell\lambda$
ie on a $a + \alpha \equiv b + \beta \ (\lambda)$ ∎

2) Mq $\forall T \in \mathbb{C}^*$, $a \equiv b (\lambda) \Rightarrow \frac{a}{T} \equiv \frac{b}{T} \left(\frac{\lambda}{T}\right)$

Soit $T \in \mathbb{C}^*$ tel que $a \equiv b \ (\lambda)$
Mq $\frac{a}{T} \equiv \frac{b}{T} \left(\frac{\lambda}{T}\right)$

Soit donc $k \in \mathbb{Z}$ tq $a = b + k\lambda$
On a donc $\frac{a}{T} = \frac{b}{T} + k\frac{\lambda}{T}$

ie $\frac{a}{T} \equiv \frac{b}{T} \left(\frac{\lambda}{T}\right)$ ∎

Exo : a - b - on

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv \alpha \ (\lambda) \\ b \equiv \beta \ (\lambda) \end{array}\right\} ab \equiv \alpha\beta \ (\lambda) \ ?$$

non, cherchez un contre exemple

b) noyau de $\theta \mapsto e^{i\theta}$

le noyau de $\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{U} \\ \theta &\mapsto e^{i\theta} \end{aligned}$ est, par définition :

$$\left\{ \theta \in \mathbb{R} \,\middle|\, e^{i\theta} = 1 \right\}$$

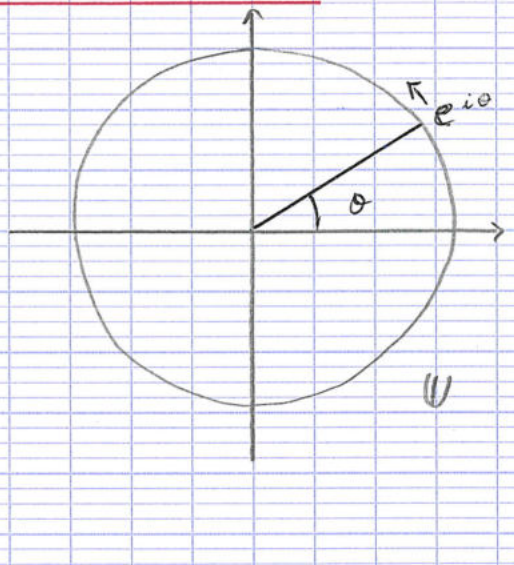
Proposition Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 \ [2\pi]$

Démo

Cela résulte de la déf de cos et sin (qui interviennent dans la déf de $e^{i\theta}$). On résoud le système :

$$\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

c) Dessin de $e^{i\theta}$



Quand θ parcourt $\mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ tourne autour de $\mathbb{U}$

6) Forme exponentielle d'un nb complexe

Théorème :

$$\boxed{\mathbb{U} = \left\{ e^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}}$$

donc Réflexe : si $w \in \mathbb{U}$ alors Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tq $w = e^{i\theta}$

ie si $|w| = 1$

Réflexe : soit $\theta \in \mathbb{R}$ tq $w = e^{i\theta}$

Démo : (HP)

On procède par double - inclusion :

$\supset$: ok car $\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1$

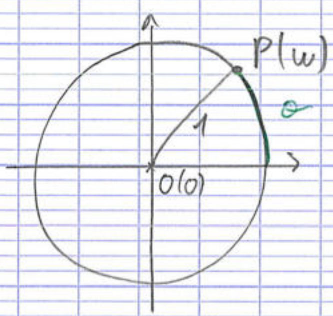
$\subset$: Soit $w \in \mathbb{U}$

Soit P le point du plan d'affixe w.

On a $P \in \mathcal{C}_{trigo}$

car $d(O,P) = d(0,w) = |w - 0| = 1$

Soit maintenant θ une mesure angulaire de P



Par déf de cos et sin, on a $P\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$

donc $w = \cos\theta + i\sin\theta$

$w = e^{i\theta}$ •

Théorème - définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

a) alors : $\exists\, r > 0,\ \exists\, \theta \in \mathbb{R} :\ z = r e^{i\theta}$

Cette écriture s'appelle une forme exponentielle de z.
On dit que θ est un argument de z

b) Unicité

Soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tq $z = r e^{i\theta}$
alors

- $r = |z|$, donc r est unique
- si on impose $\theta \in]-\pi, \pi]$ alors θ est unique
- on appelle alors θ l'argument principal de z. on le note $\arg(z)$

Démo :

a) On a Réflexe $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$!!

$\left(\text{en effet } \left| \dfrac{z}{|z|} \right| = \dfrac{|z|}{|z|} = 1 \right)$

Soit donc $\theta \in \mathbb{R}$ tq $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$

On a $z = |z| e^{i\theta}$, d'où l'existence ■

b) exo

Propositions

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$, on a :

1) $\arg(z z') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ (2\pi)$

2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad (2\pi)$

3) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad (2\pi)$

4) $\forall n \in \mathbb{Z}, \ \arg(z^n) \equiv n \arg(z) \ (2\pi)$

5) $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \quad (2\pi)$

6) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \ (2\pi)$

7) $\forall \lambda > 0, \ \arg(\lambda z) \equiv \arg(z) \ (2\pi)$

8) $\forall \lambda < 0, \ \arg(\lambda z) \equiv \arg(z) + \pi \ (2\pi)$

9) dans tous les cas :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \ \arg(\lambda z) \equiv \arg(z) \quad (\pi)$$

V. Exponentielle complexe

1) Définition

On a $\exp \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

but : obtenir une fct. $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to ?$

Théorème - définition

Il existe une unique fonction notée $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ telle que

1) $\exp_{\mathbb{C}}$ et $\exp$ coïncident sur $\mathbb{R}$
ie $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp_{\mathbb{C}}(t) = \exp(t) = e^t$

2) $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp_{\mathbb{C}}(z+z') = \exp_{\mathbb{C}}(z)\exp_{\mathbb{C}}(z')$

C'est l'exponentielle complexe.

Rq ! On notera aussi $\exp \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ au lieu de $\exp_{\mathbb{C}}$

Calcul explicite de $\exp_{\mathbb{C}}$!!!

Soit $z \in \mathbb{C}$ qu'on écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\begin{aligned}
\exp_{\mathbb{C}}(z) &= \exp_{\mathbb{C}}(a+ib) \\
&= \exp_{\mathbb{C}}(a)\exp_{\mathbb{C}}(ib) \\
&\overset{2)}{=} e^a \times \exp_{\mathbb{C}}(ib) \\
&\overset{1)}{=} e^a \times e^{ib} \\
&\overset{\text{déf de } e^{i\theta}}{=} e^a(\cos(b) + i\sin(b))
\end{aligned}$$

Idée : $\exp_{\mathbb{C}}(ib) = e^{ib}$

Formellement

On pose, si $z \in \mathbb{C}$

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) := e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z)))$$

On vérifie que 1) et 2) sont ok. Cela prouve l'existence

Exemple :

$$\exp_{\mathbb{C}}(2-3i) = e^2(\cos(3) - i\sin(3))$$

Démo :

Existence : cf ci-dessus

Unicité : admise.

2) Propriétés

Théorème

1) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z' \in \mathbb{C} : z = e^{z'} = \exp(z')$

On dit que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective

2) Soit $z, z' \in \mathbb{C}$

On a $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z \equiv z' \ (2i\pi)$

Rq : On a

$\exp_{\mathbb{C}}(2i\pi) = \exp_{\mathbb{C}}(0) = 1$

$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) \neq 0$

Démo

1) Surjectivité de $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

On écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t = \exp(\ln(t))$

Donc, on a $z = e^{\ln r} e^{i\theta}$

$= e^{(\ln r + i\theta)}$

$= \exp_{\mathbb{C}}(\ln r + i\theta)$

en posant $z' := \ln(r) + i\theta$

on a $z' \in \mathbb{C}$ et $\exp_{\mathbb{C}}(z') = z$

2) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tq $\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(z')$

Réflexe : soit $z = a + ib$ / soit $z = re^{i\theta}$

On écrit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

On a $\exp_{\mathbb{C}}(z) = e^a e^{ib}$

donc $|\exp_{\mathbb{C}}(z)| = |e^a| \, |e^{ib}|^{=1} = e^a$

comme $\exp(z) = \exp(z')$

on a $e^a = e^{a'}$

En passant au $\ln(.)$, on obtient $a = a'$ $(*)$

On réinjecte $(*)$ dans $\exp(z) = \exp(z')$

ie $\underline{e}^a e^{ib} = \underline{e}^{a'} e^{ib'}$

donc, $e^{ib} = e^{ib'}$ donc $b \equiv b' \; [2\pi]$

Soit donc $k \in \mathbb{Z}$ tq $b = b' + 2k\pi$ $(**)$

On a $z = a + ib = a' + ib$

car $a = a'$

$= a' + i(b' + 2k\pi)$

on force à apparaître b' à l'aide de $(**)$

$z = a' + ib' + 2ik\pi$
$z = z' + 2ik\pi$
Donc, $z \equiv z' \ (2i\pi)$

Réciproquement : en exo

Complément

Par définition, $\binom{42}{3}$ est le nb de trinômes possibles en PCSI3

Rq : On dit que $2i\pi\mathbb{Z}$ est le noyau de l'$\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$
En effet, $\forall k \in \mathbb{Z}, \exp_{\mathbb{C}}(2i\pi k) = 1$

VI. Racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé $\neq 0$

1) Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$
On dit que z est une racine n-ième de l'unité
ssi $z^n = 1$
On note U_n l'ens. des racines n-ièmes de l'unité
Ie

$$U_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^n = 1 \right\}$$

Exemple

. U_3 : qui est U_3 ?
Soit $z \in U_3$, on a $z^3 = 1$
On a $z \neq 0$ car $0^3 \neq 1$
On écrit donc $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

On a $r^3 e^{3i\theta} = 1$ (*)

⚠ le logarithme n'existe pas dans $\mathbb{C}$

On a $e^{3i\theta} = \frac{1}{r^3}$

donc $\ln(e^{3i\theta}) = \ln\left(\frac{1}{r^3}\right)$

impossible car $e^{3i\theta} \notin \mathbb{R}_+^*$

$\ln(e^{3i\theta}) = -3\ln(r)$

On passe au module dans (*) Réflexe

d'où $|r^3| = 1$ ie $|r|^3 = 1$

Comme $|r| \geq 0$, on a $|r| = 1$ ie $r = 1$ (car $r \geq 0$)

Donc, on a $e^{3i\theta} = 1$

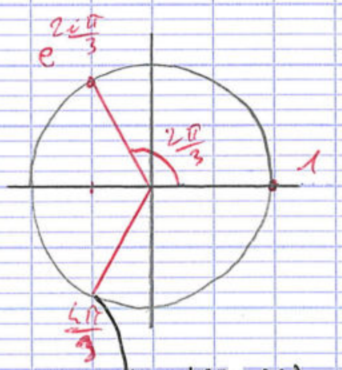
Réflexe : le noyau de $e^{i\theta}$

ie $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 \ (2\pi)$

donc $3\theta \equiv 0 \ (2\pi)$

donc $\theta \equiv (0) \left(\frac{\pi}{3}\right)$

Dessin :



$e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ ie $e^{\frac{4i\pi}{3}}$

Notons $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$

On a $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

On a $j \in \mathbb{U}$ $(\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \mathbb{U})$

donc $\bar{j} = \frac{1}{j}$ (Réflexe de déf)

Astuce : On a $j^3 = e^{\frac{6i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$

ie $j^3 = 1$

Ainsi $\bar{j} = \frac{1}{j} = \frac{j^3}{j} = j^2$

Ainsi, on a $\bar{j} = \frac{1}{j} = j^2$ (tout ça est uniquement déduit de $j^3 = 1$)

Rq : Calculons $1 + j + j^2$ (à savoir refaire)

c'est 0

Plusieurs démos

1) On a $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

ie $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

et $j^2 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

mieux $j^2 = \bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

donc $j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

d'où $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

2) $j + j^2 = j + \bar{j}$

$= 2 \operatorname{Re}(j)$

$= 2 \operatorname{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$

$= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= -1$

3) On a

$$1+j+j^2 = j+j^2+j^3$$
$$= j(1+j+j^2)$$

méthode rotation :

Notons $S := 1+j+j^2$

donc on a : $S = jS$

Ie $S - jS = 0$

ie $S(1-j) = 0$

donc $S = 0$ car $j \neq 1$

4) On a d'après (SG) => suite géométrique et car $j \neq 1$

$$1+j+j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$$

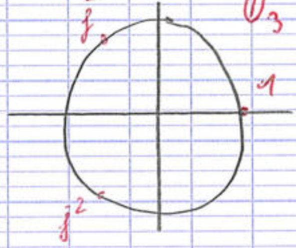
Bilan

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z^3 = 1$

On écrit $z = re^{i\theta}$ On a $r = 1$ et $\theta \equiv 0 \left(\frac{2\pi}{3}\right)$

donc $\theta \equiv 0 \ (2\pi)$ ou $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \ (2\pi)$ ou $\theta \equiv -\frac{2\pi}{3} \ (2\pi)$

CCL



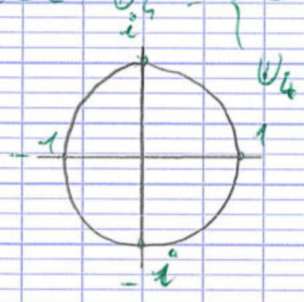
Exemple : $\mathbb{U}_4$

Soit $z \in \mathbb{C}$

On, on a les équivalences successives suivantes

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (z^2)^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z^2 - i^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z-1=0 \text{ ou } z+1=0 \text{ ou } z-i=0 \text{ ou } z+i=0$$
$$\Leftrightarrow z=1 \text{ ou } z=-1 \text{ ou } z=i \text{ ou } z=-i$$
$$\Leftrightarrow z \in \{1, i, -i, -1\}$$

CCL : $\mathbb{U}_4 = \{\pm 1 ; \pm i\}$



2) Propriétés

Proposition :

1) $\omega \in \mathbb{U}_n \Rightarrow |\omega| = 1$

1') $\omega \in \mathbb{U}_n \Rightarrow \omega \in \mathbb{U}$

1'') $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

2) $\omega, \omega' \in \mathbb{U}_n \Rightarrow \omega\omega' \in \mathbb{U}_n$

3) $\omega \in \mathbb{U}_n \Rightarrow \frac{1}{\omega} \in \mathbb{U}_n$

Démo :

1) Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$.

Mq $|\omega| = 1$

On raisonne par l'absurde

Osq $|\omega| \neq 1$

On distingue deux cas

. 1er cas : $|\omega| > 1$ (*)

alors en multipliant (*) par elle-m̂ n fois, on obtient :

$|\omega|^n > 1^n$

$\omega \in \mathbb{U}_n \rightarrow$ " $|\omega^n|$ $= 1$

donc $1 > 1$: absurde

. 2ᵉ cas : $|\omega| < 1$

De m̂, c'est absurde

CCL : $|\omega| = 1$

1') 1'') ok

2) 3) Soient $\omega, \omega' \in \mathbb{U}_n$

On a $(\omega\omega')^n = \omega^n \omega'^n = 1 \times 1 = 1$

et $\left(\frac{1}{\omega}\right)^n = \frac{1}{\omega^n} = \frac{1}{1} = 1$

3) Description explicite de $\mathbb{U}_n$

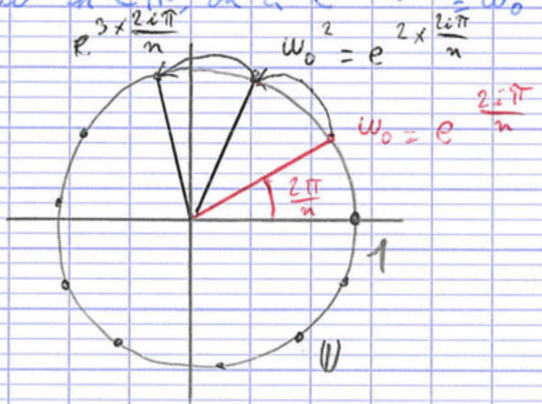
Proposition

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![1, n]\!] \right\}$$

Dessin :

On note $\omega_0 := e^{\frac{2i\pi}{n}}$ (c'est le nb complexe de module 1 et d'arg $\frac{2\pi}{n}$)

Si $k \in \mathbb{N}$ on a $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega_0^k$ (nb $\mathbb{C}$ d'arg $k \times \frac{2\pi}{n}$)



démo : On note $E := \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![1, n]\!] \right\}$

- $E \subset \mathbb{U}_n$: Soit $k \in [\![1, n]\!]$
  On a $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = e^{2ik\pi} = \left(e^{2i\pi}\right)^k = 1$

- $\mathbb{U}_n \subset E$: Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On a $|\omega| = 1$
  On écrit $\omega = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi]$

On a $\omega^n = e^{in\theta} = 1$

Or, on sait que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{it} = 1 \Leftrightarrow t \equiv 0\ (2\pi)$

donc $n\theta \equiv 0\ (2\pi)$

Soit donc $k \in \mathbb{Z}$ tq $n\theta = 2k\pi$

Ie $\theta = \frac{2k\pi}{n}$

Or $0 < \theta \leq 2\pi$ donc $0 < \frac{2k\pi}{n} \leq 2\pi$

donc $0 < k \leq n$ ie $1 \leq k \leq n$

Ainsi, $w = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $k \in [\![1, n]\!]$

Ie $w \in E$ ■

Rq : On a également :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

et $a, b \in \mathbb{Z}$ et $\operatorname{card} [\![a, b]\!] = n$

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![a, b]\!] \right\}$$

. Si n est impair (notation : $n \equiv 1 (2)$ ou $n \in 2\mathbb{Z}+1$)

On écrit $n = 2p+1$

On considère $[\![-p, p]\!]$ (cet ensemble a $2p+1$ éléments)

$$\mathbb{U}_{2p+1} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; -p \leq k \leq p \right\}$$

Corollaire : Il y a n racines de l'unité

ie : $\operatorname{card} \mathbb{U}_n = n$

Démo : On a $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; 1 \leq k \leq n \right\}$

Il s'agit de mq $\forall k, l \in [\![1, n]\!]$, $k \neq l \Rightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq e^{\frac{2il\pi}{n}}$

Par contraposition,
Mq $\forall k, l \in [\![1, n]\!]$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2il\pi}{n}} \Rightarrow k = l$

Soient $k, l \in [\![1, n]\!]$ tq $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2il\pi}{n}}$

Quitte à échanger k et l, osq $\underline{k \geq l}$ $(*)$

On a $\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2l\pi}{n}$ (2π)
donc, $k \equiv l$ (n)
Soit donc $\alpha \in \mathbb{Z}$ tq $k - l = \alpha n$
On a $0 \leq k - l$ d'après $(*)$
donc $k - l \leq n - 1$
car $k \leq n$ et $l \geq 1$
Je $0 \leq \alpha n \leq n - 1$
donc $0 \leq \alpha \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

et $\alpha \in \mathbb{Z}$ donc $\alpha = 0$
donc $k = l$

Rq : $a, b \in \mathbb{C}$ et $\lambda, t \in \mathbb{C}^*$
$$a \equiv b\,(\lambda) \Rightarrow at \equiv bt\,(\lambda t)$$
contre-ex :
$$0 \equiv 1\,(1) \quad \times T = \frac{1}{2}$$
$$0 \equiv \frac{1}{2}\,(1)\ ? \text{ Faux}$$

4) Somme des racines n-ièmes

<u>Proposition:</u> si $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0

$$\text{ie } \sum_{w \in \mathbb{U}_n} w = 0$$

Rq : • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \in \mathbb{U}_n$

• $(-1) \in \mathbb{U}_n \iff n$ est pair

• $\mathbb{U}_1 = \{1\}$

<u>Démo:</u>

On a : $\displaystyle\sum_{w \in \mathbb{U}_n} w = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k$

$$= \frac{\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = \frac{1-1}{e^{\frac{2i\pi}{n}}-1} = 0$$

SG car $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$

suite géom

exo : Calculer $\displaystyle\prod_{w \in \mathbb{U}_n} w$

VII. Equations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Rq : on sait résoudre $z^n = 1$

Ie : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^n = 1 \iff z \in \mathbb{U}_n \iff \exists k \in [\![1, n]\!] : z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

1) $z^2 = a$

<u>Prop:</u> Soit $a \in \mathbb{C}^*$

alors l'éq. $z^2 = a$ admet deux sol. distinctes opposées l'une à l'autre.

Démo :

a) Mq il y a une solution

On écrit $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

On pose $z_0 := \sqrt{r}\, e^{\frac{i\theta}{2}}$

On a $z_0^2 = re^{i\theta} = a$ donc z_0 est solution.

b) On utilise z_0 comme pivot

Si $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff z^2 = z_0^2 \\ &\iff z^2 - z_0^2 = 0 \\ &\iff (z - z_0)(z + z_0) = 0 \\ &\iff z = z_0 \text{ ou } z = -z_0 \end{aligned}$$

On a $z_0 \neq -z_0$ car $a \neq 0$ ∎

2) $\mathbb{C}$-Racines carrées

Déf : Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $\delta \in \mathbb{C}$

On dit que δ est une $\mathbb{C}$-racine carrée de a

ssi $\delta^2 = a$

Exemple : i est une $\mathbb{C}$-racine carrée de -1

- ⚠ interdiction d'utiliser le signe "$\sqrt{\ }$"

Fait : $a \in \mathbb{C}$

1) δ est $\mathbb{C}$-racine carrée de a $\Rightarrow$ $-\delta$ est $\mathbb{C}$-rac. carrée de a
2) si $a \neq 0$: a possède exactement deux $\mathbb{C}$-rac. carrées

3) Recherche pratique de $\mathbb{C}$-racines carrées

Compétence pratique

On fait un exemple
On cherche une $\mathbb{C}$-racine carrée de $1+2i$
Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tq $\delta^2 = 1+2i$
On écrit $\delta = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) On a $\delta^2 = \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2 = 1+2i$
d'où, par identification :
$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 1 & (1) \\ 2\alpha\beta = 2 & (*) \end{cases}$$

2) Geste astucieux : on regarde le module

On a $|\delta^2| = |1+2i|$
ie $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$ $\quad (2)$

$(1)+(2)$ donne $2\alpha^2 = 1+\sqrt{5}$
ie $\alpha^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ie $\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$(2)-(1)$ donne $2\beta^2 = \sqrt{5}-1$

ie $\beta^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ie $\beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

3) Ainsi, on a 4 couples solutions possibles :
$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$, $(+,-)$, $(-,+)$, $(-,-)$

Il y a 2 couples de trop.

4) astuce : (*) nous dit que $\alpha \times \beta = 1$
donc α et β sont de $\hat{m}$ signe

CCL : $\delta = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

ou $\delta = -\left(\ldots\right)$

? $\mathbb{C}$-racines carrées de $z = 2-5i$

4) $z^n = a$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$
On note $z^n = a$ (*) pour $z \in \mathbb{C}$

a) Méthode du pivot

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une sol. (particulière) de (*)
Soit $z \in \mathbb{C}$ alors, on a :

car $z_0^n = a$

$$z^n = a \iff z^n = z_0^n$$
$$\iff \frac{z^n}{z_0^n} = 1$$
$$\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$$
$$\iff \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$$
$$\iff \exists k \in [\![1,n]\!] : \frac{z}{z_0} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$
$$\iff \exists k \in [\![1,n]\!] : z = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

CCL : l'ens. des sol. de (*) est :

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \cdot z_0 \;\middle|\; k \in [\![1,n]\!] \right\}$$

ou $\left\{ z_0 \, w \;\middle|\; w \in \mathbb{U}_n \right\}$

b) Recherche d'une sol° particulière

On écrit $a = r e^{i\theta_0}$

On prend $z_0 := \sqrt{r}\, e^{\frac{i\theta_0}{n}}$

Résoudre $z^n = -1$

5) $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$

Exemple : $z^2 + (1+i)z = 8 - 5i$

Théorème : Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$

On note $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$

Soit $\delta \in \mathbb{C}$ une $\mathbb{C}$-rac. carrée de Δ

alors les solutions de l'éq. $az^2 + bz + c = 0$

sont : $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$

Démo : m̂ démo que pour $\mathbb{R}$

(mise sous forme canonique)

ie $az^2 + bz + c = 0 \iff z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0$

$\iff \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

Exemples

1) Résoudre : $z^2 + iz = 1$

2) $z^2 + z = i$

6) Relations coefficients racines

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ les solutions de l'éq. $az^2 + bz + c = 0$

alors on a l'égalité de polynômes (on peut écrire X sans l'introduire, c'est l'indéterminée, "~~soit X~~")

$$aX^2 + bX + c = a(X-\alpha)(X-\beta)$$

ie $$X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$$

donc, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

application :

Soient $\alpha\beta \in \mathbb{C}$ et $S, P \in \mathbb{C}$

Osq $\begin{cases} \alpha + \beta = S \\ \alpha\beta = P \end{cases}$

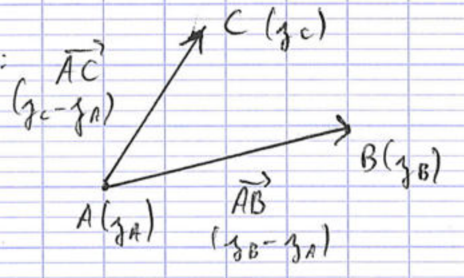
alors α et β sont les sol de l'éq : $z^2 - Sz + P = 0$

VIII, Complexes et géométrie

Soient A, B, C des points du plan d'affixe respectives z_A, z_B, z_C

Osq $A \neq B$ ie $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ ie $z_A \neq z_B$

dessin :



1) Colinéarité / alignement

On a A, B et C st alignés $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ st colinéaires

$\iff \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$

car $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$
dc on le prend
ĉ "support"

$(\ldots) \iff \exists t \in \mathbb{R} : z_C - z_A = t.(z_B - z_A)$

$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

2) Orthogonalité

On a : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \iff z \in i\mathbb{R}_+^*$

$\iff \exists b \in \mathbb{R}_+^* : z = ib$

et, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \iff z \in i\mathbb{R}_-^*$

Ainsi, on a :

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \iff (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ ou $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

osq $C \neq A$

$$\iff \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$

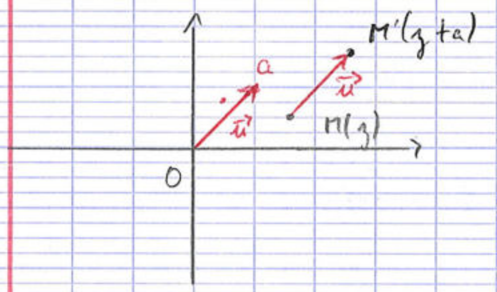
ie $\vec{AB} \perp \vec{AC} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ imaginaire pur

3) Exemples de transformations du plan

Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit M le point du plan d'affixe z

a) $z \longmapsto z + a \quad (a \in \mathbb{C})$



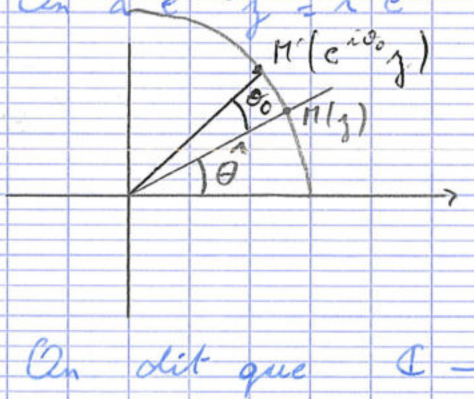
soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe a

CCL : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \longmapsto z+a \end{array}$ est appellée la translation par a

b) $z \longmapsto e^{i\theta_0} z \quad (\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé$)$

On écrit $z = re^{i\theta}$ $(r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R})$

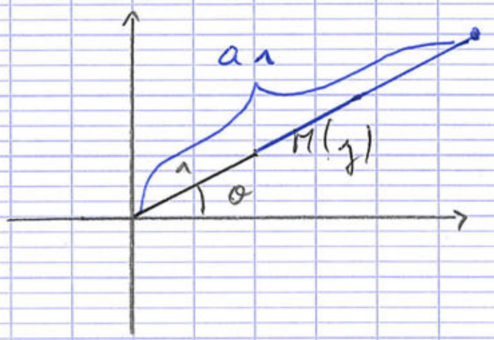
On a $e^{i\theta_0} z = r e^{i(\theta + \theta_0)}$



On dit que $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \longmapsto e^{i\theta_0} z \end{array}$

est la rotation de centre O et d'angle θ_0.

c) $z \mapsto az$ $(a \in \mathbb{R}^*)$



Si $a < 0$, il y a retournement

On dit $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az$ est l'homothétie de rapport a

d) $z \mapsto az$ $(a \in \mathbb{C}^*)$

On écrit $a = r_0 e^{i\theta_0}$

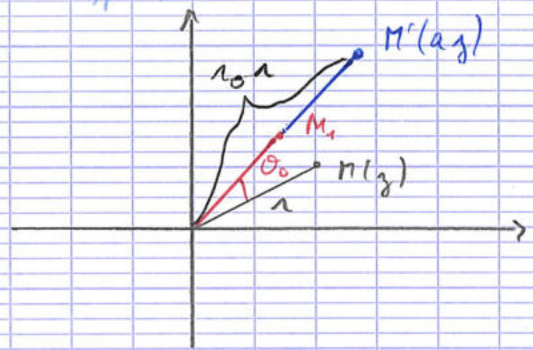
On a $az = r_0 e^{i\theta_0} z$

$= r_0 \times (e^{i\theta_0} z)$

Ainsi,

1) on applique à M la rotation d'angle θ_0 et de centre O. On obtient M_1.

2) on applique à M_1 l'homothétie de rapport $r_0 > 0$



(?) Mq $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto az + b$ avec $a \neq 1$

est une rotation (angle? centre?)

+ homothétie