Chapitre 4

Trigonométrie

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

La valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$, découverte par Gauss (à l'âge de 19 ans)

La trigonométrie (du grec trígonos, *« triangulaire », et* métron, *« mesure ») est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles et des fonctions telles que sinus, cosinus et tangente.*

Ces fonctions possèdent de très nombreuses propriétés qui font d'elles des outils indispensables pour étudier certains problèmes de géométrie mais aussi dans d'autres branches des mathématiques.

Un peu d'histoire
Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l'Indus, il y a plus de 4 000 ans. La première utilisation du sinus apparaît dans les Śulba-Sūtras en Inde, entre -800 *et* -500*, où le sinus de* $\frac{\pi}{4}$ *est correctement calculé comme* $\frac{1}{\sqrt{2}}$*, dans un problème de construction d'un cercle de même aire qu'un carré donné.*

PCSI 3
2019/2020

Lycée SAINTE-GENEVIÈVE
26 septembre 2019

Trigonométrie

Compétences attendues

1 Techniques utilisant les nombres complexes

1.1 Linéarisation

$$\begin{aligned} \cos^3(t) &= \cdots \\ \sin^4(t) &= \cdots \\ \cos^2(x)\sin^2(x) &= \cdots \end{aligned}$$

etc.

1.2 Démultiplication

$$\begin{aligned} \cos(a)\sin(b) &= \frac{\sin(a+b)+\sin(b-a)}{2} \\ \cos(a)\cos(b) &= \cdots \\ \sin(a)\sin(b) &= \cdots \end{aligned}$$

1.3 Technique de l'angle-moitié

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{i\theta'} &= \cdots \\ e^{i\theta}-e^{i\theta'} &= \cdots \\ 1+e^{i\theta} &= \cdots \\ 1-e^{i\theta} &= \cdots \end{aligned}$$

1.4 Formules de factorisation

$$\begin{aligned} \cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p)-\cos(q) &= \cdots \\ \sin(p)+\sin(q) &= \cdots \\ \sin(p)-\sin(q) &= \cdots \end{aligned}$$

1.5 Délinéarisation

$$\begin{aligned} \cos(3t) &= \cos^3(t)-3\cos^2(t)\sin(t) \\ \cos(5t) &= \cdots \\ \sin(3t) &= \cdots \end{aligned}$$

etc.

1.6 Sommation

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\cos(kt) &= \cdots \\ \sum_{k=0}^{n}\sin(kt) &= \cdots \end{aligned}$$

2 Techniques utilisant ou non les nombres complexes

2.1 Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cdots \\ \sin(a+b) &= \cdots \\ \cos(a-b) &= \cdots \\ \sin(a-b) &= \cdots \end{aligned}$$

2.2 Formules pour tangente

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \\ \tan(a-b) &= \cdots \end{aligned}$$

2.3 Formules de duplication

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= 2\cos^2(a)-1 \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) \end{aligned}$$

3 Techniques sans les complexes

3.1 Valeurs remarquables

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cdots$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cdots$$
etc.

3.2 Angles associés

$$\cos(\pi - x) = \cdots$$
$$\sin(-x) = \cdots$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cdots$$
etc.

3.3 Trouver la phase et l'amplitude

Transformer $A\cos(t) + B\sin(t)$ en $C\sin(t+\varphi)$

3.4 Graphes de sin, cos et tan

À connaître absolument !

3.5 Dérivées

$$\cos' = \cdots$$
$$\sin' = \cdots$$
$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

Chapitre 4 : Trigonométrie

Compétences pratiques

(I) CAH SOH TOA

$$\text{cosinus} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} \qquad \text{sinus} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} \qquad \text{tangente} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

(II) Linéarisation

On veut transformer un $\cos^n(x)$ ou un $\sin^n(x)$ ou un $\cos^n(x)\sin^m(x)$ en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$

méthode : (1) Euler (2) Newton

Exemple
linéarisons l'expression $\cos^3(t)$
Soit $t \in \mathbb{R}$
On calcule :

$$\cos^3(t) \underset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^3$$

$$\underset{\text{Newton}}{=} \frac{1}{8}\left(e^{3it} + 3(e^{it})^2 e^{-it} + 3e^{it}(e^{-it})^2 + (e^{-it})^3\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\,\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} + 3\times 2\,\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\cos(3t) + 6\cos t\right)$$

$$= \frac{\cos(3t)}{4} + \frac{3}{4}\cos(t)$$

Application

On note $I = \int_0^{\pi/4} \cos^3(t)\,dt$

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(3t)}{4} + \frac{3}{4}\cos(t)\,dt$$

$$I = \left[\frac{\sin(3t)}{12}\right]_0^{\pi/4} + \frac{3}{4}\left[\sin(t)\right]_0^{\pi/4} = \dots$$

? $\sin^4(t) = \qquad \cos^2(t)\sin(t)$

Rq : $t \to \cos^2(t)\sin(t)$ est impaire

donc il faut que la linéarisation soit également impaire.

On s'attend à des termes en $\sin(kt)$

III Factorisation par l'angle-moitié

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

On calcule

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = \underbrace{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}_{\text{l'angle moitié } \frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)$$

$$= 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$$

on force cos à apparaître avec 2

Application

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}+e^{i\theta'}\right)=\mathrm{Re}\left(2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right)$$

$$\cos(\theta)+\cos(\theta')=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

Exemple

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

Appliquons cette technique pour $\cos(\theta)-\cos(\theta')$

Réflexe :

Calculons $e^{i\theta}-e^{i\theta'}=e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\left(\frac{e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}-e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}}{2i}\right)2i$

$$=2ie^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}$$

donc $\cos(\theta)-\cos(\theta')=2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{Re}\left(ie^{\frac{\theta+\theta'}{2}}\right)$

$i(\cos + i\sin)$

$$=-2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

$-\sin + i\cos$

Re

IV Sommation

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$

On veut calculer :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$$

On écrit :

On écrit :

1) $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ik\theta}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$

2) On voit apparaitre une SG

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k$$

1er cas : $e^{i\theta} = 1$ ie $\theta \equiv 0 \ (2\pi)$

alors, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

donc $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = n+1$

2ème cas : $e^{i\theta} \neq 1$ ie $\theta \not\equiv 0 \ (2\pi)$

SG s'applique et on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k = \frac{(e^{i\theta})^{n+1} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

On applique la technique de l'angle moitié

On a : $e^{i(n+1)\theta} - 1 = e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}\left(e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}}\right)$

$$= 2i\, e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)$$

$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= 2i\, e^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k = \frac{2i\, e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{2i\, e^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$= e^{i\frac{n}{2}\theta}$

$$= e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(!) Puis on passe à $\mathrm{Re}(\cdot)$

CCL : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

(V) Formules de factorisation

Soient $p, q \in \mathbb{R}$

1) On a $\cos p + \cos q$ = (!) technique de l'angle moitié

$= \mathrm{Re}(e^{ip} + e^{iq}) = \dots$

$\dots = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

2) On a $\sin p - \sin q$

$$= \mathrm{Im}(e^{ip} - e^{iq}) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(2i\, e^{i\frac{p+q}{2}} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \mathrm{Im}\left(i e^{i\frac{p+q}{2}}\right) \to \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

3) On a

$$\cos(p) - \sin(q) = \cos(p) + \sin(-q)$$
$$= \cos(p) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + q\right) = \dots$$

VI Formules d'addition

On peut les retrouver grâce à $e^{i\theta}$
Soient $a, b \in \mathbb{R}$

On a : $\cos(a+b) = \mathrm{Re}\left(e^{i(a+b)}\right)$

et, $e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$
$= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos b + i\sin(b))$
$= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i \dots$

CCL : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

VII Délinéarisation

On part d'une expr° du type $\cos(n\theta)$ et on veut la transformer en somme de $\cos^k(\theta)$ et $\sin^k(\theta)$

1) $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{in\theta})$
2) $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ Moivre
3) Newton

Délinéarisons $\cos(3\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

On a $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}(e^{i3\theta})$

$= \mathrm{Re}((e^{i\theta})^3)$

Or, $(e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$

donc $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(?) Forme générale ie $\cos(n\theta)$ si $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$

Rq : la délinéarisaθ est ⊖ utile que la linéarisation mais elle permet de définir les polynomes de Tchebytchev

VIII Trouver l'amplitude et la phase

Soient $A, B \in \mathbb{R}$

On regarde l'expression $A\cos\theta + B\sin\theta$

On veut l'écrire : $C\cos(\theta + \varphi)$

Si $A = \cos(T)$ et $B = \sin(T)$

On aurait alors, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$A\cos\theta + B\sin\theta$

$= \cos(T)\cos(\theta) + \sin(T)\sin(\theta)$

$= \cos(T-\theta) = \cos(\theta - T)$

Une CNS pour cela est : $A^2+B^2=1$

On force ceci à apparaître

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. on écrit :

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2+B^2}\left(\overset{\alpha}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}\cos(\theta) + \overset{\beta}{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}\sin(\theta)\right)$$

On a $\alpha^2+\beta^2=1$

Soit donc $\varphi \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases}\alpha = \cos\varphi \\ \beta = \sin\varphi\end{cases}$

On a alors

$$A\cos(\theta) + B\sin(\theta) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta-\varphi)$$