Chapitre 6

Théorie des ensembles

Applications

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ injective} &\implies f \text{ injective} \\ g \circ f \text{ surjective} &\implies g \text{ surjective} \end{aligned}$$

Deux théorèmes très importants

Nous poursuivons dans ce chapitre l'étude de la théorie des ensembles avec le concept, essentiel, d'application. Grâce aux applications, on peut « relier » les ensembles les uns aux autres.

Chapitre 6 : Applications

Dans ce chapitre, E, F, G et H sont des ensembles

I, Généralités

1) Applications

a) Définition

Déf : . Une application f de E dans F est la donnée pour tout élément $x \in E$ d'un élément de F, qu'on note $f(x)$

. E est appelé le domaine de f ou ensemble de départ

. F est appelé le codomaine de f ou ensemble d'arrivée de f

Rq : f est définie sur E tout entier

On note $f : E \to F$ ou $E \xrightarrow{f} F$

Si f est définie par une formule explicite, on note :

$$f : E \to F$$
$$x \mapsto \text{formule explicite}$$

ex : . $\varphi : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

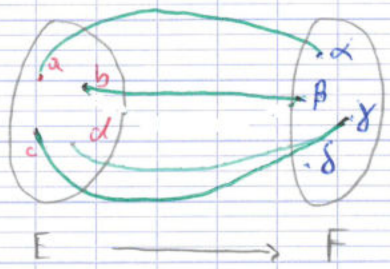
on a $\varphi(\pi) = 1$

$\cdot \; f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ $\qquad\qquad$ $\cdot \; g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\quad z \mapsto \exp(z)$ $\qquad\qquad\qquad$ $z \mapsto \exp(z)$

⚠ f et g ne sont pas la m̄ application car les codomaines sont différents

. On peut représenter les applications dans des diagrammes de Venn

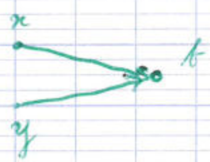


ie $f(a) = \alpha$
$\quad f(b) = \beta$

⚠ a) tout élément de l'ens E de départ doit être l'origine d'une flèche

b) Mais un élément de l'ens. F d'arrivée n'est pas nécessaire[t] le but d'une flèche

⚠ c) la situation



est possible

Cela signifie juste que $\begin{cases} x \neq y \\ f(x) = f(y) \end{cases}$

d) En revanche, la situation

n'a aucun sens

En effet, que vaut $f(a)$? α ou β ?

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto x^2$

alors : (-1) n'est pas le but d'une flèche

Vocabulaire :

Soit $f : E \to F$
Soient $x \in E$ et $y \in F$

a) Si $f(x) = y$.
on dit que y est l'image de x par f
on dit que x est un antécédent de y par f

b) Si $\exists a \in E : y = f(a)$: on dit que y est atteint par f.

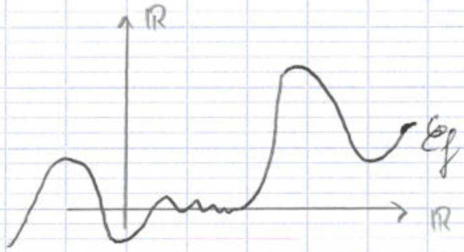
c) Si $\forall a \in E,\ y \neq f(a)$: on dit que y n'est pas atteint par f.

b) Ensemble des applications

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\underline{\mathcal{F}(E,F)}$ ou F^E.

Rq ! : Une application $f : E \to F$ n'est pas nécessairement donnée par une formule

ex :



F^E : familles d'éléments de F indexées par E

Rq : $I : i \rightsquigarrow x_i \in E \qquad (x_i)_{i \in I} \in E^I$
$E : x \longmapsto f(x) \in F \qquad f \in \mathcal{F}(E,F)$

c) Exemples d'applications

. $f : PCSI3 \to \mathbb{N}$

$x \mapsto$ année de naissance de x

On a $f(\text{Anouk}) = 2002$

. $n \geqslant 1$

on considère

$\varphi : \mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n^{\,n}$

$\omega \mapsto (\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^n)$

Elle est bien définie

car $\forall \omega \in \mathbb{U}_n, \forall i \in \mathbb{Z}, \omega^i \in \mathbb{U}_n$

Rappel : $\mathbb{U}_n$ stable par produit et par inverse

donc $\mathbb{U}_n$ stable par puissance

. E ensemble et $a \in E$

$\varphi : \mathcal{P}(E) \to \{0, 1\}$

$X \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin X \\ 1 \text{ si } a \in X \end{cases}$

qu'on pourrait noter $\varphi_{E,a}$

On a $\varphi_{\mathbb{R},1}([0,1]) = 1$

$\varphi_{\mathbb{R},1}([3,+\infty[) = 0$

$\varphi_{\mathbb{R},\pi}([3,4]) = 1$

. I ens. fini

$\sum_{i \in I} : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$

$(a_i)_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I} a_i$

. Ω ensemble

$$\varphi : \Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$$
$$a \mapsto \Omega \setminus \{a\}$$

. E ens. : A, B parties de E ie $A, B \subset E$

$$f_{A,B} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)^2$$
$$X \to (X \cap A, X \cap B)$$

. E, F ensembles ;

$$\Phi : \mathcal{F}(E, F) \times E \to F$$
$$(f, a) \mapsto f(a)$$

qu'on peut noter $\Phi_{E,F}$

Complément

1) Espaces de fonctions

I : intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point

ex : $I =]0, 1[$; $I = [2; +\infty[$, $I = \mathbb{R}$, etc

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ens. des f^o continues de I dans $\mathbb{R}$

ie $\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in]a - \eta, a + \eta[, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ens. des f^o dérivables de I dans $\mathbb{R}$

Prop : $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

ie f dérivable $\Rightarrow$ f continue

⚠ f continue $\not\Rightarrow$ f dérivable

Ie : $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \not\subset \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

ie $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

Exemple :

- $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

  On a $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais $f \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car f n'est pas dérivable en 0

- $I = \mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

  On a $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

en effet, $\lim\limits_{\substack{h \to 0^+ \\ \neq}} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h - 0} = \lim\limits_{\substack{h \to 0^+ \\ \neq}} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0^+ \\ \neq}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$

donc, $\nexists\, l \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h - 0} \xrightarrow[\substack{h \to 0^+ \\ \neq}]{} l$

ie f n'est pas dérivable en 0

Dessin

Soit $f : I \to \mathbb{R}$
On dit que f est continument dérivable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

1) f est dérivable
2) f' est continue

ie 1') $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$
2') $f' \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ens. des fcts continument dérivables

Ie : $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \,\middle|\, f' \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \right\}$

. On dit f est deux fois dérivable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

1) $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$
2) $f' \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

On note $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \,\middle|\, f' \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \right\}$

On a $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

et $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$

<u>Définition</u> : On note :

. $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) := \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) = \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$
. Si $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on note :
$$\mathcal{D}^p(I, \mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \,\middle|\, f' \in \mathcal{D}^{p-1}(I, \mathbb{R}) \right\}$$

- si $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \;\middle|\; f' \in \mathcal{C}^{p-1}(I,\mathbb{R}) \right\}$$

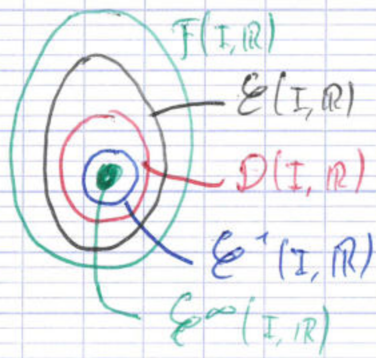
- on note

$$\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) := \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{D}^p(I,\mathbb{R})$$

- On a : $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^p(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{p-1}(I,\mathbb{R})$

suite : $\mathcal{C}^{p-1}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^{p-1}(I,\mathbb{R}) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

et $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$



Exemples

- $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$
- $\sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- Notons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

elle est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

elle n'est pas dérivable en 0

Bilan.

$$f \in \left[\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \right] \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

2) On peut considérer

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) &\to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

si $p \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{R}) &\to \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

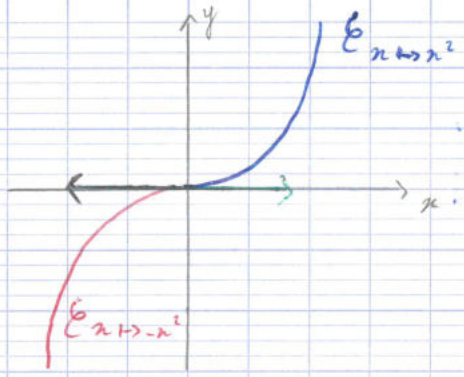
et
$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) &\to \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

ie la dérivée d'une fct. $\mathcal{C}^\infty$ est encore $\mathcal{C}^\infty$

Exemple :

On considère
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dessin



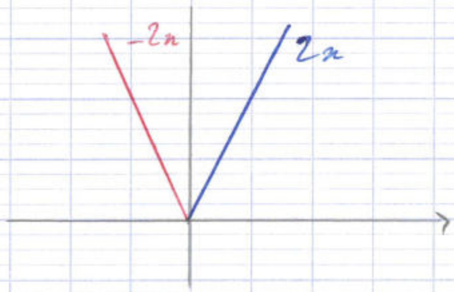
On a $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Dessin



On a φ' est continue

CCL : $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Mais φ' n'est pas dérivable en 0

donc $\varphi \notin \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

CCL : $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Vocabulaire :

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, on dit que f est lisse (sur I)

3) . Soit $f : E \to F$

si $F \subset \mathbb{R}$, on dira aussi que f est une fonction

. Néanmoins, officiellement, une fonction est une application.

. Si $F \subset \mathbb{C}$, on dira que f est une fct. complexe

. Si $f, g : E \to \mathbb{R}$
et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit :

. $f+g : E \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto f(x) + g(x)$

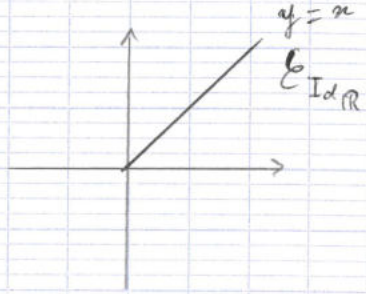
. de m̂, $f \times g : E \to \mathbb{R}$

. et $\lambda f : E \to \mathbb{R}$

4) Une notation

L'application $f : E \to F$ pourra aussi ê notée $f(\cdot)$

d) Application identité



C'est $Id_E : E \to E$
$\quad x \mapsto x$

e) Application constante

E et F des ensembles ; $F \neq \emptyset$; $a \in F$
On peut considérer : $E \to F$
$\quad x \mapsto a$

C'est l'applica° constante égale à a

Si le contexte est clair, on la note

"a tilde"

$$\tilde{a} : E \to F$$
$$x \mapsto a$$

F) Graphe d'une application

Déf : Soit $f : E \to F$

le graphe de f noté Γ_f ← gamma de f

est le sous-ensemble de $E \times F$

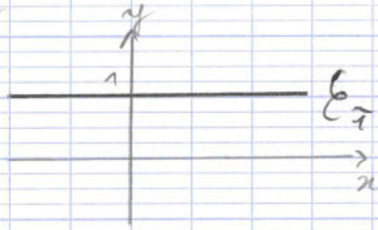
$$\Gamma_f := \left\{ (x,y) \in E \times F \,\middle|\, y = f(x) \right\}$$

$$\text{ie } \Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) \,\middle|\, x \in E \right\}$$

. Si $E, F \subset \mathbb{R}$, on notera $\mathcal{E}_f := \Gamma_f$

Rq : On a $\Gamma_f \subset E \times F$

ex : $\mathcal{E}_{\tilde{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$



2) Fonctions indicatrices

Déf : E ens. ; $A \subset E$

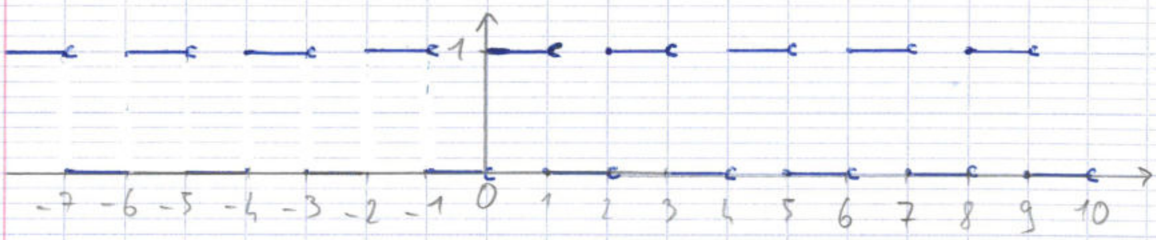
La fct indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$ est la fct définie par :

$$\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Exemple :

On considère $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n ; 2n+1[$

Dessinons $\mathcal{C}_{\mathbb{1}_A}$



Prop : E. ens, $A, B \subset E$. on a :

1) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = \tilde{1} - \mathbb{1}_A$

2) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

3) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

Démo :

1) Q C'est une V. assertion

Mq $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$

Soit $x \in E$

On distingue 2 cas

1er cas : si $x \in A$

On a $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 0$

On a $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$

2ème cas : si $x \notin A$

On a $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 1$

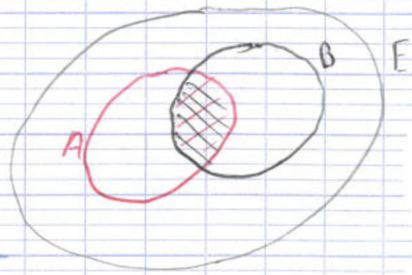
On a $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$

Dans tous les cas, $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$

On a bien $\mathbb{1}_{\bar{A}} = \bar{1} - \mathbb{1}_A$

2) Soit $x \in E$

On distingue 4 cas



	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x)$
$x \in A$, $x \in B$	1	1	1	1
$x \in A$, $x \notin B$	1	0	0	0
$x \in B$, $x \notin A$	0	1	0	0
$x \notin B$, $x \notin A$	0	0	0	0

Donc, $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = (\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B)(x)$

3) $1^{ère}$ démo : par disjonction de cas

$2^{ème}$ démo : (plus conceptuelle)

On a

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_{\overline{\overline{A\cup B}}} = \mathbb{1}_{\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}}$$

$$\overset{1)}{=} \tilde{1} - \mathbb{1}_{\bar{A}\cap\bar{B}}$$

$$\overset{2)}{=} \tilde{1} - \mathbb{1}_{\bar{A}}\,\mathbb{1}_{\bar{B}}$$

$$\overset{1)}{=} \tilde{1} - (\tilde{1} - \mathbb{1}_A)(\tilde{1} - \mathbb{1}_B)$$

$$= \tilde{1} - (\tilde{1} - \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)$$

$$= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$$

3) Restriction et corestriction

Déf : Soit $f : E \to F$

a) Soit $A \subset E$
la restriction de f à A, notée $f|_A$, est l'application définie par :

$$f|_A : A \to F$$
$$x \mapsto f(x)$$

b) Soit $B \subset F$ tq $\forall x \in E\ \ f(x) \in B$
la corestriction de f à B, notée $f|^B$, est l'appli. définie par :

$$f|^B : E \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

A retenir : $f : E \to F$ et $A \subset E$
alors :
$$\forall x \in A, f(x) = f|_A(x)$$

Exemple :

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

On peut corestreindre f à $\mathbb{R}_+$

. On peut considérer $f|_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}$

On ne peut pas considérer $f|^{\mathbb{N}}|_{\mathbb{Z}}$

. On a $\exp_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{R}} = \exp$

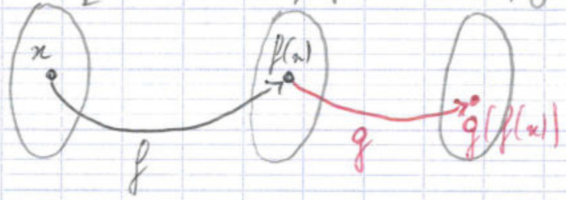
4) Composition

Soient E, F, G des ensembles
On se place dans la situation :
$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$
ie soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

Déf : La composée de f par g, notée $g \circ f$ et lue "g rond f" ou "f puis g" est l'app. définie par :

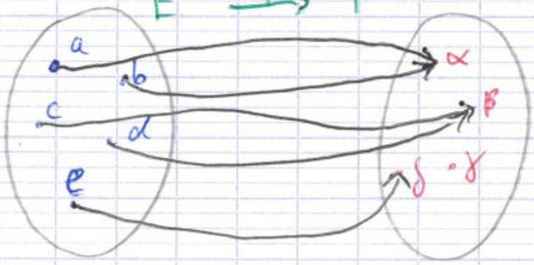
$$g \circ f : E \to G$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Schéma : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

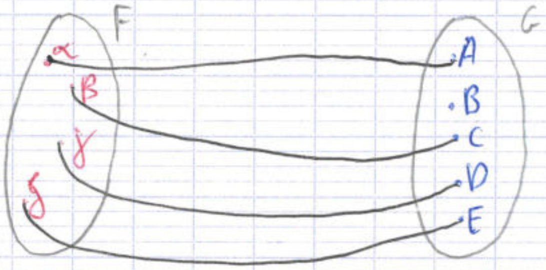


Exemple : On considère

$E \xrightarrow{f} F$

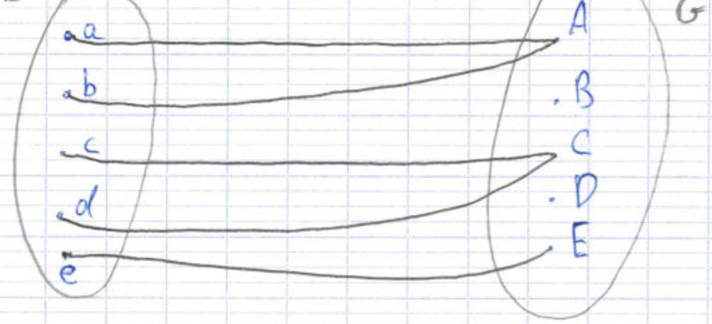


et $F \xrightarrow{g} G$



? Dessiner $g \circ f$

$E \xrightarrow{g\circ f} G$



⚠ on a bien $g \circ f : E \to G$

Complément : ordre de priorité

1) Travailler le cours
   avec papier + crayon ; en passes courtes et successives
   !! en parallèle avec des exercices
2) Chercher des exercices
   passer au moins 10'/15' par exo cherché
3) DM
4) Reprise des exos

Prop : la composition est "associative"
ie dans la situation : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$
on a $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$

Corollaire : le parenthésage n'a pas d'incidence sur le résultat. On peut noter $h\circ g\circ f$

démo : exo

Rq : On a défini
$$\mathcal{F}(E,F)\times\mathcal{F}(F,G) \to \mathcal{F}(E,G)$$
$$(f,g) \longmapsto g\circ f$$

Prop : Les identités sont des "neutres" pour la composition
Soit $f : E\to F$. On a :
1) $Id_F\circ f = f$

2) $f\circ Id_E = f$

démo : exo

5) Diagrammes

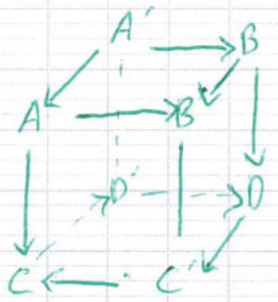
Un diagramme d'ensembles est la donnée d'ensembles E_i et d'applications entre certains de ces ensembles.

Ex :

- $E \xrightarrow{f} F$

-
$$\begin{tikzcd} & & G \\ E \arrow[r, "f"] & F \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"] & \\ & & H \end{tikzcd}$$

-
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] & F \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dl, "f"] & H \\ & L \arrow[ul, "\varepsilon"] & & \end{tikzcd}$$

- 

On dit qu'un diagramme est commutatif ssi les différents chemins de composition ayant même origine et même but sont égaux

Ex :

-
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & F \arrow[d, "\beta"] \\ E' \arrow[r, "g"] & F' \end{tikzcd}$$
est commutatif ssi $\beta \circ f = f \circ \alpha$

- les diagrammes :
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] \arrow[rr, bend right, "Id_{\mathbb{R}}"'] & \mathbb{R}_+^* \arrow[r, "\ln"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

et
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_+^* \arrow[r, "\ln"] \arrow[rr, bend right, "Id_{\mathbb{R}_+^*}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] & \mathbb{R}_+^* \end{tikzcd}$$
sont commutatifs

Ie : $\exp \circ \ln = Id_{\mathbb{R}_+^*}$ et $\ln \circ \exp = Id_{\mathbb{R}}$

Ie : $\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x \\ \text{et } \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\ln(a)) = a \end{array}}$

Rq : ⚠ Certes la composée $E \xrightarrow{\tilde{a}} F \xrightarrow{\varphi} G$ ne dépend que de $\varphi(a)$

Ie : les valeurs de φ sur $F \setminus \{a\}$ n'interviennent pas ds le calcul de $\varphi \circ \tilde{a}$. Cependant φ doit être définie sur F tout entier.

6) Applications de E dans E

Soit $f : E \to E$

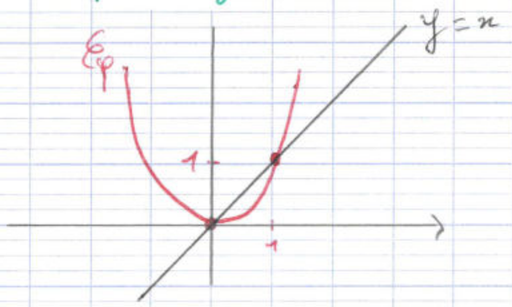
a) points fixes

Déf : Soit $a \in E$

on dit que a est un pt fixe de f ssi $f(a) = a$

ex : on note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

alors les pts fixes de φ correspondent aux intersections entre $\mathcal{C}_\varphi$ et $y = x$



Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(x) = x \iff \varphi(x) = Id_{\mathbb{R}}(x)$$
$$\iff \mathcal{C}_\varphi \cap \mathcal{C}_{Id_{\mathbb{R}}} \text{ contient un pt d'abcisse } x$$

De plus on a

$$\varphi(x) = x \iff x^2 = x$$
$$\iff x(x-1) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

b) Parties stables et applications induites !!

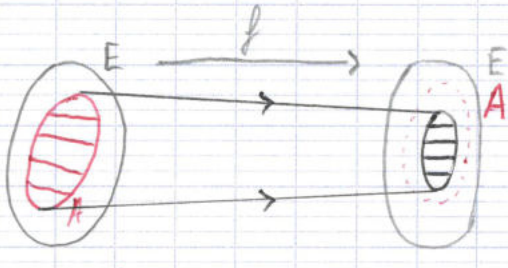
Déf : Soit $A \subset E$

. On dit que A est stable par F $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$\forall x \in A, f(x) \in A$

. L'application $f|_A$ peut alors être corestreinte à A.
On note $f||_A := f|_A^{|A}$

. L'application $f||_A$ est appellée l'application induite par f de A dans A

Dessin



qui induit :

l'induite de f sur A

Ex : on note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$

Parmi les parties suivantes, lesquelles sont stables par φ ?

- $\mathbb{R}_+$ oui
- $\emptyset$ oui
- $[1 ; +\infty[$ oui
- $]-\infty ; -1]$ non
- $]1 ; +\infty[$ oui
- $[\frac{1}{2} ; +\infty[$ non $(\varphi(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}$
- $\mathbb{Z}$ oui
- $\mathbb{N}$ oui

c) Composées itérées

On a $f : E \to E$

On peut composer f avec elle-m̂ : $\underbrace{E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E}_{f \circ f}$

Notations :

- on note $f^0 := Id_E$
- si $p \in \mathbb{N}$, on note $f^{p+1} := f^p \circ f$

Concrètement, $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$

Prop : $n, m \in \mathbb{N}$

On a $f^n \circ f^m = f^m \circ f^n = f^{n+m}$

⚠ Cette notation est ambigue, Par exemple, $\sin^2$ n'est pas du tout $\sin \circ \sin$!

C'est : $\varphi \circ \sin$ où $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$

$\sin^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\qquad y \mapsto \sin(y) \times \sin(y)$

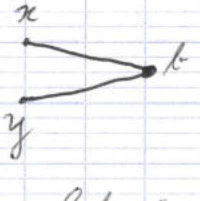
~~" $\forall y \in \mathbb{R}$, $\sin(y) \times \sin(y) = \sin(\sin(y))$~~ est <u>FAAUX</u>

. En général, on réserve la notation f^n aux applications qui ne sont pas des "fonctions"
. On pourra noter f^{on}

II, !! Injections, surjections, bijections

1) Injections

<u>Déf</u>: Soit $f : E \to F$
On dit que f est injective ssi
$\forall x, x' \in E$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
Ie : f prend des valeurs distinctes
Reformulation, par contraposition :
$\forall x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Ie : la situation 

est impossible pr une fct injective

<u>Ex</u> : on note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\qquad x \mapsto x^2$
φ n'est pas injective car $\varphi(1) = \varphi(-1)$ et $1 \neq -1$

mais $\varphi_{/\mathbb{R}_+}$ est injective

$\underline{\text{Rq}}$: On note $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

alors : 1) f est injective

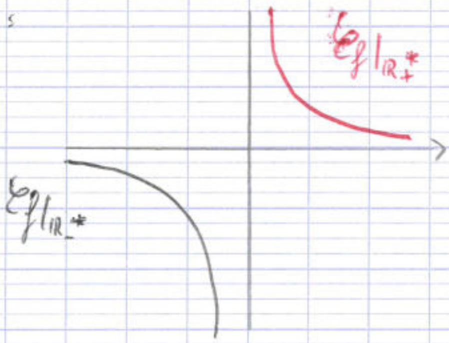
démo : Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(x) = f(y)$

On a $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, donc on a $x = y$

(canevas d'une $\forall$-asser° pour la contraposée)

2) $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ ↘↘ 3) $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ ↘↘

dessin :



4) Mais ⚠ f n'est pas ↘

on cherche $x, y \in \mathbb{R}^*$ tq

$x \leq y$ mais $f(x) \not\geq f(y)$

ie $x \leq y$ et $f(x) \leq f(y)$

on prend $x := -1$ et $y := 1$

5) Morale

On ne considèrera les fcts monotones que sur des intervalles

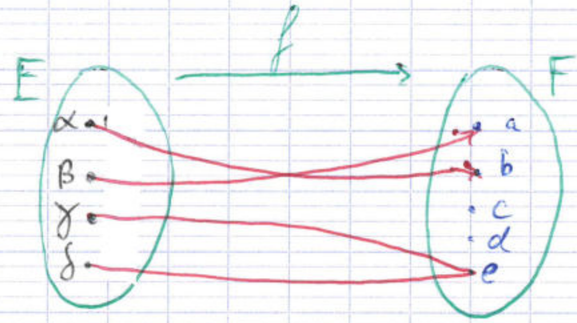
6) Rq !* : la fct $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ est continue

démo de 6)

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ avec $A \subset \mathbb{R}$. On dit que f est continue $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in]a-\eta ; a+\eta[, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Par le dessin, on vérifie l'assertion ci-dessus pr la fct sur $\mathbb{R}^*$

• 

donc f n'est pas injective car $f(\gamma) = f(\delta) = e$ et $\gamma \neq \delta$

Prop : On se place dans la situation

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

alors on a :

1) $\left.\begin{array}{l} f \text{ inj} \\ g \text{ inj} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ injective

2) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

Démo : canevas de preuve

1) Osq f inj et g inj
Mq $g \circ f$ injective
ie mq $\forall x, x' \in E$, $g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$

Soient $x, x' \in E$ tq $g \circ f(x) = g \circ f(x')$

Mq $x = x'$

On a $g \circ f(x) = g \circ f(x')$

ie on a $g(f(x)) = g(f(x'))$

or g est injective

donc $f(x) = f(x')$

Or f est injective

donc $x = x'$

On a bien $x = x'$

Donc, on a mq $\forall x, x' \in E,\ g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$

CCL: $\left.\begin{array}{l} f \text{ inj} \\ g \text{ inj} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ inj}$

2) Rq : la forme contraposée est + adéquate

Mq $g \circ f$ inj $\Rightarrow f$ inj

Osq $g \circ f$ inj

Mq f inj

ie mq $\forall x, x' \in E,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Soient $x, x' \in E$ tq $x \neq x'$

Mq $f(x) \neq f(x')$

On a $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ car $g \circ f$ inj.

donc $g(f(x)) \neq g(f(x'))$

On raisonne par l'absurde

Supposons $f(x) = f(x')$

On aurait $g(f(x)) = g(f(x'))$: c'est absurde

Donc $f(x) \neq f(x')$

Donc $\forall x, x' \in E,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

d'où $g \circ f$ inj $\Rightarrow f$ inj.

Rq : ⚠ si $g \circ f$ existe, cela n'implique pas que $f \circ g$ existe !

ex : $\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{-1}} \mathbb{R}$

mais $\ln \circ (\tilde{-1})$ n'a aucun sens car

$\text{codom}(\tilde{-1}) \subset \text{dom}(\ln)$

Pour composer f par g, il faut que f prenne ses valeurs ds le domaine de g

contre-ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

On a $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ si $x \in \mathbb{R}$

donc $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ n'est pas injective

et $f \circ g(x) = (\sqrt{y})^2 = y$ si $y \geq 0$

donc $f \circ g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $y \mapsto y$

ie $f \circ g = Id_{\mathbb{R}_+}$

Or, I_{D_E} est tjrs injective

donc $f \circ g$ est injective

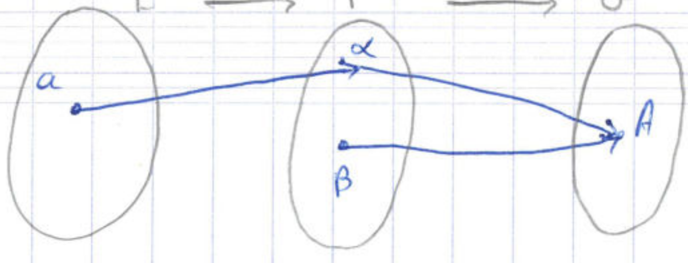
Bilan : . $f : E \to F$ et $g : F \to E$

. $f \circ g = Id_F$ donc est inj

. $g \circ f \neq Id_E$, et pire, n'est pas injective

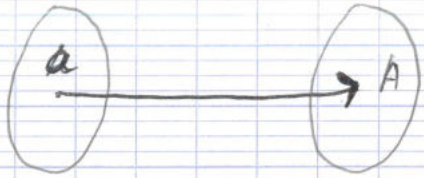
contre-exemple : ⚠ $g \circ f$ injective $\not\Rightarrow$ g injective

On considère $E \longrightarrow F \longrightarrow G$



On a :

$E \xrightarrow{g \circ f} G$ qui est injective



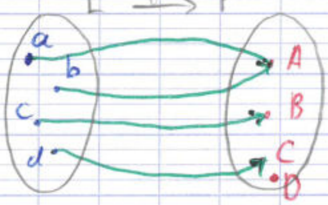
2) Surjectivité

Déf : On dit que f est surjective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

Ie : tous les éléments de F sont atteints par f

ex : • $E \xrightarrow{f} F$



f n'est ni injective, ni surjective

- la fonction $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective car (-1) n'est pas une racine carrée
- On note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$: φ n'est pas surjective

  mais $\varphi|^{\mathbb{R}_+}$ est surjective
- I_{D_E} est toujours <u>injective</u> et <u>surjective</u>

Prop : On se place dans le diagramme :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On a :

1) $\left.\begin{array}{l} f \text{ surj} \\ g \text{ surj} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ surjective

2) $g \circ f$ surj $\Rightarrow g$ surj.

Démo :

1) Osq f surj et g surj
Mq $g \circ f$ est surjective
Soit $y \in G$
On cherche un $x \in E$ tq $(g \circ f)(x) = y$
On sait que g est surjective
Soit donc $t \in F$ tq $g(t) = y$
On sait que f est surjective
Soit donc $x \in E$ tq $t = f(x)$
On a : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(t) = y$
Ainsi $g \circ f$ est bien surjective

Schéma : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

$$x \xleftarrow{2)} t \xleftarrow{1)} y$$

2) Osq $g \circ f$ surj.
Mq g est surj.
Soit $y \in G$
On cherche $t \in F$ tq $y = g(t)$
On sait que $g \circ f$ est surj.

Soit donc $x \in E$ tq $y = (g \circ f)(x)$

on pose $t := f(x)$

On a :

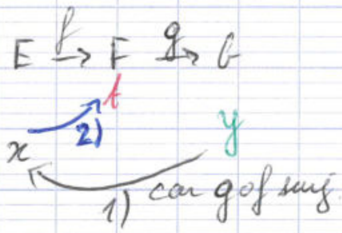
. $t \in F$

. $g(t) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = y$

donc $\exists t \in F : y = g(t)$

donc g est surjective

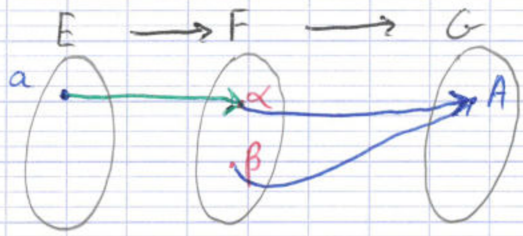
Schéma :



contre-ex :

$g \circ f$ surj $\not\Rightarrow f$ surj

On considère :



On a

donc, $g \circ f$ surj et f n'est pas surj.

Rq : $\left.\begin{array}{l} g \circ f \text{ surj} \\ g \text{ inj} \end{array}\right\} f$ surj.

On a toujours $E \xrightarrow{f} F$

3) Bijections

Déf : On dit que f est bijective ssi f est injective et f est surjective

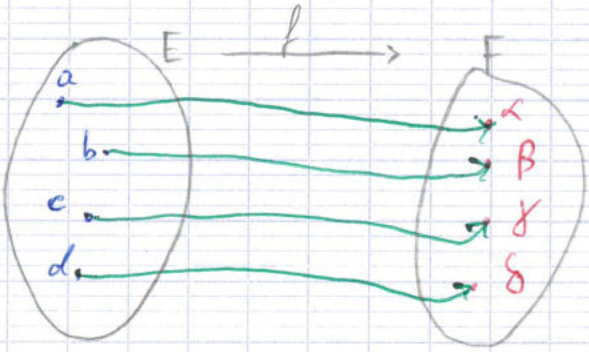
Rq : On a f bijective

$$\Updownarrow$$

$$\forall y \in F, \exists!\, x \in E ;\ y = f(x)$$

démo : exo

Exemples :

- Id_E est bijective
- 

  f est bijective

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective
- la f° $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective (et lisse) → infiniment dérivable

  $x \mapsto x^3$

Rq ! : Soient E, F des ens. finis
Soit $f : E \to F$
alors on a (démo + loin)
1) f injective $\Rightarrow |E| \leq |F|$
2) f surjective $\Rightarrow |F| \leq |E|$

3) f bijective $\Rightarrow |E| = |F|$

? Mq que les réciproques de 1), 2), 3) st fausses

Prop :

$\left.\begin{array}{l} f \text{ bij} \\ g \text{ bij} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ bijective

Démo :

Osq f, g injective

- Mq $g \circ f$ injective

Comme f, g bij, on a $g \circ f$ bij

Ĉ f, g surj, on a $g \circ f$ surj

CCL : $g \circ f$ est inj et surj, elle est bij

Rq : $g \circ f$ bij $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ inj} \\ g \text{ surj} \end{cases}$

4) Réciproque d'une application

On considère $f : E \to F$

Déf : Soit $g : F \to E$

On dit que g est réciproque à f ssi

1) $g \circ f = Id_E$
2) $f \circ g = Id_F$

Rq : on se place ds le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] & F \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

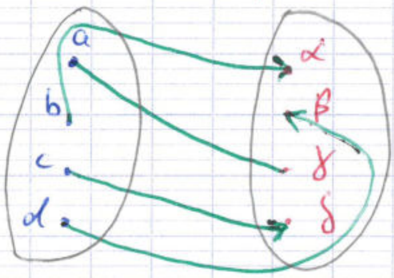
alors, on a :

g réciproque à f $\Leftrightarrow$ f réciproque à g

ex :

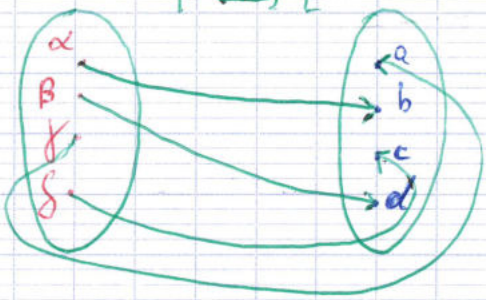
- On considère :

$E \xrightarrow{f} F$



On cherche $g : F \to E$ réciproque à f

On pose : $F \xrightarrow{g} E$



Ici f et g sont réciproques l'une de l'autre

- $$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_+^* \arrow[r, bend left, "\ln"] & \mathbb{R} \arrow[l, bend left, "\exp"] \end{tikzcd}$$

ln et exp st rcp l'une de l'autre

- $$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^* \arrow[r, bend left, "x \mapsto 1/x"] \arrow[r] & \mathbb{R}^* \arrow[l, bend left, "x \mapsto \frac{1}{x}"] \end{tikzcd}$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est sa propre réciproque

. Id_E est sa propre réciproque

. On considère $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto x^2$

on calcule $f\circ f(x) = (x^2)^2 = x^4 \neq x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

ainsi f n'est pas sa propre réciproque

. les f^o $\mathbb{R} \underset{x \longmapsto x-a}{\overset{x \longmapsto x+a}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$ st réq l'une de l'autre

. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est sa propre réq
$x \longmapsto -x$

. les f^o $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto x^2$ $\quad$ $x \longmapsto \sqrt{x}$

sont réqq l'1 de l'autre

. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est sa propre réciproque
$z \longmapsto \bar{z}$

. Soit E un ens.
On considère $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$
$A \to E \setminus A$

alors on a :
$\forall A \subset E, \ \varphi(\varphi(A)) = \varphi(\bar{A}) = \bar{\bar{A}} = A$
$= Id_{\mathcal{P}(E)}(A)$

donc φ est sa propre réq.

Prop : Soit $f : E \to F$ et soient $g, g' : F \to E$ telles que g est réciproque à f et g' est réciproque à f
alors $g = g'$

Démo :
On a $g \circ f = Id_E$
On compose à droite par g'
On obtient $\underbrace{(g \circ f) \circ g'}_{g \circ (f \circ g')} = \underbrace{Id_E \circ g'}_{g'}$

Or $f \circ g' = Id_F$ car g' est réc à f
donc, $(g \circ f) \circ g' = g \circ Id_F = g$
CCL : $g = g'$
Ainsi, on pourra parler, si elle existe de la réciproque

5) Bijections réciproques

1) Définition

a) Théorème / déf :
Soit $f : E \to F$
1) Alors, on a :
f bij $\iff \exists g : F \to E$: g réciproque à $f \iff f$ admet une réc

2) a) de plus dans ce cas, l'appli. g est unique
b) cette unique réc à f est notée f^{-1} et est appelée bijection réc de f
On a $f^{-1} : F \to E$

Démo :

1) $\Leftarrow$

Osq $\exists g : F \to E$: g réc àf

Fixons une telle appli

. On a $g \circ f = Id_E$

et Id_E est inj donc f inj.

. On a $f \circ g = Id_F$

et Id_F est surj donc f est surj.

Bilan : f est bij

$\Rightarrow$

Osq f bij

On sait que $\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$

Pour $y \in F$, on note $\alpha_y \in E$ cet uniq antécédent de y par f.

On pose $g : F \to E$

$y \mapsto \alpha_y$

. Mq $f \circ g = Id_F$

Soit $y \in F$

On a par déf de α_y : $f(\alpha_y) = y$ (α_y est l'antécédent)

ie $f(g(y)) = y$ ie $(f \circ g)(y) = y$

Ainsi, $\forall y \in F$, $(f \circ g)(y) = y = Id_F(y)$

Ie : $f \circ g = Id_F$

• Mq $g \circ f = Id_E$

On sait que $\forall y \in F, \ f(\alpha_y) = y \quad (*)$

Soit $x \in E$

On particularise $(*)$ en $y := f(x) \in F$

On obtient :

$f(\alpha_{f(x)}) = f(x)$

Or, f est injective

donc $\underline{\alpha_{f(x)} = x}$

de plus, $g(f(x)) = \alpha_{f(x)}$ par déf de g

Ainsi $\underline{g(f(x)) = x}$, et ce pour tout $x \in E$

donc $\underline{g \circ f = Id_E}$

2) a) déjà fait

b) rien à démontrer

<u>Rq ⚠</u> : Pour que g soit rcq à f, il faut les <u>2</u> conditions.
Ce n'est pas pck on en a une qu'on a les deux

ie :

contre_ex :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "f : x \mapsto x^2"] & \mathbb{R}_+ \arrow[l, bend left, "g : y \mapsto \sqrt{y}"] \end{tikzcd}$$

On a :

. si $x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$

donc $g \circ f = |\cdot|$

. si $y \in \mathbb{R}_+$, on a $f(g(y)) = \sqrt{y}^2 = y$

donc $f \circ g = Id_{\mathbb{R}_+}$

ie : $f \circ g = Id_F \not\Rightarrow g \circ f = Id_E$

(?) Trouver un contre-ex ds le cas $E = F$

Rq : Si f est sa propre réciproque, on dit que f est une <u>involution</u> ($f : E \to E$) et c'est une <u>bijection</u>

ex : $Id_E = Id_E \circ Id_E$

<u>Involution</u> : $f : E \to E$ tq $f \circ f = Id_E$ ie $f^{-1} = f$

On a $(Id_E)^{-1} = Id_E$

<u>Corollaire</u> : Soit $f : E \to F$ une bijection alors :

- 1) $f^{-1} \circ f = Id_E$
- 2) $f \circ f^{-1} = Id_F$

On dispose de deux nouveaux réflexes

a) si $f : E \to F$ est bijective automatiquement, je dispose de f^{-1}

b) on a $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$

Corollaire :

Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors :

1) $f^{-1} : F \to E$ est bij.

2) La bij. réciproque de f^{-1} est f

Ie, on a $(f^{-1})^{-1} = f$ Réflexe

Rq : si f est bij alors :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[loop left, "Id_E"] \arrow[r, bend left, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[loop right, "Id_F"] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Exemples :

· $\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "\exp"] & \mathbb{R}_+^* \arrow[l, bend left, "\ln"] \end{tikzcd}$ c'est un couple de bij réciproques

ie $\exp^{-1} = \ln$ et $\ln^{-1} = \exp$.

b) Bijection réciproque et composiΘ

Prop : On considère $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

avec f et g bijectives. alors on a :

1) $g \circ f$ est bij
2) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⚠ On inverse f et g, et on inverse l'ordre de composition.

Ie : $\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend left=60, "g \circ f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[r, bend left, "g"] & G \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \arrow[ll, bend left=60, "(g \circ f)^{-1}"] \end{tikzcd}$ est commutatif

Démo :

1) ok
2) Vérifions que $f^{-1} \circ g^{-1}$ est réciproque à $g \circ f$

. On a :

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \underbrace{(f \circ f^{-1})}_{Id_F \text{ par déf de } f^{-1}} \circ g^{-1}$$

$$= g \circ \underbrace{Id_F \circ g^{-1}}_{g^{-1} \text{ par propriété}} = g \circ g^{-1} \underset{\text{par déf de } g^{-1}}{=} Id_G$$

. De m̂, on calcule

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$$
$$= f^{-1} \circ Id_F \circ f$$
$$= f^{-1} \circ f$$
$$= Id_E$$

Ainsi, $f^{-1} \circ g^{-1}$ est réc à $g \circ f$
donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

III. Images réc et images directes

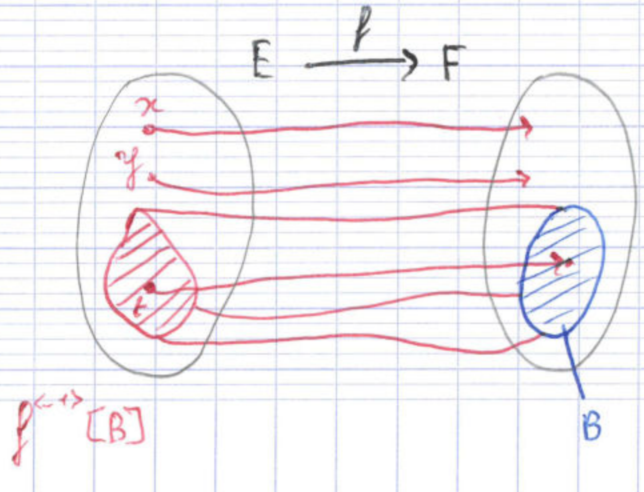
1) Image réciproque

a) Définition

Déf : Soit $f : E \to F$
Soit $B \subset F$ une partie de F
l'image réc de B par f, notée $f^{<-1>}[B]$ est la partie de E définie par :

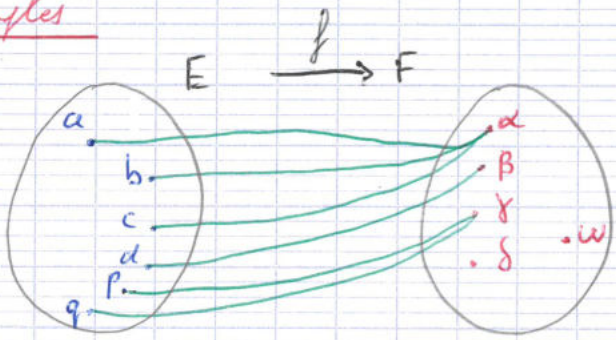
$$f^{<-1>}[B] = \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) \in B \right\}$$

Dessin



On dit que $f^{\langle -1 \rangle}[B]$ est le tiré-en-arrière de B par f ("pull-back")

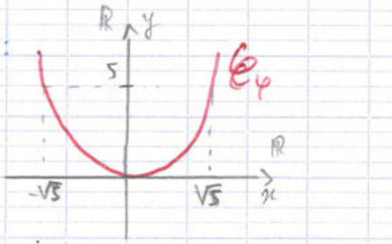
b) Exemples

- 

Calculons :

- $f^{\langle -1 \rangle}[\{\alpha, \beta\}] = \{a, b, c, d\}$
- $f^{\langle -1 \rangle}[\{\alpha\}] = \{a, b, c\}$
- $f^{\langle -1 \rangle}[\{\gamma, \delta, \omega\}] = \{p, q\}$
- $f^{\langle -1 \rangle}[\{\omega\}] = \emptyset$
- $f^{\langle -1 \rangle}[F] = E$
- $f^{\langle -1 \rangle}[\emptyset] = \emptyset$
- On considère : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

On a :



On a : . $f^{-1}[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$

. $f^{-1}[[0,5]] = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

<u>Démo :</u> On procède par équivalence

Soit $x \in \mathbb{R}$

On dit $x \in f^{-1}[[0,5]] \iff f(x) \in [0,5]$

Réflexe

$\iff 0 \leqslant f(x) \leqslant 5$

$\iff 0 \leqslant x^2 \leqslant 5$

$\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$ est strict. $\nearrow$ donc : $\iff \sqrt{0} \leqslant \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{5}$

$\iff 0 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{5}$

$\iff -\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$

$x \in f^{-1}[[0,5]] \iff x \in [-\sqrt{5} ; \sqrt{5}]$

ie : $f^{<-1>}[[0,5]] = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

. $f^{<-1>}[[-1;0]] = \{0\}$

c) Questions naturelles ($f : E \to F$)

On dispose désormais d'une application :

$$f^{<-1>}[\cdot] : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$$
$$B \longmapsto f^{<-1>}[B]$$

. $f^{<-1>}[\cdot]$ est-elle inj, surj, bij ?

. si f est inj ou surj, a-t-on des conséquences sur $f^{<-1>}[\cdot]$?

. a-t-on $f^{<-1>}[B \cup B'] = f^{<-1>}[B] \cup f^{<-1>}[B']$?

. idem avec $B \cap B'$?

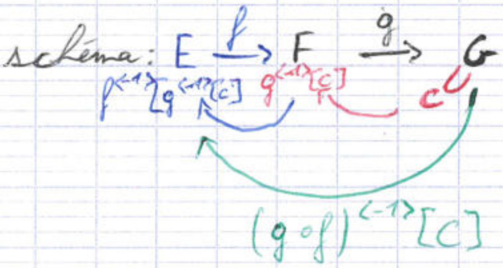
. a-t-on $f^{<-1>}[\overline{B}] = \overline{f^{<-1>}[B]}$?

. $f^{<-1>}[F] = E$? oui.

- $f^{\langle -1\rangle}[\emptyset] = \emptyset$? oui
- a-t-on $B \subset B' \Rightarrow f^{\langle -1\rangle}[B] \subset f^{\langle -1\rangle}[B']$?
- On se place dans $\underbrace{E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G}_{g\circ f}$ et $C \subset G$

On dispose de $(g\circ f)^{\langle -1\rangle}[C] \subset E$
et de $g^{\langle -1\rangle}[C] \subset F$
et donc de $f^{\langle -1\rangle}[g^{\langle -1\rangle}[C]] \subset E$

schéma:



A-t-on $(g\circ f)^{\langle -1\rangle}[C] = f^{\langle -1\rangle}\left[g^{\langle -1\rangle}[C]\right]$?

2) Images directes

a) Définition

Définition: Soit $f : E \to F$
Soit $A \subset E$
L'image directe de A par f, notée $f[A]$, est la partie de F définie par :

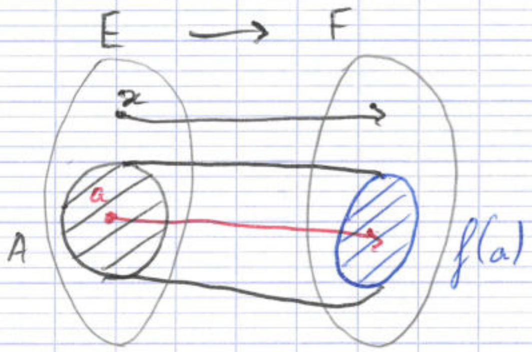
$$f[A] := \{ f(a) \mid a \in A \}$$

l'ens. des $f(a)$ pour a parcourant A

Rq : on peut aussi écrire :

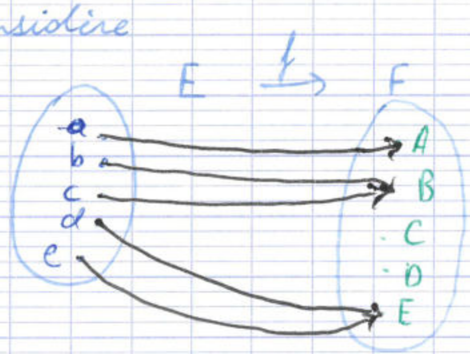
$$f[A] = \left\{ y \in F \;\middle|\; \exists a \in A : y = f(a) \right\}$$

Dessin :



b) Exemples

On considère



On a :

- $f[\{a,b\}] = \{A, B\}$
- $f[\{b\}] = \{B\}$
- $f[\{c\}] = \{B\}$
- $f[E] = \{A, B, E\} = F \setminus \{C, D\}$
- $f[\{a,d\}] = \{A, E\}$
- $f[\emptyset] = \emptyset$

$f[A]$ est aussi appelé le "poussé-en-avant" ("push-forward") de A par f

. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

On a . $\varphi[\mathbb{R}] = \mathbb{R}_+$
. $\varphi[\emptyset] = \emptyset$
. $\varphi[\mathbb{R}_-] = \mathbb{R}_+$
. $\varphi[[-2,5]] = [0, 25]$ et non $[4, 25]$

c) Image directe et surjectivité

Fait : $f : E \to F$ alors
f surj $\Leftrightarrow f[E] = F$

d) Image directe et parties stables

Fait : $f : E \to E$, $A \subset E$
A est stable par f $\Leftrightarrow f[A] \subset A$

e) questions

Questions analogues : $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\subsetneq$, $\circ$

⚠ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A := [2, +\infty[$
$x \mapsto x^2$

alors A est stable par f mais $f[A] = [4; +\infty[$
donc, on a :
. $f[A] \subset A$. $f[A] \neq A$
ie $f[A] \subsetneq A$
ie $f[A]$ est inclus strict^t dans A

« Tirés-en-arrière » et « Poussés-en-avant »

Catalogue de résultats

On considère le diagramme :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

Soient $A, A' \subset E$ et soient $B, B' \subset F$ et soit $C \subset G$. Enfin, soit $x \in E$.
On a :

Divers

$f^{\langle -1 \rangle}[\varnothing] = \varnothing$
$f^{\langle -1 \rangle}[F] = E$

Opérations

$f^{\langle -1 \rangle}[B \cup B'] = f^{\langle -1 \rangle}[B] \cup f^{\langle -1 \rangle}[B']$
$f^{\langle -1 \rangle}[B \cap B'] = f^{\langle -1 \rangle}[B] \cap f^{\langle -1 \rangle}[B']$

$f^{\langle -1 \rangle}\left[\overline{B}\right] = \overline{f^{\langle -1 \rangle}[B]}$

Croissance

$B \subset B' \implies f^{\langle -1 \rangle}[B] \subset f^{\langle -1 \rangle}[B']$

Composition

$(g \circ f)^{\langle -1 \rangle}[C] = f^{\langle -1 \rangle}\left[g^{\langle -1 \rangle}[C]\right]$

L'application « tiré-en-arrière »

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(F) &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ B &\longmapsto f^{\langle -1 \rangle}[B] \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective) ssi f est surjective (resp. injective).

Divers

$f[\varnothing] = \varnothing$
$f[E] \subset F$
$f\left[\{x\}\right] = \left\{f(x)\right\}$

Opérations

$f[A \cup A'] = f[A] \cup f[A']$
$f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A']$

$f\left[\overline{A}\right] \subset \overline{f[A]}$

Croissance

$A \subset A' \implies f[A] \subset f[A']$

Composition

$g \circ f[A] = g\left[f[A]\right]$

L'application « poussé-en-avant »

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \mathscr{P}(F) \\ A &\longmapsto f[A] \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective) ssi f est injective (resp. surjective).

« Tiré-en-arrière » puis « poussé-en-avant » (et *vice versa*)

$$f\left[f^{\langle -1 \rangle}[B]\right] \subset B \quad \text{et} \quad A \subset f^{\langle -1 \rangle}\left[f[A]\right]$$

3) Cas des bijections

Soit $f : E \to F$ bijective

On a donc :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Quel est le lien entre $f^{\langle -1 \rangle}[\cdot]$ et $(f^{-1})[\cdot]$?

Prop : Soit $f : E \to F$ bijective
Soit $B \subset F$
Alors $f^{\langle -1 \rangle}[B] = (f^{-1})[B]$

Démo : On procède par double-inclusion

- Mq $f^{\langle -1 \rangle}[B] \subset (f^{-1})[B]$

Soit $x \in f^{\langle -1 \rangle}[B]$
Mq $x \in (f^{-1})[B]$

! Réflexe de reformulation absolu

On a $f(x) \in B$
Notons ainsi $b := f(x)$
On a
$$\begin{aligned} f^{-1}(b) &= f^{-1}(f(x)) \\ &= (f^{-1} \circ f)x \\ &= x \end{aligned}$$

ie $x = f^{-1}(b)$
donc on a bien $x \in (f^{-1})\boxed{[B]}$ car $b \in B$

. Mq $(f^{-1})[B] \subset f^{<-1>}[B]$

Soit $x \in (f^{-1})[B]$

Mq $x \in f^{<-1>}[B]$

Réflexe de reformulation

$y \in \varphi[A]$

Réflexe Soit donc $a \in A$ tq $y = \varphi(a)$

Soit donc $b \in B$ tq $x = f^{-1}(b)$ $(*)$

On applique f à $(*)$. On obtient :

$f(x) = f(f^{-1}(b))$

ie $f(x) = b$ or $b \in B$

donc $f(x) \in B$

Réflexe ie $x \in f^{<-1>}[B]$

4) Remarque : à ne pas utiliser tout de suite.

. $f^{<-1>}[B]$ se note aussi $f^{<-1>}(B)$

ou $f^{-1}(B)$

. $f[A]$ est aussi noté $f(A)$