Chapitre 5

Calculs algébriques

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Formule du binôme de Newton

Les mathématiques ne se résument pas à connaître, appliquer et démontrer des formules compliquées (loin de là, très loin de là).

Une formule, c'est une façon synthétique d'exprimer une identité entre deux objets ; c'est une façon de présenter le même objet sous des points de vue différents. Dans ce chapitre, on va présenter plusieurs techniques calculatoires essentielles, notamment à propos des sommes. On prouvera avec ces méthodes quelques formules.

Remarque

La formule de Newton est un cas particulier de la formule suivante, où $n \in \mathbb{N}^*$ et où les a_i et les b_i sont des nombres, réels ou complexes.

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!] \\ |J|=k}} \left(\prod_{i\in J} a_i \prod_{j\notin J} b_j \right).$$

Chapitre 5 : Calcul algébriques

I, Sommes

1) Notations

Soit $n \in \mathbb{N}$
Soit $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{C}^{n+1}$

On note : $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Rq : . la variable i est muette
On a : $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{n} a_k$

. De même, on définit

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k \text{ si } n_0 \in \mathbb{Z}$$

Par exemple, $\sum_{k=1}^{n} k^2$

. ! Si $n_0 > n$, on dit que la somme est vide
En effet, $\{ k \in \mathbb{Z} \mid n_0 \leq k \leq n \} = \emptyset$

dans ce cas là, par convention : $\sum_{k=n_0}^{n} a_k = 0$

Ex : $\sum_{k=1}^{0} (k+2) = 0$

Soit I un ens. non vide

Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$

Si $I = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ "énumération de I"
$(N = \text{card } I)$

On pose $\sum_{i \in I} a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + \dots + a_{i_N}$

Exemples : Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{N}^*$

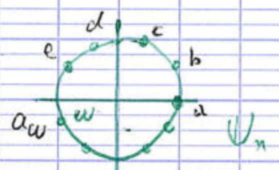
1) On prend $I = [\![0, n]\!]$

Soit $(a_i)_i \in \mathbb{C}^I$

On considère $\sum_{i \in I} a_i$

c'est $\sum_{i \in [\![0,n]\!]} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i$ notée aussi $\sum_{0 \leq i \leq n} a_i$

2) On prend $I = \mathbb{U}_n$

ie 

On considère la famille $(a_\omega)_{\omega \in \mathbb{U}_n}$ définie par :

$a_\omega := \omega$

donc ici, $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} a_\omega = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$

On a vu $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \begin{cases} 0 \text{ si } n \geq 2 \\ 1 \text{ sinon } (n = 1) \end{cases}$

(?) Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^2$

3) On considère $I = \mathcal{P}(⟦1, n⟧)$ $(n \geqslant 1)$

Si $X \subset ⟦1,n⟧$, on note $a_X := \text{card } X$

la somme associée est $\sum_{X \in \mathcal{P}(⟦1,n⟧)} |X|$

notée également : $\sum_{X \subset ⟦1,n⟧} |X|$

(?) Valeur de cette somme ?

2) Propriétés des sommes

Prop : $n \geqslant 0$; $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, $(b_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$; $\lambda \in \mathbb{C}$

alors, on a :

1) $\sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$

2) $\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i$

(ie $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\dots+(a_n+b_n) = (a_0+a_1+\dots+a_n)+(b_0+b_1+\dots+b_n)$)

3) $\sum_{i=0}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i$ c'est une factorisation par λ

Prop :

$n \geqslant 0$, a_i, $b_i \in \mathbb{R}^{n+1}$

1) Si $\forall i$, $a_i \geqslant 0$ alors $\sum_{i=0}^{n} a_i \geqslant 0$

2) Si $\forall i$, $a_i \leqslant b_i$ alors $\sum_{i=0}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=0}^{n} b_i$

3) Si $\forall i \in ⟦0,n⟧$, $a_i \geqslant 0$ **alors** :

$\sum_{i=0}^{n} a_i = 0 \Rightarrow \forall i \in ⟦0,n⟧, a_i = 0$

Démo :

3) Osq $\forall i, a_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$

Mq $\forall i, a_i = 0$

Soit $i_0 \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \underset{\uparrow}{=} a_{i_0} + \sum_{i \in [\![0,n]\!] \setminus \{i_0\}} a_i$$

on isole a_{i_0}

Rq : On écrira plutôt :

$$\sum_{i \in [\![0,n]\!] \setminus \{i_0\}} a_i = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{n} a_i = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq i_0}} a_i = \sum_{i \neq i_0} a_i$$

De plus, on a $\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{n} a_i \geq 0$ d'après 1)

donc $\sum_{i=0}^{n} a_i \geq a_{i_0}$

de plus $a_{i_0} \geq 0$

Comme $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$, on a ainsi : $0 \leq a_{i_0} \leq 0$

donc $a_{i_0} = 0$

CCL : $\forall i \in [\![0, n]\!], a_i = 0$

3) Changements de variables $l = k+1$

On veut calculer $\sum_{k=0}^{n} a_k$

On fait le change^t de variable $l = k+1$

Méthode :

1) on regarde les bornes
ici : $k : 0 \to n$

2) on en déduit les bornes pour l
ici : $l : 1 \to n+1$

donc, on aura $\sum_{l=1}^{n+1} ?$

3) On remplace dans a_k les occurrences de k par $l-1$

Rq ! : Souvent, si on pose $l = k+1$; c'est que $k+1$ apparaît comme un bloc ds l'expression

Exemple Soit $x \in \mathbb{R}$

Calculons $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} x^k$

On note $S := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} x^k$

Si $x = 0$, on a $S = \binom{n}{0+1} 0^0 = n$

⚠ $0^0 = 1$

Si $x \neq 0$: On fait le changt de variables "$l = k+1$"

On a $S = \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l} x^{l-1}$, or pour $l = n+1$, on a $\binom{n}{n+1} = 0$

donc $S = \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\binom{n}{l} x^{l-1}}_{= \frac{1}{x}\binom{n}{l} x^{l}}$

Pour appliquer la formule de Newton, la Σ doit commencer à 0

On la force à apparaître

On, $S = \dfrac{\sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} x^{l}}{x} = \dfrac{\overbrace{\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^{l}}^{\text{Newton} : (1+x)^n} - 1}{x} = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$

<u>Complément</u>

⚠ On ne peut pas soustraire les inégalités entre elles

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \not\Rightarrow a - c \leq b - d$$

contre-exemple :

$\begin{cases} 1 \leq 2 \\ 1 \leq 10000 \end{cases}$ mais $1 - 1 = 0 \not\leq 2 - 10000 = -9998$

. De même, on ne peut pas diviser entre elles des inégalités

on a $1 \leq 2$

$1 \leq 3$

et $\frac{1}{1} \not\leq \frac{2}{3}$.

Rq : De même si on pose $l = k+2$ → changements de variables

4) Change^t de variable $l = n - k$

Cela revient à parcourir l'ens des indices (ici : $[\![0, n]\!]$) dans le sens opposé.

$k : 0, 1, 2, \dots, n$

$n-k : n, n-1, n-2, \dots, 0$

Rq : dans $\sum_{k=2}^{n+1}$, on peut faire le change^t de variables

$$l = (n+1) - k$$

Méthode :

1) on pose $l := n - k$ (*)
2) on calcule les nouvelles bornes
⚠ 3) on change l'ordre des bornes
4) On remplace k par l à l'aide de (*)

Exemple

On note $S_n := \sum_{k=0}^{n} k$

On a $S_n \underset{l=n-k}{=} \sum_{l=0}^{n} n - l$ par change^t de variables

donc, $S_n \underset{\text{par linéarité}}{=} \sum_{l=0}^{n} n - \sum_{l=0}^{n} l$

$= \underbrace{n + n + n + n + \dots}_{(n+1) \text{ fois}} - S_n$

$S_n = n(n+1) - S_n$

donc $2S_n = n(n+1)$

et $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

5) Sommes télescopiques

Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ une famille de nb complexes.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$

Calculons S_n

Rq ⚠ : En dehors de $\sum_{k=0}^{n} b_k$, la variable k n'est pas définie.

Donc, par ex., un résultat du type $\sum_{k=0}^{n} b_k = \dfrac{3k-1}{n}$

n'a aucun sens.

Méthode petit n

$n = 0$ $\quad S_0 = \sum_{k=0}^{0} a_{k+1} - a_k = \underbrace{a_1 - a_0}_{k=0}$

$n = 1$ $\quad S_1 = \sum_{k=0}^{1} a_{k+1} - a_k = a_1 - a_0 + \underbrace{a_2 - a_1}_{k=1}$
$= a_2 - a_0$

etc, on conjecture $S_n = a_{n+1} - a_0$

Prop : $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_0$

On dit que cette somme est <u>télescopique</u>

Rq : • On prend le $\oplus$ grand indice, on le met sur le $k+1$
• On prend le + petit $\to$ on le met sur le k

ex : $\sum_{k=5}^{n+2} b_k - b_{k-1} = b_{n+2} - b_4$

Démo :

1ère méthode :

a) changement de variable
b) on isole le domaine de sommation commun

2ème méthode : par récurrence simple

3ème méthode :

méthode concrète des "..."

On écrit $S_n = \cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + a_3 - \cancel{a_2} + \dots + \cancel{a_n} - a_{n-1} + a_{n+1} - \cancel{a_n}$
$= a_{n+1} - a_0$

Exemple :

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Astuce hyperclassique

Si $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

? $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} =$

6) Sommes classiques

a) Sommes de puissances

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démo :

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: " $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ "

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ par récurrence

Initialisation ($n = 1$) :

On a $\sum_{k=1}^{1} k = 1$

et $\frac{1(1+1)(2 \times 1+1)}{6} = 1$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité :

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $P(n)$

Mq $P(n+1)$ est vraie

on note $S_n := \sum_{k=1}^{n} k^2$

On a $\sum_{k=1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$$\underset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\underset{facto.}{=} \frac{(n+1)}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right)$$

On connait le résultat souhaité : on le développe

Or, $((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3)$

$$= 2n^2 + 3n + 4n + 6$$

$$= 2n^2 + 7n + 6$$

Ainsi, $S_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

donc, $P(n+1)$ est vraie

donc, par récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Rq : en général, on garde les formes factorisées

⚠ Une forme factorisée a plus de valeur qu'une forme dév.

conjecture : c'est un polynome de degré 4

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

démo : par récurrence

b) "Sommes arithmétiques"

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \begin{cases} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \end{cases}$ une suite arithmétique

Soient $n_0, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq n_0$

Prop : On a

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \text{nb de termes} \times \text{moyenne des termes extrémaux}$$

$$= (n - n_0 + 1) \times \frac{u_{n_0} + u_n}{2}$$

Application :

$$\sum_{k=1}^{n} k = n \times \frac{1+n}{2}$$

Démo :

On note $a \in \mathbb{R}$ la raison de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$

On note $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ Notation

Idée : on s'appuie sur le pivot n_0 :

On a : $\forall k \geq n_0 \quad , u_k = u_{n_0} + (k - n_0) a$

On a : $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_{n_0} + (k - n_0) a$

$$= \sum_{k=n_0}^{n} u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n} (k - n_0) a$$

Méthode : on sous-divise notre calcul

On a : $\sum_{k=n_0}^{n} u_{n_0} = (n-n_0+1)\, u_{n_0}$

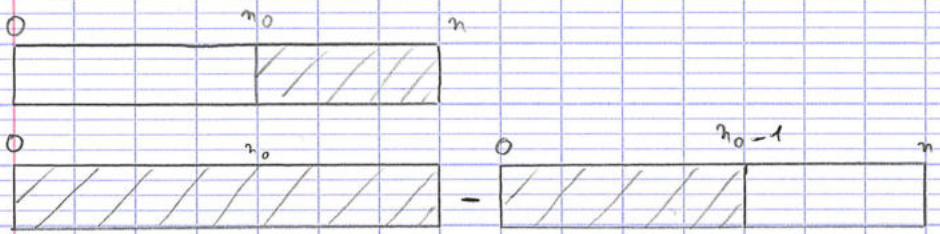
ou $= u_{n_0} \times \sum_{k=n_0}^{n} 1$ Réflexe = nb de termes de la Σ

et $\sum_{k=n_0}^{n} (k-n_0)a = a \sum_{k=n_0}^{n} (k-n_0)$

$$\underset{\ell = k - n_0}{=} a \sum_{\ell=0}^{n-n_0} \ell = a\, \frac{(n-n_0)(n-n_0+1)}{2}$$

Rq : ou $\sum_{k=n_0}^{n} k - n_0 = \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} k}_{= \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n_0-1} k} - \sum_{k=n_0}^{n} n_0$

dessin :



Donc,

$$S_n = (n-n_0+1)\, u_{n_0} + a\, \frac{(n-n_0)(n-n_0+1)}{2}$$

$$= (n-n_0+1)\left(u_{n_0} + \frac{a(n-n_0)}{2} \right)$$

$$= (n-n_0+1)\left(\frac{2u_{n_0} + a(n-n_0)}{2} \right)$$

$$= (n-n_0+1)\left(\frac{u_{n_0} + \underbrace{u_{n_0} + a(n-n_0)}_{u_n}}{2} \right)$$

c) "Sommes géométriques"

Prop : Soit $a \in \mathbb{C}$ tq $a \neq 1$
Soit $n \in \mathbb{N}$

alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{\text{nb de termes}} - 1}{a-1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ (SG)

Rq : . Si $a \in \mathbb{R}$ et $a > 1$, on écrit $\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1} = \dfrac{\text{positif}}{\text{positif}}$

. Si a est un petit réel (ex : $a \in [0,1[$) ou $a \in]-1;1[$
on écrit $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} = \dfrac{\text{positif}}{\text{positif}}$

Démo : par récurrence

- Plus généralement si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$

$$\boxed{\sum_{k=n_0}^{n} a^k = \text{premier terme} \times \frac{a^{\text{nb de termes}} - 1}{a-1}}$$
$$= a^{n_0} \times \frac{a^{n-n_0+1} - 1}{a-1}$$

Démo :

Concrètement, c'est : $a^{n_0} + a^{n_0+1} + \dots + a^n$
$= a^{n_0}\left(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-n_0}\right)$

$$= a^{n_0} \times \sum_{k=0}^{n-n_0} a^k$$

Corollaire : Factorisation de $a^n - 1$

Soit $a \in \mathbb{C}$, on a :

$$a^n - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$

ie $a^n - 1 = (a-1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k$

Exemples

$. \; a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$

$. \; a^3 - 1 = (a-1)(1 + a + a^2)$

$. \; a^4 - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + a^3) \underset{\text{mieux}}{=} ((a^2)^2 - 1) = (a^2-1)(a^2+1)$

$= (a-1)(a+1)(a+1)$

Démo : (si $n \geqslant 1$)

. Si $a = 1$: c'est bon

. Si $a \neq 1$: d'après $SG_{a,n-1}$

On a, $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \dfrac{a^n - 1}{a-1}$

en multipliant par $a-1$: $(a-1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^n - 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} - a^k = a^n - a^0$$

Corollaire !! : Formule de Bernoulli

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$
alors on a

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$$

Rq : . "$a^n - b^n$" est de degré n
. $(a-b)$ est de degré 1
donc le facteur restant doit être de degré $n-1$
le degré total de $a^k b^{n-1-k}$ = degré en a + degré en b
$= k + n - 1 - k$
$= n - 1$

Démo :

. si $b = 0$

On a $\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ = 0 sauf pour la puissance 0 pour $n - 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = n-1$

$= a^{n-1}$

et $a - b = a$ et $a^n - b^n = a^n$

. (si $a = b$: c'est bon) inutile de distinguer ce cas

. Cas $b \neq 0$ et $a \neq b$

On a : $a^n - b^n = b^n \left(\frac{a^n}{b^n} - 1 \right) = b^n \left(\left(\frac{a}{b} \right)^n - 1 \right)$

$= b^n \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^k$

$\times b^{n-1}$

$\times b$

factorisation de $\alpha^n - 1$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Rq : factorisation de $a^n + 1$

si <u>n est impair</u>, on a $1 = -(-1)^n$

et donc

$$a^n + 1 = a^n - (-1)^n \overset{\text{Bernoulli}}{=} (a-(-1)) \sum_{k=0}^{n-1} a^k (-1)^{n-1-k}$$

mais $(a-(-1)) = a+1$

et $(-1)^{n-1-k} = \underbrace{(-1)^{n-1}}\ (-1)^{-k}$

↳ n est impair donc $n-1$ est pair
$n-1 \equiv 0\ (2)$
$n-1 \in 2\mathbb{Z}$

Or $(-1)^{-k} = (-1)^k$ si $k \in \mathbb{Z}$

↳ $\frac{1}{(-1)^k}$

CCL : $a^n + 1 = (a+1) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k}$

Rq : le 1er terme de cette Σ est $+1$
le dernier terme —— est $+a^{n-1}$

Ex :

$a^3 + 1 = (a+1)(1 - a + a^2)$
$a^5 + 1 = (a+1)(1 - a + a^2 - a^3 + a^4)$

Rq : de même pour $a^n + b^n = a^n - (-b)^n$ si n est impair

d/ Sommes binomiales

Prop: Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Démo:

1e démo: combinatoire

. si $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est le nb de parties à k éléments dans $[\![1, n]\!]$

. Or, si $A \subset [\![1, n]\!]$, alors A est une partie à k éléments pour un k bien choisi, compris entre 0 et n

. On note $P_k([\![1, n]\!]) = \{A \subset [\![1, n]\!] \mid \text{card } A = k\}$

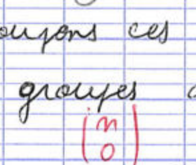
. On a $\underbrace{P([\![1, n]\!])}_{\text{cardinal } 2^n} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \underbrace{P_k([\![1, n]\!])}_{\text{cardinal } \binom{n}{k}}$

Comme l'union est disjointe, on obtient :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Dessin:

Dessinons $P([\![1, n]\!])$:



Regroupons ces parties $A \in P([\![1, n]\!])$ en groupes de parties de m̂ cardinal

$\binom{n}{0}$: $\emptyset$

$\binom{n}{1}$: $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ ... $\{n\}$

$\binom{n}{2}$: $\{1,2\}$ $\{1,3\}$

$\binom{n}{k}$: $\{1,2,3\}$ les parties à k éléments

au total, il y a $2^{\text{card}([\![1, n]\!])} = 2^n$ parties d'où $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} + \binom{n}{n} = 2^n$

2^e^ démo : On applique la formule de Newton

$$\forall a,b \in \mathbb{C} \ , \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

pour $a = b = 1$:

Cela donne $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k}$

$$\text{ie} \quad 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \blacksquare$$

7) Sommation par paquets

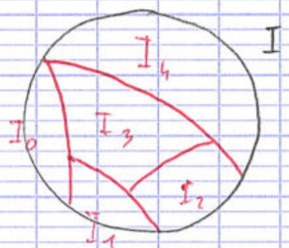
. Soit I un ens. fini et $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$

. Soit J un ens. fini non vide

Soit $(I_j)_{j \in J}$ une famille de parties de I tq :

- $\bigcup_{j \in J} I_j = I$
- $\forall j, j' \in J \ , \ j \neq j' \Rightarrow I_j \cap I_{j'} = \emptyset$

Dessin :



avec $j = [\![0, 4]\!]$

Prop : On a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i$$

II, Produits

1) Définition

. On définit le produit : $\prod_{k=0}^{n} a_k$ de façon analogue à $\sum_{k=0}^{n} a_k$.

. Le produit vide vaut 1.

Rq : $\sum_{i \in I \sqcup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i$

Rq !! : Astuce

Soient $n \geq 1$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

alors $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$

2) Propriétés

Prop : $n \geq 1$; $(a_i), (b_i) \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$

1) $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=1}^{n} b_i$

2) $\prod_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda a_1 \times \lambda a_2 \times \lambda a_3 \ldots = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

3) Exemples

. Si $n \geq 0$, on pose $n! := \prod_{k=1}^{n} k$

. Soit $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{w \in \mathbb{U}_n} w = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$e^a e^b = e^{a+b}$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2ik\pi}{n}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$$= \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \exp\left(i\pi(n+1)\right)$$

$$= e^{i\pi(n+1)}$$

$$= \left(e^{i\pi}\right)^{n+1}$$

$$= (-1)^{n+1}$$

III, Sommes doubles

1) Familles doubles

Une famille double est une famille qui dépend de 2 indices.

On note $(a_{i,j})_{\substack{i \in [\![0,n]\!] \\ j \in [\![0,n]\!]}}$

On dispose de : $a_{0,0}$; $a_{0,1}$; $a_{0,2}$; ...

Il y a $(n+1)^2$ indices dans cette famille.

Autres notations :

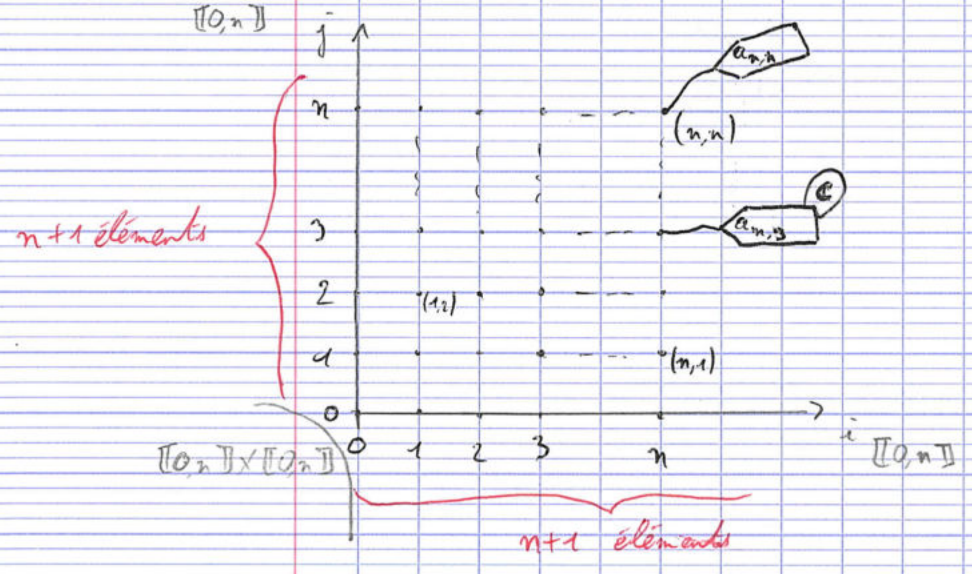
- $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}$ - $(a_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$

- $(a_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}}$ - $(a_{i,j})_{i,j}$ - $(a_{i,j})$

Ici, on a $(a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{C}^{[\![0,n]\!]\times[\![0,n]\!]}$

2) Représentation graphique de l'ens. des indices

On dessine :



3) Somme

On note $\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} a_{i,j}$ la somme de la famille $(a_{i,j})_{i,j}$

Autres notations

. $\sum_{0\leq i,j\leq n} a_{i,j}$ $\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}$

4) Deux expressions de cette somme

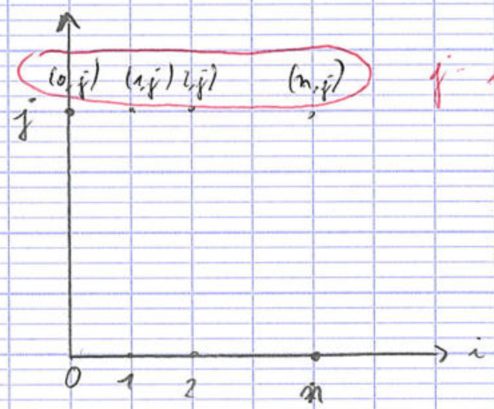
On calcule $\sum_{0 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$ de deux façons différentes

a) ligne par ligne

Ici, j est le nom de l'indice de ligne

Soit $j \in [\![0, n]\!]$

On dessine :

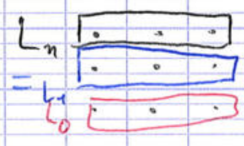


j-ième ligne

On note L_j la somme des nombres sur la j-ième ligne

On a :

$$\sum_{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2} a_{i,j} =$$



$$= L_0 + L_1 + \dots + L_n$$

De plus, si j est un entier ($j \in [\![0, n]\!]$), on a :

$$L_j = a_{0,j} + a_{1,j} + \dots + a_{n,j}$$

ie $L_j = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$

Ainsi, on a

<u>Prop :</u> $\underbrace{\sum_{0 \leq i,j \leq n} a_{i,j}}_{\text{somme d'une famille double}} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j} \right)}_{\text{somme double}}$ on Σ ligne par ligne

b) colonne par colonne

On a :

Prop : $\sum_{0 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} \right)$

c) Interversion des signes Σ dans le cas rectangulaire

Théorème :

Soient $n, p \geq 1$

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathbb{C}^{n \times p}$

alors, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

Complément

⚠ Erreur grave : la somme des produits n'est pas le produit des sommes

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}_{n \text{ termes}} \neq \underbrace{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)}_{n \text{ termes}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}_{n \text{ termes}}}_{n^2 \text{ termes}}$$

Si c'était vrai, on aurait :

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2)$$

ici $n = 2$ et $\forall i, a_i = b_i$

ie $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^2 = a^2 + b^2$ <u>FAUX</u>

- En revanche, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)}_{\text{noté } \lambda}$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i$$

et si $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lambda a_i = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) a_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_i b_j$$

donc, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i b_j$

5) Familles à variables séparées

Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{C}^{n^2}$ une famille double

<u>Déf :</u> On dit que $(a_{i,j})$ est à variables séparées ssi il existe une famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$ et une famille $(\beta_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$ telles que :

$$\forall i, j \quad a_{i,j} = \alpha_i \beta_j$$

Exemples

- $(i\,2^{j})_{1\leq i,j\leq n}$ est à variables séparées
- $(2^{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ n'est pas à variables séparées

Théorème :

Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{C}^{n^2}$ une famille à variables séparées

qu'on écrit : $a_{i,j} = \alpha_i \beta_j$

Alors, on a : $\boxed{\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j\right)}$

Démo : cf complément

Rq : généralisations immédiates

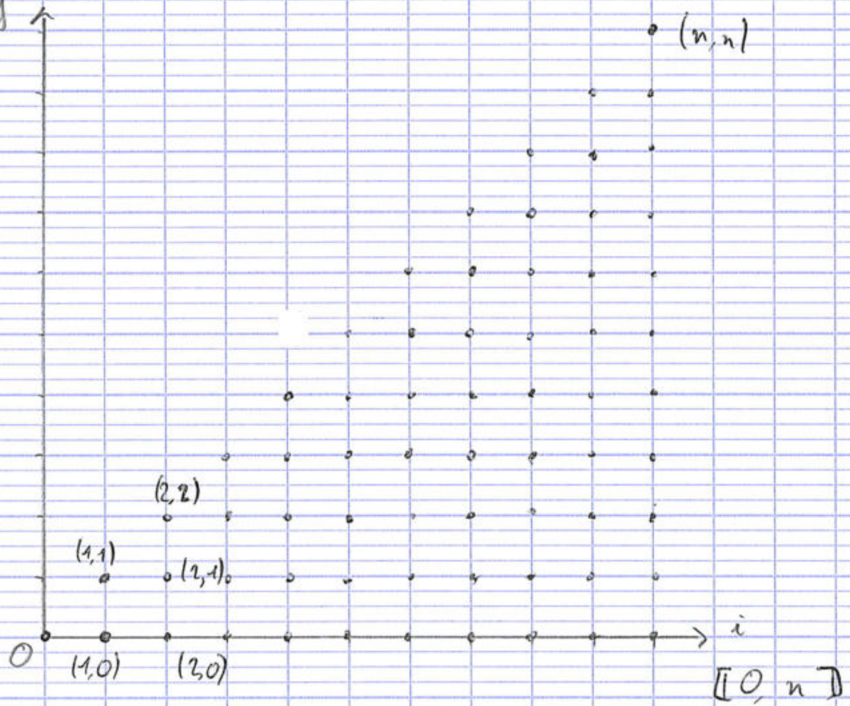
6) Sommes doubles à deuxième borne variable

On considère la somme

$$S = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_{i,j}$$

On a $S = \underbrace{\sum_{j=0}^{0} a_{0,j}}_{i=0} + \underbrace{\sum_{j=0}^{1} a_{1,j}}_{i=1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{2} a_{2,j}}_{i=2} + \dots + \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a_{n,j}}_{i=n}$

Dessinons l'ensemble des indices (i,j) intervenant dans S



On dit que S est une Σ triangulaire.

(2) Faire de même pour $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$

Sommons les $a_{i,j}$ ligne par ligne

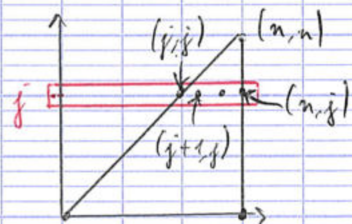
. ligne $j=0$: on a tous les indices $i : 0 \to n$

On obtient $L_0 = \sum_{i=0}^{n} a_{i,0}$

. ligne $j=1$

On obtient tous les $i : 1 \to n$

$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$



. ligne j

d'où $L_j = \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$ $(*)$

$$S = \frac{1}{2} n(n+1)\left(\frac{2n+1+3}{6}\right)$$

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Rq : Quand on n'arrive pas à calculer une double Σ

Réflexe : on intervertit les deux signes Σ

Exemple :

$$0 \leq i \leq j \leq n \quad \begin{array}{l} \nearrow \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \\ \searrow \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \end{array}$$