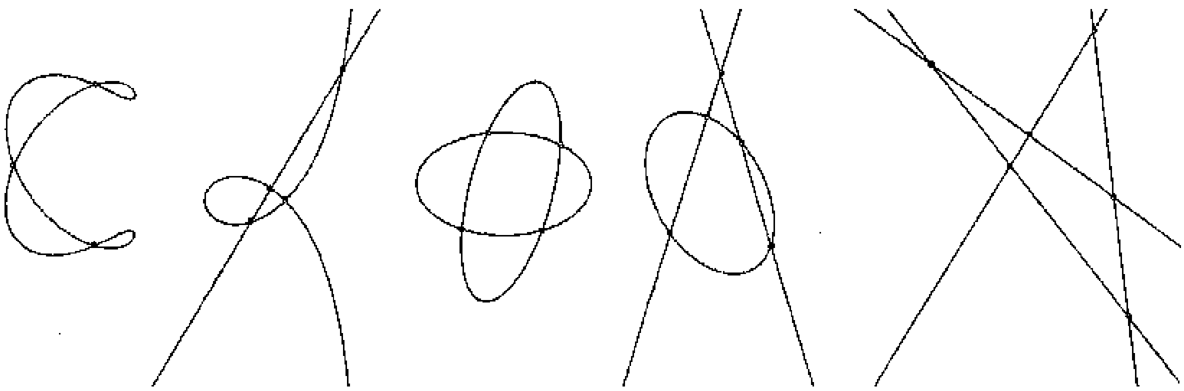
Chapitre 7

Polynômes



Exemples de courbes algébriques, définies par des polynômes

Polynômes

Les fonctions polynomiales sont les fonctions les plus simples qu'on puisse imaginer.

Dans l'ordre, on a d'abord les fonctions constantes, puis les fonctions affines, puis les fonctions polynomiales de degré 2 : ils correspondent aux expressions « a », « $aX+b$ » puis « aX^2+bX+c ». Ensuite, on a les fonctions polynomiales de degré 3, etc.

En général, on va étudier les expressions du type

$$\boxed{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0.}$$

Chapitre 7 : Polynômes

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

I, Présentation et définition

1) Exemples

Les expressions suivantes sont des polynômes.

- $X^2 - 2X + 8$
- $5X^3 + 3X - \frac{3}{2}$
- X
- $\frac{1}{2} + X$
- $\frac{1}{2} . X = \frac{X}{2}$
- -1
- 0
- $n \in \mathbb{N}$
  $1 + X + X^2 + X^3 + \dots + X^n$
- $\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$

Les polynômes sont en g^{al} notés P, Q, R, S, T, U, V, W, etc

Ex : "Notons $P : 3X^2 - 5X + 2$"

⚠ Quand on travaille avec les polynômes, on n'a pas besoin de dire "Soit X..." : il ne faut pas le dire.

Rq : On écrit : $P = 3X^2 - 5X + 2$ plutôt que :
$P(X) = 3X^2 - 5X + 2$

. Un polynôme n'est pas une fct de X
. C'est une "expression formelle en X"

2) Exemples de calculs

a) Addition

. $(3X^2+5X-8)+(2X-10) = 3X^2+7X-18$

. $(X^{2019}-1)-(X^{2018}+X^{2017}+1) = X^{2019}-X^{2018}-X^{2017}-2$

b) Multiplication

. $(1+X)(2+X) = X^2+3X+2$

. $(X-1)(X+1) = X^2-1$

. Soit $a \in \mathbb{R}$

$$(X+a)^3 = X^3+3aX^2+3a^2X+a^3$$

. $(1+2X+3X^2)(4+5X+6X^2) = 18X^4+27X^3+28X^2+13X+4$

. $(4+5X+6X^2)(1+2X+3X^2) = 18X^4+27X^3+28X^2+13X+4$

c) Scalairisation

. $5(2X^2-X-1) = 10X^2-5X-5$

. $-\left(X^5-\frac{3}{2}X^2+\sqrt{2}X+8\right) = -X^5+\frac{3}{2}X^2-\sqrt{2}X-8$

⚠ En revanche, on ne peut pas diviser par un polynôme ($\hat{m} \neq 0$)

On n'écrira pas $\frac{5X^2-3X+2}{13X^7-9X^3+8}$ (pour les MPSI)

Exemple-bilan :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$(X-1)\sum_{i=0}^{n} X^i = (X-1)(1+X+\dots+X^n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} X^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} X^i$$

$$\underset{l=i+1}{=} \sum_{l=1}^{n+1} X^l - \sum_{i=0}^{n} X^i$$

$l : 1 \to n+1$

$i : 0 \to n$ $\quad [\![1,n]\!]$ est le dom. de Σ commun.

$$= \sum_{l=1}^{n} X^l + X^{n+1} - \left(1 + \sum_{i=1}^{n} X^i\right)$$

$$= X^{n+1} - 1$$

Fait : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(X-1)(1+X+\dots+X^n) = (X-1)\sum_{i=0}^{n} X^i = X^{n+1}-1$$

Rq : On aurait pu aussi voir que c'est une Σ télescopique et écrire

$$\sum_{i=0}^{n} X^{i+1} - X^i = X^{n+1} - X^0 = X^{n+1} - 1$$ car il s'agit d'une Σ télescopique.

3) Ensemble des polynômes

. L'ens. des polynômes à coeff. réels est noté $\mathbb{R}[X]$
. L'ens. des pol. à coeff. complexes est noté $\mathbb{C}[X]$
. Ds ce chap., on étudie $\mathbb{K}[X]$
. On définit de m̃ $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Z}[X]$

Exemples

. $(3-X)(5X^3-3/4\,X) \in \mathbb{R}[X]$

. $X^3+(5i-8)X^2+\dfrac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{1+5i}X-8 \quad \in \mathbb{C}[X]$

? Dvp $(X-j)(1+jX+j^2X)$ où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Bilan : On a : $\mathbb{R}[X]=\left\{a_0+a_1X+a_2X^2+\dots+a_nX^n \;\middle|\; \begin{array}{l} n\in\mathbb{N} \\ \text{et } (a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\end{array}\right\}$

de m̃ pour $\mathbb{C}[X]$

Fait : On a :

1) a) $\forall P,Q \in \mathbb{K}[X]$, $P+Q=Q+P$
b) $\forall P,Q,R\in \mathbb{K}[X]$, $(P+Q)+R = P+(Q+R)$

2) a) $\forall P,Q\in \mathbb{K}[X]$, $PQ=QP$
b) $\forall P,Q,R \in \mathbb{K}[X]$, $(PQ)R=P(QR)$

4) L'indéterminée

La lettre X représente un objet bien déterminé, fixé, qu'on a pas besoin de fixer ou de définir. On l'appelle l'indéterminée X. En qq sorte, il s'agit d'un "nom propre"

Exemple d'objets mathématiques "ayant un nom propre"

. π, e, $\ln(\cdot)$, $\exp(\cdot)$, i, $\sqrt{\cdot}$, $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$
. $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\emptyset$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$
. 1, 2, 0...
. X

5) Le polynôme nul

Par abus de notation, on le note encore 0
Sinon, on pourrait noter $0_{\mathbb{K}[X]}$

On a :
1) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P + 0 = 0 + P = P$
2) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P + (-P) = -P + P = 0$
3) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P \times 0 = 0 \times P = 0$

6) Définition !!

On admet l'existence d'un ens. noté $\mathbb{K}[X]$, dont les éléments sont appelés polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de 3 opérations:
a) une addition "$P + Q$"
b) une multiplication "$P \times Q$"
c) une scalairisation "$\lambda \cdot P$"

possédant un élément X appelé indéterminé et vérifiant :

Théorème / définition :

1) Tout polynôme P non nul s'écrit de manière unique

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$ où $n \in \mathbb{N}$, où les $a_k \in \mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$

2) . n est appelé le degré de P
. $a_0, \dots, a_n$ sont les coefficients de P
. a_n est le coeff. dominant de P
. a_0 est le coeff. constant de P
. $a_n X^n$ est appelé terme de + haut degré de P

3) Ie :
$\forall P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $\exists ! n \in \mathbb{N}$, $\exists ! (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$:

$$\begin{cases} P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ a_n \neq 0 \end{cases}$$

Rq : . Cela nous donne un réflexe : si $P \in \mathbb{K}[X]$ et si $P \neq 0$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$...

. On a $X^0 = 1$

Exemple : On prend $P = 40X^3 - 8X^2 + X - 10$
On a $n = 3$, $a_0 = -10$; $a_1 = 1$; $a_2 = -8$, $a_3 = 40$

Déf: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est unitaire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $P \neq 0$ et le coeff. dominant de P vaut 1

Application !! (modèle de rédaction)

" Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ (s'ils existent) tq $(aX^2+bX+c)(X-1) = 2X^3+4X^2-5X-1$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

On calcule — calcul annexe

$$
\begin{aligned}
(aX^2+bX+c)(X-1) &= (X-1)(aX^2+bX+c) \\
&= aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c \\
&= aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c
\end{aligned}
$$

Une "$\Leftrightarrow$" est tjrs précédée de "on a"

donc, on a :

$(aX^2+bX+c)(X-1) = 2X^3+4X^2-5X-1$

$\Leftrightarrow aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c = 2X^3+4X^2-5X-1$

$\Leftrightarrow$

Phrase-type : Par unicité de l'écriture dans la base canonique

$$
\begin{cases} a = 2 \\ b-a = 4 \\ c-b = -5 \\ -c = -1 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} a = 2 \\ b = 4+2 = 6 \\ c = -5+6 = 1 \\ c = 1 \end{cases}
$$

CCL : On a : $(X-1)(2X^2+6X+1) = 2X^3+4X^2-5X-1$

7) Exemples d'identités algébriques classiques

Prop: Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

1) $(X+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k X^{n-k}$

2) $X^n - 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ si $n \geq 1$

3) $X^n - a^n = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}$

4) Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

Démo : Déjà, on a 4) $\Rightarrow$ 1) on prend $\begin{cases} P := X \\ Q := a \end{cases}$

⚠ X est un polynôme

De même, 3) $\Rightarrow$ 2)

démo de 4) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P(n) : \text{"} (P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} \text{"}$$

Initialisation :

⚠ $\forall R \in \mathbb{K}[X], R^0 = 1$

...

Hérédité :

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ modèle de rédaction

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ est vraie. Mq $P(n+1)$ l'est.

On calcule

$$(P+Q)^{n+1} = (P+Q)^n (P+Q)$$

$$\overset{P(n)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}\right)(P+Q)$$

$= \ldots$ + relation de Pascal

■ 4)

démo de 3) On écrit :

$$(X-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} X^{k+1} - a^{n-k} X^k$$

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $P_k := a^{n-k} X^k$

On a donc:

$$(X-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1} - P_k = P_n - P_0 \text{ par télescopage}$$

$$= a^0 X^n - a^n X^0$$
$$= X^n - a^n \quad \blacksquare$$

8) Expression générale des coefficients du produit

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, Osq $P, Q \neq 0$

On écrit : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$Q = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell X^\ell$$

où $n, m \in \mathbb{N}$, où $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$ et $\forall \ell, b_\ell \in \mathbb{K}$ où $\begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_m \neq 0 \end{cases}$

alors, on a :

$$PQ = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell X^\ell\right)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) b_\ell X^\ell$$

$$= \sum_{\ell=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \underbrace{(b_\ell X^\ell)(a_k X^k)}_{a_k b_\ell X^\ell X^k = a_k b_\ell X^{\ell+k}}$$

$$PQ = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq \ell \leq m}} a_k b_\ell X^{k+\ell}$$

On voit que le terme de + haut degré de PQ est de degré $n+m$

On écrit $PQ = \sum_{i=0}^{n+m} c_i X^i$

où c_i est le coeff devant X^i de PQ.

On a, si $i \in [\![0, n+m]\!]$,

$$c_i = \sum_{k+\ell=i} a_k b_\ell$$

$$= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq \ell \leq m \\ k+\ell=i}} a_k b_\ell$$

__Exemple :__ On a :

$$(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)(b_0 + b_1 X)$$

$$= b_0 a_0 + b_0 a_1 X + b_0 a_2 X^2 + a_0 b_1 X + \underbrace{a_1 b_1}_{1+1} \underset{=2}{X^{2}} + \underbrace{a_2 b_1}_{+} \underset{=}{X^3}$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + (a_2 b_0 + a_1 b_1) X^2 + \underbrace{(a_2 b_1) X^3}_{= a_2 X^2 \times b_1 X},$$

__Fait :__
- Le coeff. constant de PQ est le produit des coeffs constants de P et Q
- Le terme de + haut degré de PQ est le produit des termes de + haut degré de P et de Q
- Le degré de PQ est la somme des degré de P et du degré de Q.
- Le coeff. dominant de PQ est le produit des coeff. dominants de P et de Q

II, Degré

1) Notation

Si $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on note $\deg(P)$ le degré de P
On a $\deg(P) \in \mathbb{N}$

<u>Déf:</u> Si $P = 0$ ou si $\deg P = 0$, on dit que P est un polynôme constant

2) Exemples

. $\deg(3X^2 - 8X + 1) = 2$
. $\deg(5X^{2019} - 5X^2) = 2019$
. $\deg(8) = 0$
. $\deg(5X - 1) = 1$

3) Degré du polynôme nul

Par convention, on pose $\deg(0) := -\infty$

4) Degré du produit

<u>Prop:</u>
$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

<u>démo:</u> . faite si $P, Q \neq 0$
. si $P = 0$, on a $PQ = 0$ donc $\deg(PQ) = -\infty$
Or, $\deg(P) + \deg(Q) = -\infty + \deg(Q) = \begin{cases} -\infty \text{ si } \deg Q \in \mathbb{N} \\ -\infty \text{ si } \deg Q = -\infty \end{cases}$

5) "Intégrité" de $\mathbb{K}[X]$

Prop: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors, on a :

1) $PQ = 0 \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0$

2) $\left.\begin{array}{l} P \neq 0 \\ Q \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \neq 0$

démo: 1) est la contraposée de 2)

2) On suppose $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. On a donc :
$\deg(P) \in \mathbb{N}$ et $\deg(Q) \in \mathbb{N}$
Or, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
Donc, $\deg(PQ) \in \mathbb{N}$, donc $PQ \neq 0$

Corollaire : ("Régularité" de $\mathbb{K}[X]$)

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ avec $R \neq 0$. alors on a :

1) $PR = QR \Rightarrow P = Q$

2) $RP = RQ \Rightarrow P = Q$

Démo: !! à retenir et à refaire

1) Osq $PR = QR$
On a donc $(P-Q)R = 0$
Or, $R \neq 0$. Or $\forall\, U, V \in \mathbb{K}[X]$, $UV = 0 \Rightarrow V = 0$ ou $V = 0$

donc $P - Q = 0$ ie $P = Q$

2) On a $RP = PR$ et $RQ = QR$
d'où le résultat

6) Degré de la somme

Prop : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors, on a :
$$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$$

démo :

. Si $P=0$ ou $Q=0$, la prop. est vraie
(en effet, $\forall a \in \mathbb{N}$, $\max(-\infty, a) = a$

. Osq $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

Réflexe : On écrit donc $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell X^\ell$

où $n := \deg(P)$ et $m := \deg(Q)$ et où les $a_k, b_\ell \in \mathbb{K}$
On a $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$
On suppose : $n \geqslant m$
donc, on a $\max(n, m) = \max(\deg(P), \deg(Q)) = n$

On complète l'écriture $Q = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell X^\ell$ par des zéros pour obtenir une somme allant jusqu'à n.
Ie on pose $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_n := 0$
Ie, on écrit $Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_m X^m + 0X^{m+1} + 0X^{m+2} + \dots + 0X^n$

On a donc : $P+Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$

Sur cette écriture, on voit que $\deg(P+Q) \leqslant n$

. si $m < n$

alors, on a $b_n = 0$ et $a_n + b_n = a_n + 0 = a_n \neq 0$

donc $\deg(P+Q) = n$

. si $m = n$ et $a_n \neq -b_n$

alors $a_n + b_n \neq 0$ et $\deg(P+Q) = n$

Rq : On a mq

1) $\deg P \neq \deg Q \Rightarrow \deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$

2) $\left.\begin{array}{l}\deg P = \deg Q \\ \text{coeff dom. } P \neq -\text{coeff dom. } Q\end{array}\right\} \Rightarrow \deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$

7) Espace $\mathbb{K}_n[X]$

Si $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathbb{K}_n[X] := \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \,\middle|\, \deg(P) \leq n \right\}$$

Fait :

$\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire $(+ ; \times ; \dots)$

Ie $\forall P, Q \in \mathbb{K}_n[X], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$

Ex : . $M_n(\mathbb{R})$ l'ens. des matrices carrées de taille n est stable par CL

. ⚠ l'ens des f° inj : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas stable par somme

contre exemple : $Id_{\mathbb{R}} + (-Id_{\mathbb{R}}) = \widehat{0}$

. $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle stable par CL

. $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ stable par CL

. $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ stable par CL ($p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$)
et on a
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{(\lambda f + \mu g)}_{\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})}{}^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

Ex : $\underbrace{1, X^1, X^2, \dots, X^n}_{n+1 \text{ élé}^t \text{ ds la liste}} \in \mathbb{K}_n[X]$

III, Evaluation des polynômes

1) Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$

1) Osq $P \neq 0$

Réflexe : on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n \in \mathbb{N}$, où $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$
et où $a_n \neq 0$

On appelle évaluation de P en α et on note $P(\alpha)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$P(\alpha) := \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

2) si $P = 0$, on pose
$P(\alpha) = 0$

Exemple :

On note $P := 4X^3 - 2X^2 + 5X - 1$
On a alors :

$P(\sqrt{2}) = 4 \times 2\sqrt{2} - 2 \times 2 + 5\sqrt{2} - 1 = 13\sqrt{2} - 5$
$P(i) = 4 \times i^3 - 2i^2 + 5i - 1 = i + 1$
$P(0) = -1$
$P(1) = 6$

Fait : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors
a) $P(0)$ égale le coeff constant de P
b) $P(1)$ égale la somme des coeffs de P

2) Propriétés

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. En général,

a) $P(\alpha + \beta) \neq P(\alpha) + P(\beta)$
b) $P(\alpha\beta) \neq P(\alpha)P(\beta)$

démo :

a) On prend $P = X^2$
En général, on a $(\alpha+\beta)^2 \neq \alpha^2 + \beta^2$
ou $P = 1$
On retiendra qu'en général un polynôme n'est pas linéaire

b) on prend $P = 2$
Si c'était vrai, on aurait $2 = 4$

3) Propriétés vraies

Proposition : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, soit $\alpha \in \mathbb{K}$ alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ (P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha) \\ \\ 2)\ (PQ)(\alpha) = P(\alpha)\,Q(\alpha) \end{array}}$$

Démo :

On vérifie 1) et 2) sur un exemple

On prend $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 2 - X$

On a $\begin{cases} P + Q = X^2 + 3 \\ PQ = (2 + 2X + 2X^2) - (X + X^2 + X^3) = -X^3 + X^2 + X + 2 \end{cases}$

1) On a : $P(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$

$Q(\alpha) = 2 - \alpha$

donc $P(\alpha) + Q(\alpha) = 3 + \alpha^2$

donc on a bien $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$

2) On a $P(\alpha)Q(\alpha) = (2-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)$

$= -\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 2$

donc, on a bien $(PQ)(\alpha) = P(\alpha)\,Q(\alpha)$

4) Reformulation plus abstraite

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$

On note $\begin{array}{rl} \mathrm{ev}_\alpha : \mathbb{K}[X] & \to \mathbb{K} \\ P & \mapsto P(\alpha) \end{array}$

Alors, on a :

1) $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\acute{e}v_\alpha(P+Q) = \acute{e}v_\alpha(P) + \acute{e}v_\alpha(Q)$

2) $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\acute{e}v_\alpha(PQ) = \acute{e}v_\alpha(P) \times \acute{e}v_\alpha(Q)$

5) Fonction associée à un polynôme

Notation : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

On note $\tilde{P}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{P} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto P(x) \end{array}$$

Rq : On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

On considère $P := 4X^2 + 3X - 2$

On peut évaluer P en A

Cela donne $P(A) = 4 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 + 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2$ ⚠ matrice moins un nombre

$$P(A) = 4A^2 + 3A - 2 \cdot I_2$$

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $M^0 = I_n$

et $P = 4X^2 + 3X - 2X^0$

Ainsi, $P(A) = 4 \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

IV, Racines

1) Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

On dit que α est <u>une racine de P</u> ssi <u>$P(\alpha) = 0$</u>

On note :

- $Z_{\mathbb{R}}(P) := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid P(\alpha) = 0\}$
- $Z_{\mathbb{C}}(P) := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid P(\alpha) = 0\}$

<u>Fait</u> : On a

1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
2) $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$
3) $Z_{\mathbb{R}}(P) \subset Z_{\mathbb{C}}(P)$ si $P \in \mathbb{K}[X]$

<u>Exemples</u> :

- $Z_{\mathbb{R}}(X^2+1) = \emptyset$
- $Z_{\mathbb{C}}(X^2+1) = \{-i, i\}$

2) Caractérisation des racines via $(X-\alpha)$

<u>Proposition</u> :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :

$$P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha)Q$$

<u>Démo :</u>

$\Leftarrow$ Osq $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha)Q$

Fixons un tel Q

On a $P(\alpha) = ((X-\alpha)Q)(\alpha)$

$= \big((X-\alpha)(\alpha)\big) \times Q(\alpha)$ $\quad V = X - \alpha$ donc $V(\alpha) = \alpha - \alpha$

éval.° en α

$= (\alpha - \alpha) Q(\alpha) = 0\, Q(\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ On procède par récurrence

On note pour $n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P}(n)$: " $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(\alpha) = 0 \Rightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha)Q$ "

Mq $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$

Initialisation : $(n = 0)$

Soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$ tq $P(\alpha) = 0$ ie P est un poly constant

Soit donc $a \in \mathbb{K}$ tq $P = a$

On a $P(\alpha) = 0$ donc $P = 0$

donc $P = (X-\alpha)0$

donc $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha)Q$

<u>Hérédité :</u> Mq $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Mq $\mathcal{P}(n+1)$

Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ tq $P(\alpha) = 0$

On distingue deux cas :

1er cas : $\deg P \leq n$ alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Or $\mathcal{P}(n)$ est vrai donc ok

2ème cas : $\deg P = n+1$

On écrit $P = cX^{n+1} + Q$ avec $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $c \in \mathbb{K}^*$

Idée : On veut faire disparaître le coeff. en X^{n+1} donc, il va falloir soustraire qqch à P

On pose $R := P - cX^{n+1} + c\alpha^{n+1}$

On a $R \in \mathbb{K}_n[X]$ (c'est fait pour annuler le coeff en X^{n+1})

De plus, on a $R(\alpha) = P(\alpha) - c\alpha^{n+1} + c\alpha^{n+1} = P(\alpha) = 0$

On peut appliquer $P(n)$ à R

Soit donc $S \in \mathbb{K}[X]$ tq $R = (X-\alpha)S$

On a alors :

$$P - cX^{n+1} + c\alpha^{n+1} = (X-\alpha)S$$

donc $P = (X-\alpha)S + c(X^{n+1} - \alpha^{n+1})$

Or $(X^{n+1} - \alpha^{n+1}) = (X-\alpha)\sum_{k=0}^{n} X^k \alpha^{n-k}$ Bernoulli

donc $P = (X-\alpha)\left[S + c\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} X^k\right]$

Ainsi, $\exists U \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha)U$

donc $P(n+1)$ est vraie

Rq : on aurait aussi pu considérer

$$P - c(X-\alpha)^{n+1}$$

Notons le V

On a 1) $V \in \mathbb{K}_n[X]$

2) $V(\alpha) = 0$

3) Le degré majore le nombre de racines

Théorème : Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, alors :

$$\text{card}(Z_{\mathbb{C}}(P)) \leqslant \deg P$$

Rq : On a $Z_{\mathbb{R}}(P) \subset Z_{\mathbb{C}}(P)$

donc $Z_{\mathbb{K}}(P) \subset Z_{\mathbb{C}}(P)$

donc $\text{card}\, Z_{\mathbb{K}}(P) \leqslant \text{card}\, Z_{\mathbb{C}}(P)$

Démo : On raisonne par récurrence

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $\forall P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$,
$\deg P = n \Rightarrow \operatorname{card} Z_{\mathbb{C}}(P) \leq n$ "

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ par récurrence

Initialisation :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = 0$ et $P \neq 0$

Alors P n'a aucune racine. On a bien $\operatorname{card} Z_{\mathbb{C}}(P) \leq 0$

Hérédité

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ est vraie. Montrons $P(n+1)$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg P = n+1$ (on a $P \neq 0$)

On veut mq $\operatorname{card} Z_{\mathbb{C}}(P) \leq n+1$

On raisonne par l'absurde, osq $\operatorname{card} Z_{\mathbb{C}}(P) \geq n+2$

Soient $\alpha_1, \dots \alpha_{n+2} \in \mathbb{C}$ des racines deux à deux distinctes de P

On a $P(\alpha_1) = 0$ Soit donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P = (X-\alpha_1)Q$ $(*)$

Soit $i \in [\![2, n+2]\!]$

On a $P(\alpha_i) = 0$ donc grace à $(*)$, on a $(\alpha_i - \alpha_1)Q(\alpha_i) = 0$

Or, par hypothèse, on a $\alpha_i - \alpha_1 \neq 0$

donc $Q(\alpha_i) = 0$

donc $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+2}$ sont racines de Q

donc $\operatorname{card} Z_{\mathbb{C}}(Q) \geq n+1$

Passons $(*)$ au degré on a $\underset{n+1}{\underset{\shortparallel}{\deg P}} = \overset{=1}{\deg(X-\alpha)} + \deg Q$

donc $\deg Q = n$

donc, on peut appliquer $P(n)$ à Q

donc, $\operatorname{card} Z_{\mathbb{C}}(Q) \leq n$ absurde ■

4) Critère radical de nullité

Théorème

. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$
alors $|Z_{\mathbb{C}}(P)| \geq n+1 \Rightarrow P = 0$

. Un polynôme de degré au plus n et admettant au moins
$n+1$ racines est nul.

Démo:
Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tq $|Z_{\mathbb{C}}(P)| \geq n+1$
Si $P \neq 0$, on a $|Z_{\mathbb{C}}(P)| \leq \deg P \leq n$ absurde
donc $P = 0$ ■

Corollaire

. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$
alors : $Z_{\mathbb{C}}(P)$ infini $\Rightarrow P = 0$
. Ie : si P possède une infinité de racines alors P est nul

5) Corollaires au critère radical de nullité

Corollaire 1)

Soit $n \in \mathbb{N}$ Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$
alors si $\left\{ x \in \mathbb{K} \mid P(x) = Q(x) \right\}$ possède au moins $(n+1)$ élét

alors $P = Q$
. Ie si P et Q coïncident en au moins $n+1$ points, ils
sont égaux.

Démo : On applique un des résultats précédents au polynôme $P - Q \in \mathbb{K}_n[X]$ qui admet au moins $n+1$ racines

Corollaire 2)

Si deux polynômes coïncident en une infinité de points, ils sont égaux.

Corollaire 3)

L'application :

$$\Phi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{est injective}$$
$$P \longmapsto \widetilde{P}$$

démo : exo

6) Théorème d'Alembert - Gauss

Théorème !!!

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.
alors, $\exists \alpha \in \mathbb{C} : P(\alpha) = 0$

Rq : Mq $\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est injective
$$P \longmapsto \widetilde{P}$$

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tq $\Phi(P) = \Phi(Q)$

Mq $P = Q$

On a $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$ $\quad (\in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$

Ie on a $\forall t \in \mathbb{R}, \widetilde{P}(t) = \widetilde{Q}(t)$

donc, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = Q(t)$

ainsi P et Q coïncident sur $\mathbb{R}$

donc $(P-Q)$ a une $\infty^{té}$ de racines

donc $P = Q$

Corollaire du théorème :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

On note $n := \deg P$

alors, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$

et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

Exemple, on a :

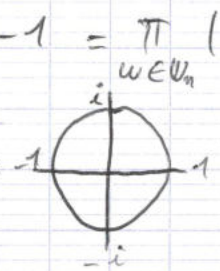
$$X^4 - 1 = (X^2)^2 - 1 = (X^2-1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$$

Corollaire : Soit $n \geq 1$ Alors

$$\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$$

Ie : $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$

Rq : $\mathbb{U}_4 =$



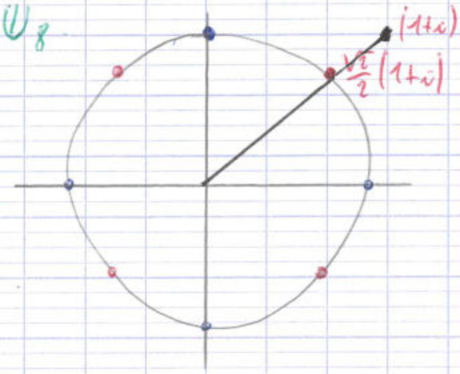
$= \{\pm 1 ; \pm i\}$

Exemple : $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$

- $X^8 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\left(X-(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-(1-i)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-(-1-i)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\times\left(X-(i-1)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

car $\mathbb{U}_8$



Démo du corollaire

Soit $z \in \mathbb{C}$

On a $z \in Z_{\mathbb{C}}(X^n - 1) \iff z^n = 1 \iff z \in \mathbb{U}_n$

donc $Z_{\mathbb{C}}(X^n - 1) = \mathbb{U}_n$

? Factoriser $X^n + 1$

Rq : Le thm de d'Alembert-Gauss (appelé également théorème fondamental de l'algèbre)
énoncé en 1629, démontré parfaitement en 1816