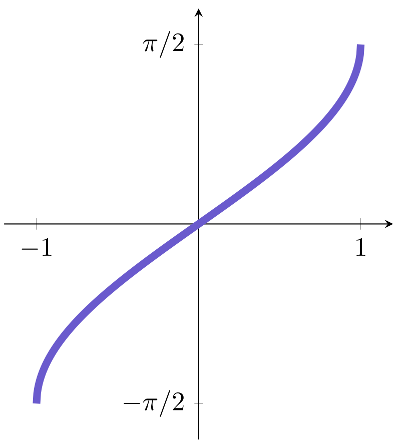
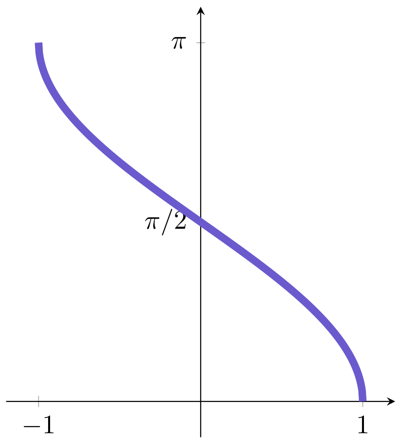
Chapitre 6

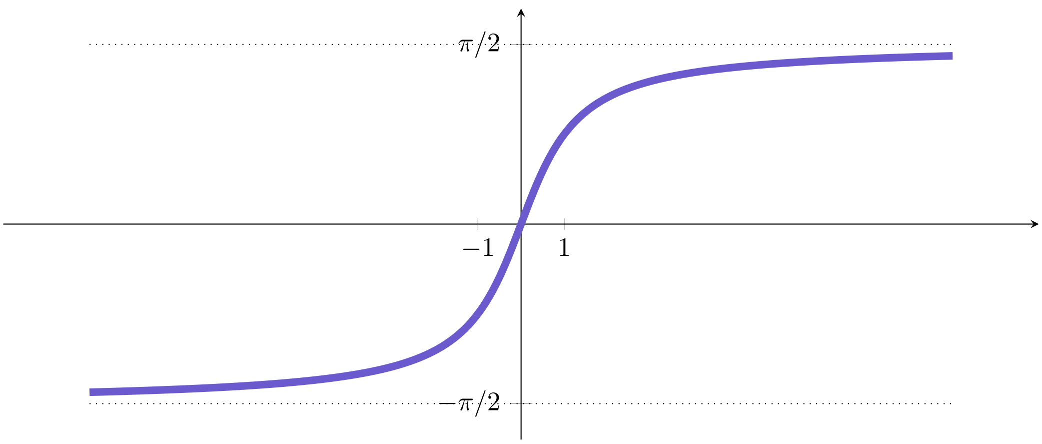
Fonctions usuelles



La fonction arcsin



La fonction arccos



La fonction arctan

Ce chapitre est l'occasion de compléter l'étude des fonctions réelles faites en classes de Première et Terminale. En plus de compléments, on introduit les fonctions trigonométriques inverses qui jouent un rôle important, entre autres, dans les calculs de primitives et donc, par extension, dans toutes les mathématiques.

Chapitre 9 : Fonctions usuelles

I, Rappels et compléments

1) Dérivée de la composée

Théorème :

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ avec $\ell(I), \ell(J) > 0$
Soit $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable
Soit $f : I \to J$ dérivable

Alors :
1) $g \circ f$ est dérivable sur I
2) $\forall x \in I$, $(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

Remarque : ie on a $(g\circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

Exemple :
. Soit $a \in \mathbb{R}$
On considère $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$
$t \mapsto \exp(a \ln(t))$

alors :
1°) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ (en fait, mieux, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$)

2°) Si $t > 0$, on a :
$$\varphi'(t) = \exp'(a \ln(t)) \times \frac{a}{t}$$
$$= \frac{a}{t} \times \varphi(t)$$

- Soit $a > 0$

On considère $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

$$t \mapsto \exp(t \ln(a))$$

alors :

1°) $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et mieux $\mathcal{C}^\infty$

2°) si $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Psi'(t) = \exp'(t \ln(a)) \times \ln(a)$$

$$\Psi'(t) = \ln(a)\, \Psi(t)$$

2) Intervalles

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$

Proposition : On a $[a,b] = \left\{ \lambda a + (1-\lambda) b \mid \lambda \in [0,1] \right\}$

Réflexe

Démo : On procède par double-inclusion

On doit savoir ce qu'est un intervalle

On a $[a,b] := \left\{ t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b \right\}$

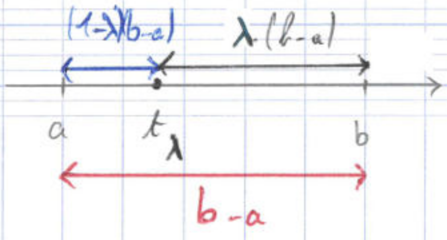
1°) Mq $\left\{ \lambda a + (1-\lambda) b \mid \lambda \in [0,1] \right\} \subset [a,b]$

Si $\lambda \in [0,1]$, on note

$$t_\lambda := \lambda a + (1-\lambda) b$$

On a $t_0 = b$ et $t_1 = a$

Dessin :



(démo : on a : $b - t_\lambda = b - (\lambda a + (1-\lambda) b) = \lambda (b-a)$

et $t_\lambda - a$ = m̂ calcul = ok

$$= (t_\lambda - b) + (b-a)$$

On passe par b ↗ $= -\lambda(b-a) + (b-a) = (1-\lambda)(b-a)$

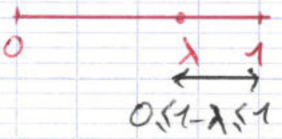
Soit $\lambda \in [0,1]$

Mq $t_\lambda \in [a,b]$ ie mq $\begin{cases} t_\lambda \leq b \\ t_\lambda \geq a \end{cases}$ ie mq $\begin{cases} b - t_\lambda \geq 0 \\ t_\lambda - a \geq 0 \end{cases}$

Or, $b - t_\lambda = \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{(b-a)}_{\geq 0} \geq 0$

Réflexe : $\lambda \in [0,1] \Rightarrow (1-\lambda) \in [0,1]$

dessin :



. On a $t_\lambda - a = (1-\lambda) \underbrace{(b-a)}_{\geq 0} \geq 0$ ■ ⊆

Or $\lambda \leq 1$

donc $1 - \lambda \geq 0$

2°) Soit $\underbrace{t \in [a,b]}_{\text{ie } a \leq t \leq b}$. Mq $t \in \{ \lambda a + (1-\lambda) b \mid \lambda \in [0,1] \}$

!!! ie mq : $\exists \lambda \in [0,1] : t = \lambda a + (1-\lambda) b$

On raisonne par analyse synthèse :

Soit $\lambda \in [0,1]$ tq $t = \lambda a + (1-\lambda) b$

alors, on a $t = \lambda (a-b) + b$

ie $\lambda = \dfrac{t-b}{a-b}$ ici, c'est du : $\dfrac{<0}{<0}$

On écrit plutôt : $\lambda = \dfrac{b-t}{b-a}$

Réciproquement :

On pose : $\lambda := \dfrac{b-t}{b-a}$

On a bien : $t = \lambda a + (1-\lambda) b$

Vérifions que $\lambda \in [0,1]$

On a : $t \leq b$, donc $b-t \geq 0$

or $b-a > 0$ donc $\lambda \geq 0$

. de m, on a $t \geq a$

donc $-t \leq -a$

$b-t \leq b-a$

or $b-a > 0$ donc $\dfrac{b-t}{b-a} \leq 1$

3) Transformations de graphes et symétries

a) Transformations

Soit I intervalle ; $\ell(I) > 0$; $f : I \to \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}$; $\lambda \in \mathbb{R}^*$

On veut dessiner les graphes de :

$t \mapsto f(t) + b$

$t \mapsto f(t+a)$

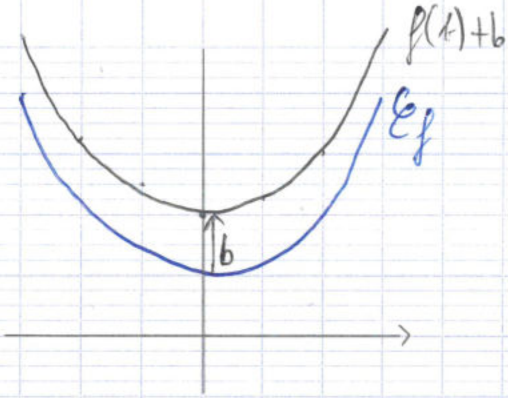
$t \mapsto \lambda f(t)$

$t \mapsto f(-t)$

$t \mapsto f(a-t)$

application : dessiner $t \mapsto \underbrace{2 - \underbrace{\exp(4-t)}_{1}}_{2}$ (3)

1°) $f(t)+b$



2°) $f(t+a)$

<u>astuce</u> : On considère $x_0 \in I$ tq $\mathcal{C}_f$ a une propriété remarquable en $(x_0, f(x_0))$

(ex : x_0 est le début de $\mathcal{D}_f$; tangente verticale, horizontale, $f(x_0)=0$ ie $\mathcal{C}_f$ intersecte (Ox) en x_0 ; f atteint son min en x_0)

On considère $g : t \mapsto f(t+a)$

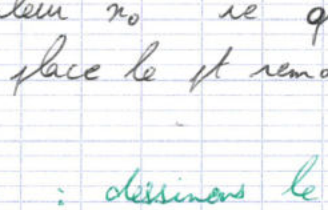
alors $\mathcal{C}_g$ aura le m̂ pt remarquable quand "f reçoit la valeur x_0" ie quand $t+a = x_0$ ie $t = x_0 - a$

On place le pt remarquable, on dessine $\mathcal{C}_g$

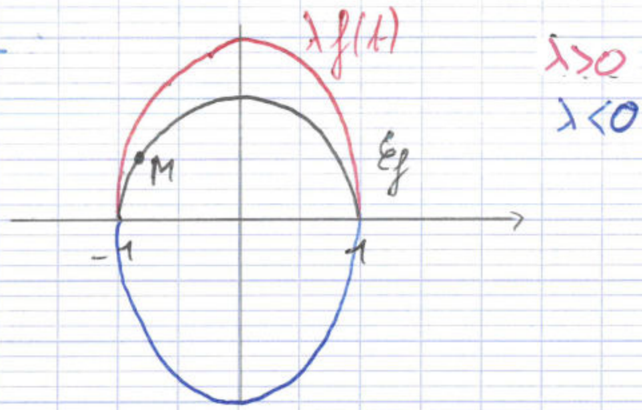
Exemple : dessinons le graphe de $\begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ t \longmapsto (t+2)^2 \end{array}$

On sait que $t \mapsto t^2$ admet un min en 0, donc g aura un min quand $t+2=0$ ie qd $t=-2$

d'où



3°) $\lambda f(t)$



Soit $M \in \mathcal{E}_f$, soit donc $t \in [-1, 1]$

tq $M = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

On a $OM = 1$ donc $OM^2 = 1 \iff (x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2 = 1$

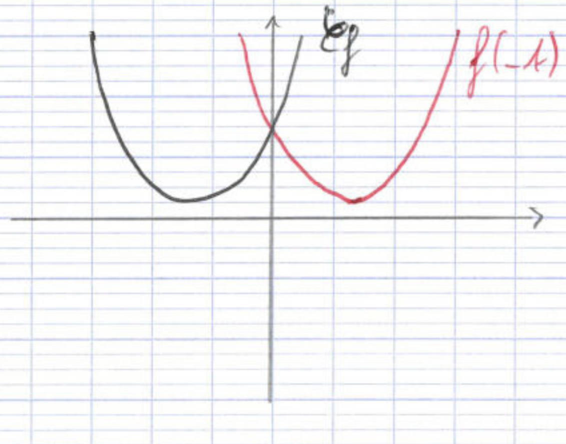
ie $t^2 + f^2(t) = 1$

ie $f^2(t) = 1 - t^2$ or $f(t) \geq 0$

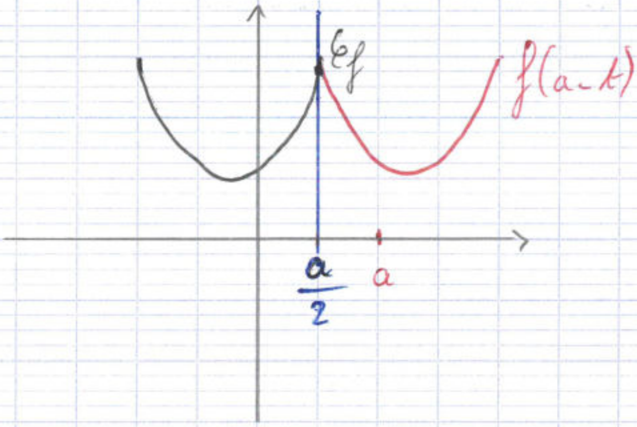
donc $\sqrt{f^2(t)} = |f(t)| = f(t) = \sqrt{1 - t^2}$

donc $f(t) = \sqrt{1-t^2}$

4°) $f(-t)$



5°) $f(a-t)$



Rq : on peut composer 2°) et 4°) pour trouver

autre méthode : (Idée !)

On cherche un point pivot $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a - t_0 = t_0$

ie t_0 est invariant par $t \mapsto a-t$

On a $f(t_0) = f(a-t_0)$

donc le point $(t_0, f(t_0))$ sera commun aux deux graphes

ie $t_0 = \frac{a}{2}$

Puis, on applique une symétrie à partir de t_0.

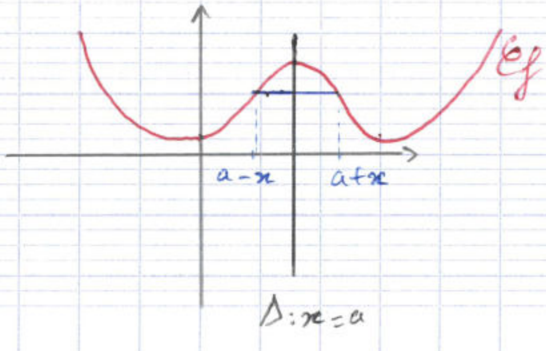
b) Symétries

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$

1°) On suppose que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $\Delta : x = a$

On veut en déduire une relation algébrique vérifiée par f

dessin :



On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(a+x) = f(a-x)$$

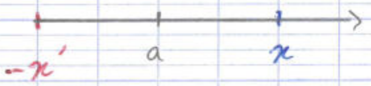
Cherchons une autre expression

Soit $x \in \mathbb{R}$

Quel est le symétriq de x par rapport à a ?

Notation : le symétrique est x'

dessin :



On a : a est le milieu de $[x', x]$

donc $a = \dfrac{x+x'}{2}$

ie $x' = 2a - x$

CCL : On a :

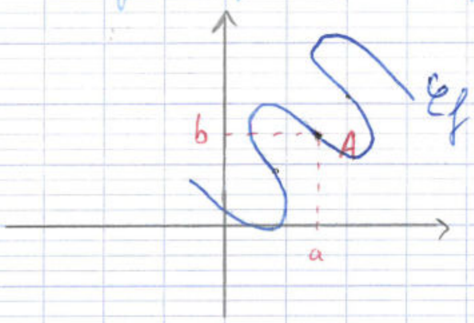
$\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à $(x=a)$

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = f(2a-x)$

2°) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $A := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Osq $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point A



(?) Trouver une relation algébrique vérifiée par f $\frac{f(2a+x)+f(x)}{2}=f$

4) Espaces de fonctions

I intervalle tq $\ell(I)>0$

On pose :

$$\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) := \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue sur } I \}$$

$$\mathcal{D}(I,\mathbb{R}) := \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ dérivable sur } I \}$$

On pose :

$$\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) := \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$$
$$\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) := \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$$

Compléments

- autre démonstration pour 2)

Pondérons. On a : $a \leq a \leq b$

et $a \leq b \leq b$

donc, puisque $\lambda, (1-\lambda) \geq 0$

on a $\lambda a \leq \lambda a \leq \lambda b \quad (1)$

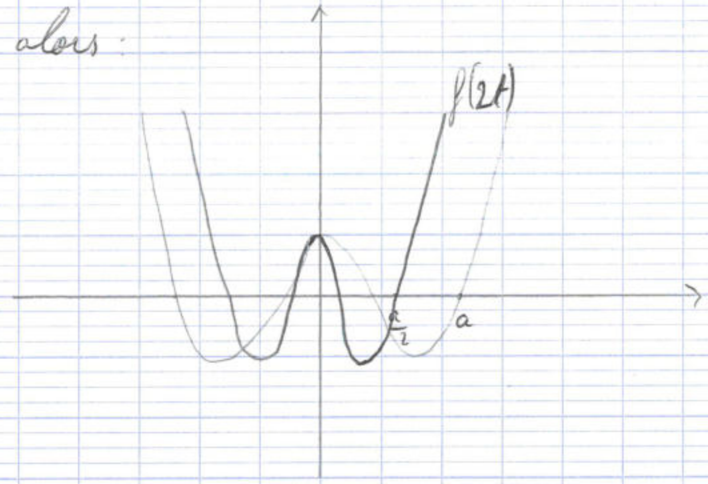
$(1-\lambda) a \leq (1-\lambda) b \leq (1-\lambda) b \quad (2)$

et (1)+(2) donne $a \leq \lambda a + (1-\lambda) b \leq b$

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$

On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto f(\lambda t)$

On a alors :



$(\lambda = 2)$

On pose :

$$\mathcal{D}^{p+1}(I, \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \;\middle|\; f' \in \mathcal{D}^p(I, \mathbb{R}) \right\}$$

Ie une fct. $(p+1)$ fois dérivable est une f° dérivable dont la dérivée f' est p fois dérivable

Si $f \in \mathcal{D}^{p+1}(I, \mathbb{R})$, on pose $\begin{cases} f^{(p+1)} := (f')^{(p)} \\ f^{(1)} := f' \\ f^{(0)} := f \end{cases}$

Ex

si $p \geqslant 1$, on a $\exp^{(p)} = \exp$

si $p \geqslant 1$, on a $\sin^{(2p)} = (-1)^p \sin$

si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, on a $f^{(p)}(x) =$ si $x > 0$ et $p \geqslant 1$

. On pose si $p \geqslant 1$

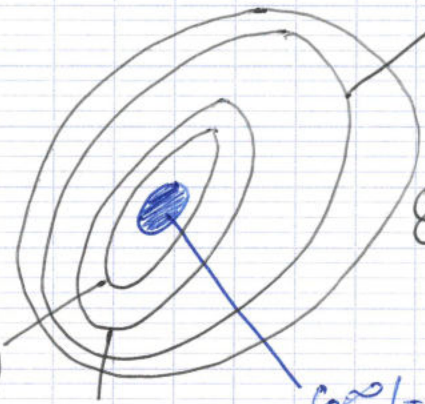
$$\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{D}^p(I, \mathbb{R}) \;\middle|\; f^{(p)} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \right\}$$

Ce sont les fonctions p fois continûment dérivables.

Enfin, on pose

$$\mathcal{C}^{\infty}(I, \mathbb{R}) := \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{D}^{p}(I, \mathbb{R})$$

Dessin



Exemple

$\sqrt{\cdot} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

$\sqrt{\cdot} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ car $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0

car $\dfrac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h \to 0^{>}]{} +\infty$

Si $f \in \mathcal{C}^{\infty}(I, \mathbb{R})$, on dit que f est infiniment dérivable

Faits

a) Une fct dérivable est continue
ie $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

b) $\mathcal{C}^{1}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$
(ie on cherche f tq f' n'est pas continue)

c) $\forall p$, $\mathcal{D}^{p+1} \subset \mathcal{D}^p$; $\mathcal{C}^{p+1} \subset \mathcal{C}^p$

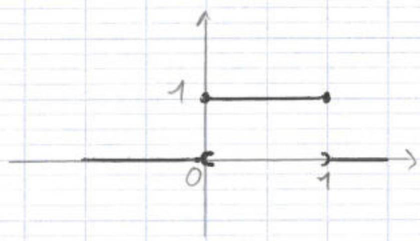
d) $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \bigcap_{p \geq 0} \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$

Exemple minimal de f^o non continue

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{1}_{[0,1]}$

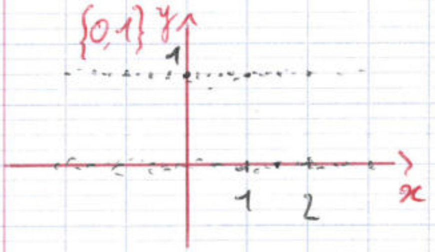


elle n'est pas continue en 0 ni en 1

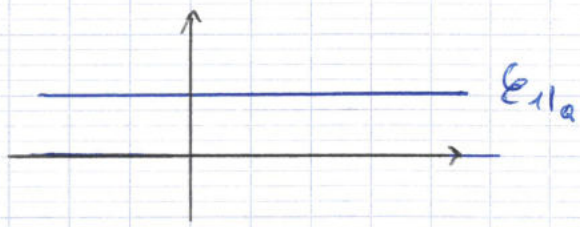
- ⚠ $\begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{matrix} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- $\mathbb{1}_\mathbb{Q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est continue en aucun $x \in \mathbb{R}$

Dessin de $\mathcal{C}_{\mathbb{1}_\mathbb{Q}}$

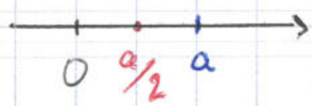


bilan:



droites "poreuses"

Rq : la notion de "nb rationnel suivant n'existe pas". En effet, si $\begin{cases} a \in \mathbb{Q} \\ a > 0 \end{cases}$ alors on a



5) Fonctions réciproques

a) Monotonie

Proposition : Soient E, F des parties de $\mathbb{R}$
Soit $f : E \to F$ une bijection

alors a) $f \nearrow\nearrow \Rightarrow f^{-1} \nearrow\nearrow$
b) $f \searrow\searrow \Rightarrow f^{-1} \searrow\searrow$

ie la réc d'une bij strict. monotone est strict. monotone de m̂ monotonie

Démo : On a $f^{-1} : F \to E$
a) Soient $y_1, y_2 \in F$ tq $y_1 < y_2$
Mq $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Réflexe : comme f est surjective, soient $x_1, x_2 \in E$ tq
$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \quad (1)$$

Or on sait que $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

or $\underbrace{f(x_1)}_{y_1} < \underbrace{f(x_2)}_{y_2}$ est vrai

donc $x_1 < x_2$

Or, réflexe l'uniq antécédent par f de y_1 est $f^{-1}(y_1)$

En effet, en appliquant f^{-1} à (1), on a $f^{-1}(y_1) = \underbrace{f^{-1}(f(x_1))}_{\substack{f^{-1} \circ f(x_1) \\ = \\ Id_E}} = x_1$

De m̂, $x_2 = f^{-1}(y_2)$

Ainsi, on a mq $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ■

b) Idem ■

Rq: $\left.\begin{matrix} f \text{ bij} \\ f \nearrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \nearrow\!\!\nearrow$?

b) Graphes

Rq : $f : I \to \mathbb{R}$, f continue et f inj $\Rightarrow$ f ↗↗ ou f ↘↘

Rappel:

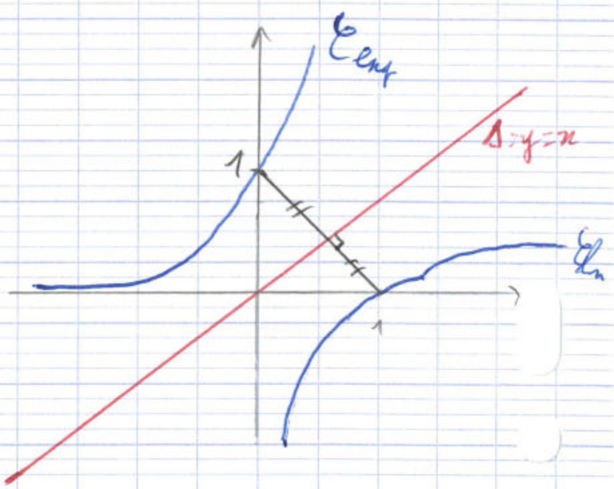
$\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: f monotone sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Soient I, J des intervalles
Soit $f : I \to J$ bijective
Dessinons le graphe de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en fct de $\mathcal{C}_f$

Prop: $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\Delta : y = x$

Exemples:

- On considère $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$



(?) Faire le dessin pour

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & x^2 \\ \mathbb{R}_+ & \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & \mathbb{R}_+ \\ \sqrt{y} & \longleftarrow\!\shortmid & y \end{array}$$

c) Dérivées

<u>Prop:</u> Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable
Soit $y \in J$
alors
1) f^{-1} est dérivable en $y \iff f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

2) Dans ce cas, on a $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

<u>Démo:</u>

1) + tard
2) On suppose $f^{-1} : J \to I$ dérivable

Démontrons la formule :

<u>Idée :</u> 1) on regarde $f \circ f^{-1}$
2) on dérive

On a : $\forall y \in J$, $f \circ f^{-1}(y) = y$

En dérivant, on obtient :
$\forall y \in J$, $f'(f^{-1}(y)) \times (f^{-1})'(y) = 1$

Fixons $y \in J$

On a nécessairement $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

et $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

6) Théorème de la bijection monotone

Théorème :

. Soit I intervalle tq $\ell(I) > 0$

On note a et b les extrémités de I (ex : $I =]a, b]$)

. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strict. monotone

On note $\displaystyle \alpha := \lim_{x \to a} f(x)$

$\displaystyle \beta := \lim_{x \to b} f(x)$ (ex : $\beta = f(b)$)

alors :

1°) a) $f[I]$ est un intervalle d'extrémités α et β

b) de plus, α est une borne ouverte de $f[I]$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ a est une borne ouverte de I (de $\hat{m}$ pour β) (ex : $f[I] =]\alpha, \beta]$ si $f \nearrow\nearrow$
$= [\beta, \alpha[$ si $f \searrow\searrow$)

2°) f réalise une bijection de I dans $f[I]$ et

a) f^{-1} est strict. monotone, de $\hat{m}$ monotonie que f

(+ exactement $(f|^{f[I]})^{-1}$)

b) f^{-1} est continue

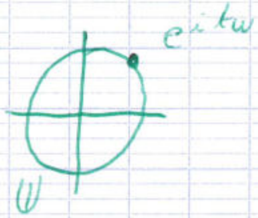
Rq : En particulier, $f : I \to J$ continue et bij alors f^{-1} est continue

7) Dérivation des fonctions complexes

But : f' si $f : I \to \mathbb{C}$

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \mapsto e^{i\omega t}$ avec $\omega > 0$

c'est



comment dériver f ?

a) Définition

I intervalle tq $\ell(I) > 0$ et $a \in I$

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{C}$
On dit que f est dérivable en a ssi

Re(f) et Im(f) sont dérivables en a
$(I \to \mathbb{R})$ $(I \to \mathbb{R})$

On pose alors : $f'(a) := \mathrm{Re}(f)'(a) + i\,\mathrm{Im}(f)'(a)$

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \mapsto e^{it}$

On a $\mathrm{Re}(f) = \cos$ et $\mathrm{Im}(f) = \sin$

Or, cos, sin $\in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$
Soit $t \in \mathbb{R}$
On a :

$$f'(t) = \mathrm{Re}(f)'(t) + i\,\mathrm{Im}(f)'(t)$$

$$= -\sin(t) + i\cos(t)$$
$$= i\,(\cos(t) + i\sin(t))$$
$$= i\,e^{it}$$

Complément

$i \in \overline{\mathbb{Q}}$ (nb algébrique)
en effet si $P = X^2 + 1$, on a $P(i) = 0$

b) Propriétés

Règles habituelles :

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$ si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{C}$

$$(g \circ f)' = f' \times g'(f)$$

⚠ On sait dériver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
mais on ne sait pas dériver $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

c) dérivation avec $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$

Prop !!

1) Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable

On pose $f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \exp(i\varphi(t)) \end{array}$ $e^{i\varphi(t)}$

alors $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$

et $\forall t \in I,\ f'(t) = i\varphi'(t) \exp(i\varphi(t))$

$$= i\varphi'(t)\, e^{i\varphi(t)}$$

2) Soit $\psi : I \to \mathbb{C}$ dérivable

On pose $g : \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \exp_{\mathbb{C}}(\psi(t)) \end{array}$ ie $g := \exp_{\mathbb{C}} \circ \psi$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbb{C} \arrow[r, "\exp_{\mathbb{C}}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

alors $g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $\forall t \in I,\ g'(t) = \psi'(t) \exp_{\mathbb{C}}(\psi(t))$

Démo :

1) On a $\mathrm{Re}(f) = \underbrace{\cos \circ \varphi}_{\in \mathcal{D}}$ et $\mathrm{Im}(f) = \underbrace{\sin \circ f}_{\in \mathcal{D}}$

par compo de f° $\mathcal{D}$

donc $f : I \to \mathbb{C} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$

Fixons $t \in I$. On a $(\cos \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \times (-\sin(\varphi(t))$

et de m̂ pour $(\sin \circ \varphi)'(t)$

donc :

$$f'(t) = i\,\varphi'(t)\Big(\cos(\varphi(t)) + i\sin(\varphi(t))\Big)$$

2) On note : $a := \mathrm{Re}(\psi)$ et $b := \mathrm{Im}(\psi)$

$\psi \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ donc $a, b \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

On a $\forall t \in I$, $\psi(t) = a(t) + i\,b(t)$

donc, $\forall t \in I$, $\underset{:= e^{\psi(t)}}{g}(t) = \underset{\in \mathcal{D}}{e^{a(t)}} \cdot \underset{\in \mathcal{D}^1 \text{ par } 1)}{e^{ib(t)}}$

et si $t \in I$, on a :

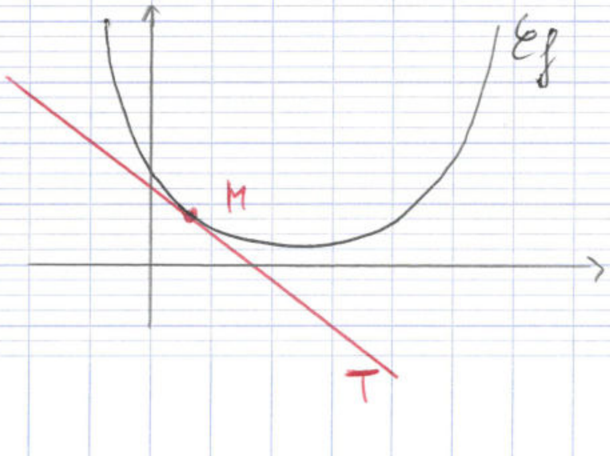
$$g'(t) = \underbrace{\left[a'(t)\,e^{a(t)}\right] \times e^{ib(t)}}_{e^{\psi(t)}} + \underbrace{e^{a(t)} \times \left[ib'(t)\,e^{ib(t)}\right]}_{e^{\psi(t)}}$$

$$= e^{\psi(t)}\underbrace{\left(a'(t) + i\,b'(t)\right)}_{\psi'(t)}$$

donc $\left(e^{\psi(t)}\right)' = \psi'(t)\,e^{\psi(t)}$

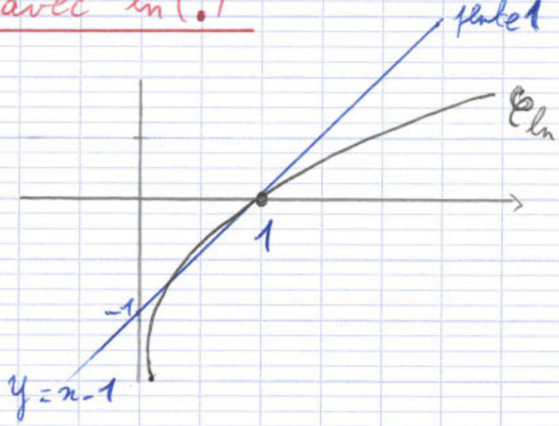
8) Inégalités de convexité

Dessin

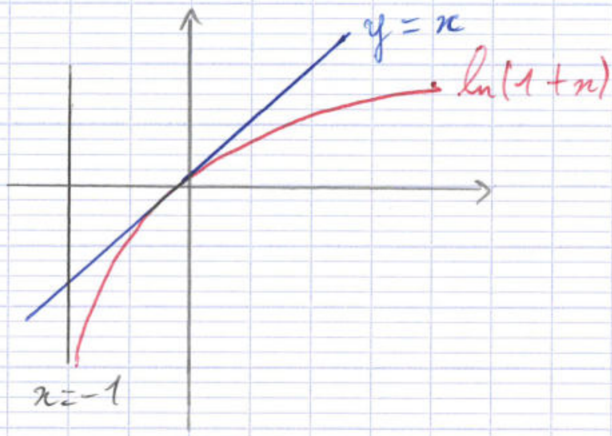


a) avec $\ln(\cdot)$

On a



donc



Prop :

1) $\forall x > -1 \ , \ \ln(1+x) \leqslant x$

2) $\forall x > -1 \ , \ x \neq 0 \Rightarrow \ln(1+x) < x$

Démo :

On pose $\Psi :]-1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad x \longmapsto x - \ln(1+x)$

On a $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(]-1; +\infty[, \mathbb{R})$

Fixons $x > -1$. On a :

$$\Psi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

Signe de $\Psi'(x)$?

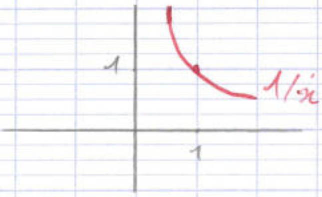
. si $x>0$, $1+x>1$ donc $\frac{1}{1+x} \in]0,1[$

donc $1-\frac{1}{1+x}>0$

. si $x=0$, $\Psi'(x)=0$.

. si $x<0$: $1+x \in]0,1[$

Or,



donc $\frac{1}{1+x}>1$

donc $1-\frac{1}{1+x}<0$

CCL :

x	-1		0		$+\infty$
$\Psi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

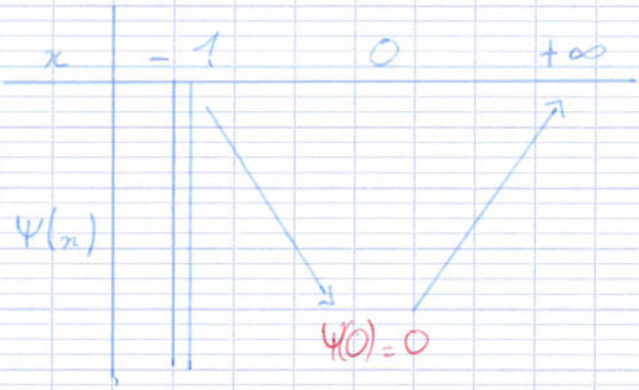
ou: $\Psi'(x) = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{\underbrace{1+x}_{>0}}$

D'où :

x	-1		0		$+\infty$
x	‖	$-$	0	$+$	
$1+x$	‖	$+$		$+$	
$\Psi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Variation de Ψ

D'où :

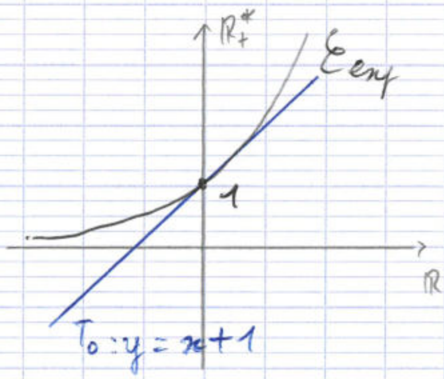


CCL, $\forall x \in]-1,0[,\ \Psi(x) > 0$

$\forall x > 0,\ \Psi(x) > 0$

b) avec $\exp(\cdot)$

On a :



Prop :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geq 1 + x$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exp(x) > 1 + x$

Démo : ?

II, Fonctions usuelles

1) Symbole x^a

Déf :

Soit $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$

On note $x^a := \exp(a \cdot \ln(x))$

Exemple :

. On a $2^\pi = \exp(\pi \times \ln(2))$

astuce :

$$x^a \nearrow \exp(a \cdot \ln(x)) \quad ? \qquad x^a \searrow \exp(x \cdot \ln(a))$$

"le a est en haut, il y reste" $\Rightarrow x^a = e^{a \ln(x)}$

Complément :

Si $(E_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ tq $\forall i, E_{i+1} \subset E_i$
alors $\forall n_0$, $\bigcap_{i \geq 0} E_i = \bigcap_{i \geq n_0} E_i$

⚠ x^a n'est pas défini si $x \leq 0$
ex : $(-1)^{1/2}$ n'est pas défini
sinon on aurait $\sqrt{-1}$

Rq : $\forall x > 0, \forall a \in \mathbb{R}, x^a > 0$

Justification de la déf

Soit $x > 0$ et soit $a \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$

On sait que $\ln(X^n) = n \ln(X)$

Si on a défini x^a, on aimerait avoir :

$$\ln(X^a) = a \ln(X) \qquad (*)$$

En passant $(*)$ à $\exp(.)$

$$\exp(\ln(X^a)) = \exp(a . \ln(X))$$

$$X^a = \exp(a . \ln(X))$$

Rq :

- le nb $e \in \mathbb{R}$ est défini par $\ln(e) = 1$
  On a $\exp(\ln(e)) = \exp(1)$
  Je $\exp(1) = e$

- Soit $x \in \mathbb{R}$
  On a : $e^x = \exp(x . \ln(e)) = \exp(x)$

Prop :

1) Les deux défs coïncident
   ie $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exp(n . \ln(x)) = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$

2) les règles habituelles sur les puissances sont vérifiées
   Si $x > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$:
   - $x^a x^b = x^{a+b}$
   - $(x^a)^b = x^{ab}$
   - $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
   - si $y > 0$: $x^a y^a = (xy)^a$

__Démo :__ Soient $x, y > 0$; $a, b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$

1) On a :

$$\exp(n \cdot \ln(x)) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(x)\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \exp(\ln(x))$$
$$= \prod_{i=1}^{n} x \quad \blacksquare$$

2) On calcule :

$$x^a x^b = \exp(a \cdot \ln(x)) \exp(b \cdot \ln(x))$$
$$= \exp\left(a \cdot \ln(x) + b \ln(x)\right)$$
$$= \exp((a+b) \ln(x))$$
$$= x^{a+b}$$

$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$

? Montrer les autres

2) Fonctions puissances

a) Définition

__Notation - définition :__

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant a :

$$P_a : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto x^a \end{array}$$

Ex : $\cdot\ P_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$ $\quad\cdot\ P_{1/2} = \sqrt{\cdot}$

$\cdot\ P_{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$ $\quad\cdot\ P_3 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ et $P_3' = 3\,P_2$

Rq : On a : $\underbrace{(X^3)' = 3X^2}_{\text{OK dans une copie}}$

Si $P := X^3$, on a $P' = 3X^2$

$\cdot\ P_0 = \tilde{1}$

b) Etude de P_a

Prop : $a \in \mathbb{R}$

1) $P_a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

Rq : P est une minuscule ie p

2) $p_a' = a\, p_{a-1}$

Ie : " $\frac{d}{dx}(x^a) = a\, x^{a-1}$ "

Démo : c'est la formule $(g \circ f)' = f' \times g'(f)$

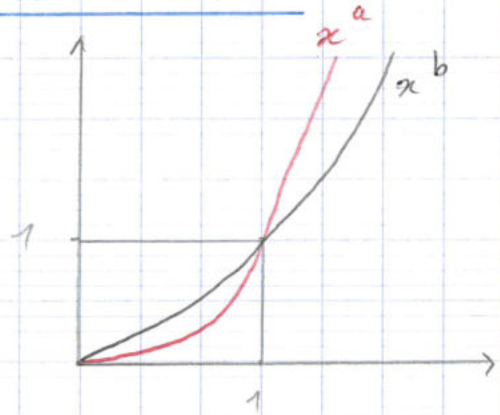
Si $x > 0$. $P_a'(x) =$ " $\exp(a \cdot \ln(x))'$ " $= \frac{a}{x} \exp(a \cdot \ln(x))$

$= \frac{a}{x}\, x^a = a\, x^{a-1}$

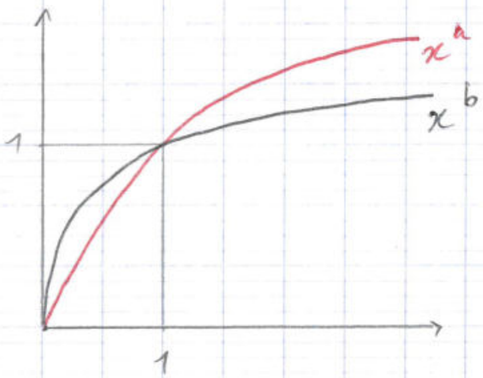
c) comparaison des p_a

Prop : Soient $a, b \in \mathbb{R}$

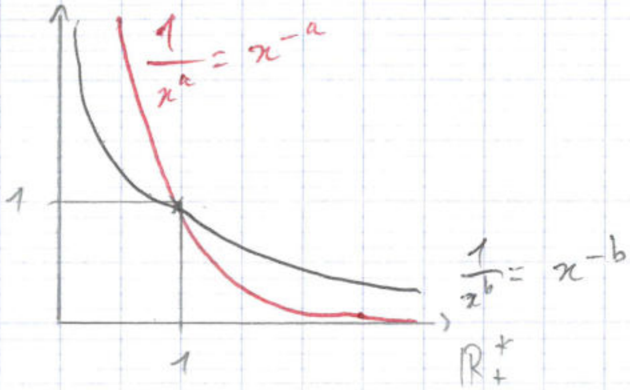
1) Si $a > b > 1$



2) Si $1 > a > b > 0$ (V-)



3) si $a > b > 0$



Démo : Soient $x > 0$; $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a > b$

On a :

. $1^a = 1$

. Si $a, b > 1$: $x^a < x^b$ si $x < 1$

$x^a > x^b$ si $x > 1$

. $x^{-a} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $x^a \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

. si $a < 1$: P_a n'est pas dérivable en 0 (si on a prolongé P_a par 0 en 0)

. $0 \leq a < 1 \Rightarrow P_a$ concave

. $a > 1 \Rightarrow P_a$ convexe

. $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ convexe

. Si $a < 0$: $P_a(]0,1[) \subset (]1, +\infty[)$

et $P_a(]1, +\infty[) \subset]0,1[$

. $x^b = o(x^a)$ quand $x \to +\infty$ (avec $b < a$)

. $P_a \nearrow\nearrow$ et $P_{-a} \searrow\searrow$

. P_a est bijective et $p_a^{-1} = P_{1/a}$

↳ c'est la rcq de p_a

. Mq $a > 1 \Rightarrow p_a$ convexe

On a $(p_a)'' = ((p_a)')' = (a\, p_{a-1})' = a (p_{a-1})' = \underbrace{a(a-1)}_{>0} \underbrace{p_{a-2}}_{>0}$

(?) Le reste en exercice

3) Exponentielle de base a

Au lieu de regarder x^a, on regarde a^x

a) Définition

Déf : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$
L'exponentielle de base a est :

$$\varphi_a : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x \end{array}$$

b) Dérivée !!

Prop : Soit $a > 0$. On a :

1) $\varphi_a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2) $\varphi'_a = \ln(a) \cdot \varphi_a$
ie "$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$"

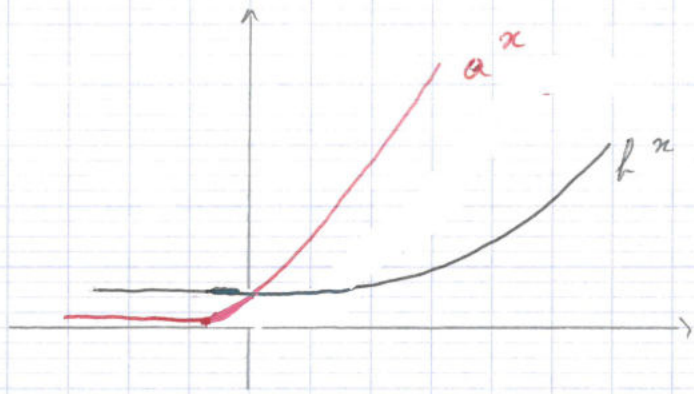
Rq : Ainsi "$(e^x)' = \underbrace{\ln(e)}_{=1} \cdot e^x$"

Démo : ?

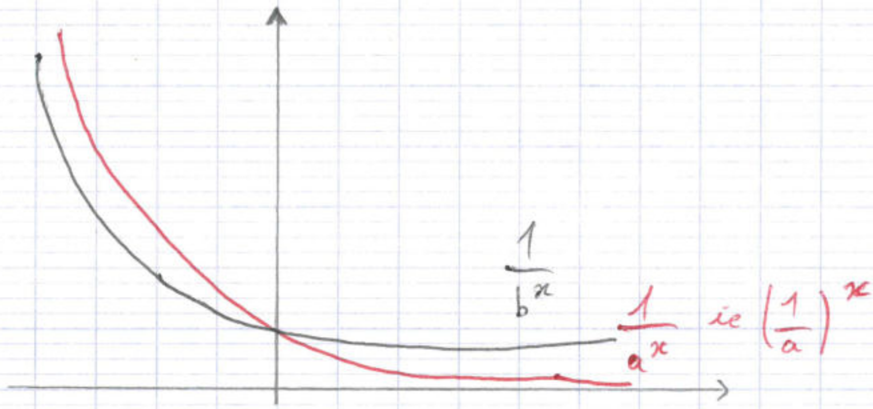
c) Etude de a^x

Prop : Soient $a, b > 0$

1) Si $a > b > 1$



2) si $a > b > 1$



Démo : ?

4) Croissances comparées

Déf : Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

On dit que f est négligeable devant g en $+\infty$ et on note $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\, g(x)$

(lu " $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ en $+\infty$ ")

$$\overset{\Delta}{\text{ssi}} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Rq : . Ici, on a quand m̂ supposé que f et g sont non nulles à partir d'un certain réel
ie $\exists A \in \mathbb{R}_+ : \forall x \geqslant A, f(x) \neq 0$

. En vrai, il suffit pour faire cette def que f et g soient définis à partir d'un certain réel (APCR)
On dit aussi : f et g définies au voisinage de $+\infty$ (noté : au $\mathcal{V}(+\infty)$)

Déf générale :

. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
On dit que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(g(x))$

$$\overset{\Delta}{\text{ssi}}\ \exists \varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : \begin{cases} f(x) = \varepsilon(x)\, g(x) \text{ APCR} \\ \varepsilon \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Rq : . sin n'est pas $\neq 0$ APCR
. $\tilde{O}$ ___

Exemples : . $\forall n \in \mathbb{N}, x^n \underset{x \to +\infty}{=} o(\exp(x))$

. $x \underset{+\infty}{=} o(\cosh(x))$

ie $\dfrac{x}{\cosh(x)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

en effet, Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{x}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = 2 \dfrac{x}{e^{-x} + e^{x}}$

Factorisation par la qté dominante

$$\frac{x}{\cosh(x)} = 2\,\frac{x}{e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{e^x}\right)} = 2\,\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1+e^{-x}}_{\to 1}}}_{\to 0}$$

par croissance comparée

donc $\displaystyle\frac{x}{\cosh(x)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ ie $x = o\left(\cosh(x)\right)$

- $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^a\right)$ si $a>0$

$\left(\ln(x) = o(\sqrt{x})\right)$

(on a $\ln(x) = o(x)$)

ie $\displaystyle\frac{\ln x}{x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

or $x^a \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc par composition des limites

donc $\displaystyle\frac{\ln(x^a)}{x^a} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\displaystyle\frac{a\ln(x)}{x^a} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\displaystyle\frac{\ln(x)}{x^a} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

Théorème : Composition des limites

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \\ \\ u(t) \xrightarrow[t \to b]{} a \end{array}\right\} \Rightarrow f(u(t)) \xrightarrow[t \to b]{} \ell$$

- $x \underset{x \to 0}{=} o(\sqrt{x})$

  et $x^p \underset{x \to 0}{=} o(x^q)$ quand $p > q$

$\left((0{,}1)^{1000} \ll (0{,}1)^2\right)$

. On dit que f est équivalente à g en $+\infty$

$$\overset{\Delta}{\text{ssi}} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

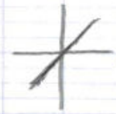
est équivalente à

Ex :
- $x^2 + 3x - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$
- $x^2 + 3x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -1$
- $a^x + b^x \underset{x \to +\infty}{\sim} a^x$ si $a > b$
- $a^x + a^x \not\sim a^x$

III, Fonctions trigonométriques

1) Tangente

a) Déf : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

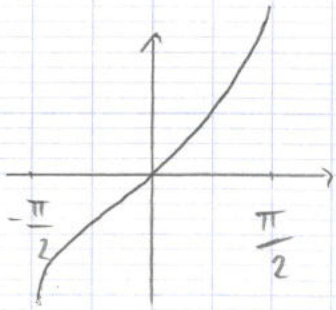
On note $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ (tan :  ; sin : 

On a $\tan \underbrace{\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}_{D\tan} \to \mathbb{R}$

b) Premières propriétés

. tan est π-périodique

$\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$



. tan est impaire

. $\tan \xrightarrow[\frac{\pi}{2}]{} +\infty$

et $\tan \xrightarrow[-\frac{\pi}{2}]{} -\infty$

$\cos(x) > 0$ quand $x \xrightarrow[<]{} \frac{\pi}{2}$

c) dérivée !!

Prop : $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$

Démo :

On a : $\tan' = \left(\dfrac{\sin}{\cos}\right)' = \dfrac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2}$

$\mathcal{D}_{\tan} \to \mathbb{R}$

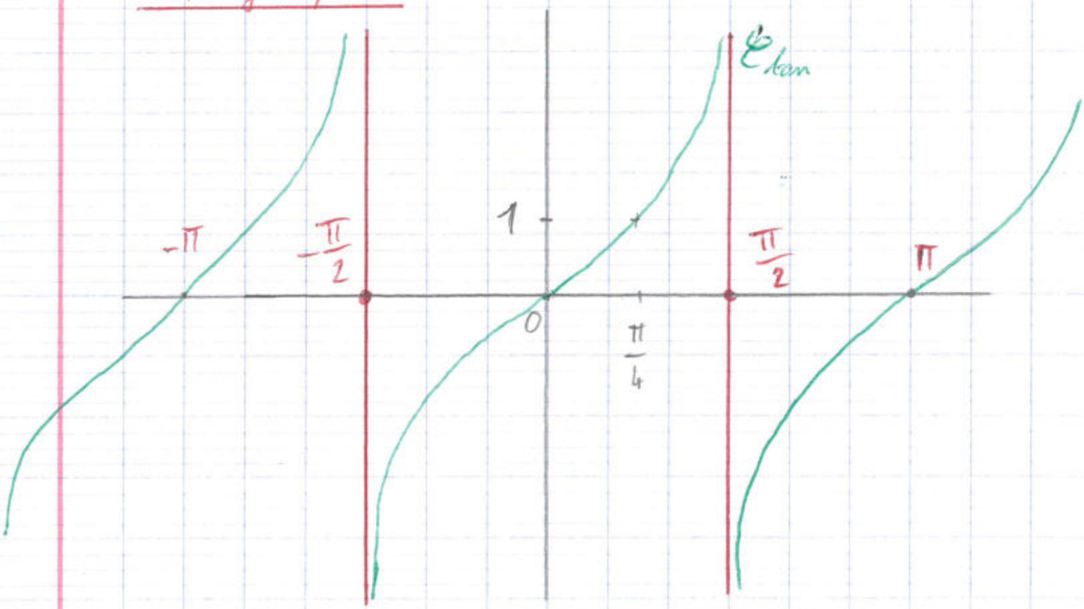
$= \dfrac{\cos^2 - (-\sin)\sin}{\cos^2}$

$= \dfrac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}$

$= \dfrac{1}{\cos^2}$

De plus, $1 + \tan^2 = 1 + \dfrac{\sin^2}{\cos^2} = \dfrac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \dfrac{1}{\cos^2}$

d) Graphe



e) Valeurs remarquables

On a $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$

f) formule d'addition

Prop : Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} a, b \in D_{\tan} \\ (a+b) \in D_{\tan} \end{array}\right\} \Rightarrow \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Rq : ⚠ $\exists\, a, b \in D_{\tan} : a+b \notin D_{\tan}$

$\left(a = b = \frac{\pi}{4}\right)$

Démo : Soit $a, b \in D_{\tan}$ tq $a+b \in D_{\tan}$

On a $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

$= \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$

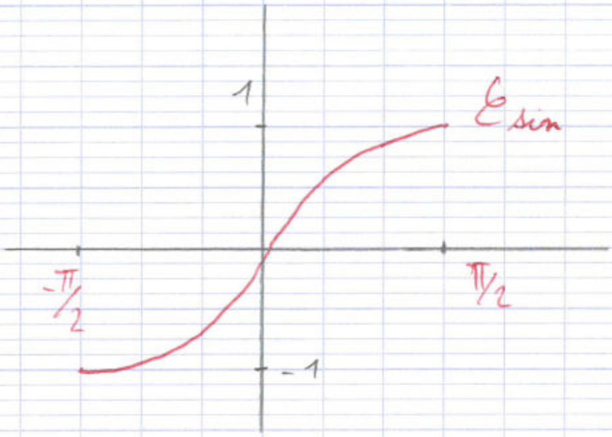
$a, b \in D_{\tan}$
donc $\cos(a), \cos(b) \neq 0$
donc on divise par $\cos(a)\cos(b)$ →

$$= \frac{\frac{1}{\cos(a)\cos(b)}(\ldots)}{\frac{1}{\cos(a)\cos(b)}(\ldots)}$$

$$= \frac{\frac{\sin b}{\cos b} + \frac{\sin a}{\cos a}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \times \frac{\sin b}{\cos b}}$$

2) Arcsin

On a :



On a : $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ est continue et $\nearrow\nearrow$

donc, d'après le thm de la bij monotone

(*) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est bijective

<u>Déf :</u> arcsin $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la réciproque de (*)

On a : . arcsin C^0 (continue)

. arcsin $\nearrow\nearrow$

Ex :

On a $\sin(0) = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1/2$

$\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$

$\sin(\pi/2) = 1$

donc : $0 = \arcsin(0)$

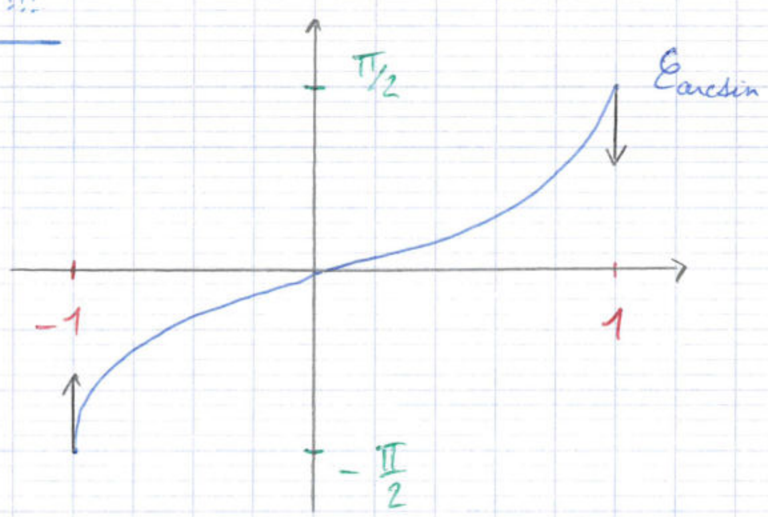
$\pi/6 = \arcsin(1/2)$

$\pi/4 = \arcsin(\sqrt{2}/2)$

$\pi/3 = \arcsin(\sqrt{3}/2)$

$\pi/2 = \arcsin(1)$

Graphe !!!



Relations fondamentales !!

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) = x$$

$$\forall y \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin y) = y$$

Imparité

arcsin est impaire

Démo : Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On a $\sin(-x) = -\sin x$

Donc $\underbrace{\arcsin(\sin(-x))}_{= -x \text{ car } (-x) \in [-\pi/2, \pi/2]} = \arcsin(-\sin x)$

Ceci est vrai pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Soit $y \in [-1, 1]$. On pose $x := \arcsin(y)$

On a : $-\arcsin(y) = \arcsin(-\sin x)$

Or, $\sin(x) = \sin(\arcsin(y)) = y$

CCL : $-\arcsin(y) = \arcsin(-y)$

Ex de calculs

$$\arcsin(\sin(5\pi/6)) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

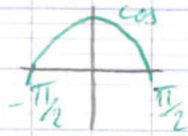
$\sin(\pi - x) = \sin x$

!!! Soit $y \in [-1, 1]$,
on a $\cos(\arcsin(y)) = \,?$

On a $\cos^2(\arcsin(y)) + \underbrace{\sin^2(\arcsin(y))}_{= y^2} = 1$

Or ! , $\arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \geq 0$

Donc , $\cos(\arcsin(y)) \geq 0$



donc $\sqrt{\cos^2(\arcsin(y))} = |\cos(\arcsin(y))|$

$= \cos(\arcsin(y))$

$= \sqrt{1-y^2}$

donc $\boxed{\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}}$

$\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] , \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \right)$

Dérivée de arcsin !!

Prop :

1) arcsin est dérivable sur $]-1,1[$

2) $\forall y \in]-1,1[$, $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Démo : thm dérivée de f^{-1}

Soit $y \in [-1,1]$

1) On a arcsin dérivable en y ssi $\underbrace{\sin'}_{} (\arcsin(y)) \neq 0$ $\overset{\Delta}{}$ ($\sin' = \cos$)

Or $\cos(x) = 0 \iff x = \pm\frac{\pi}{2}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Donc, $y \in D_{\arcsin'} \iff y \neq \pm 1$

2) Si $y \neq \pm 1$, on a $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin(y))}$

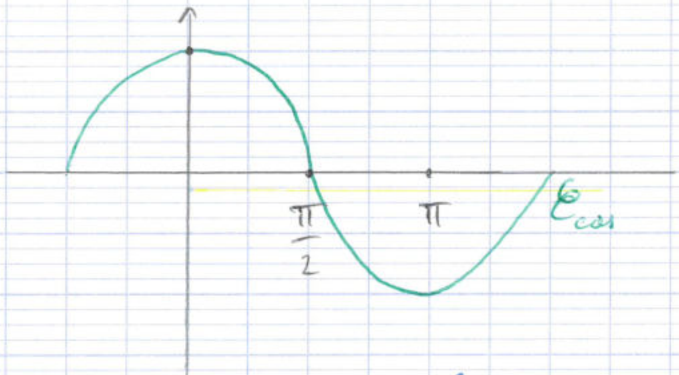
$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

CCL : Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est arcsin

3) Arccos

Dessin



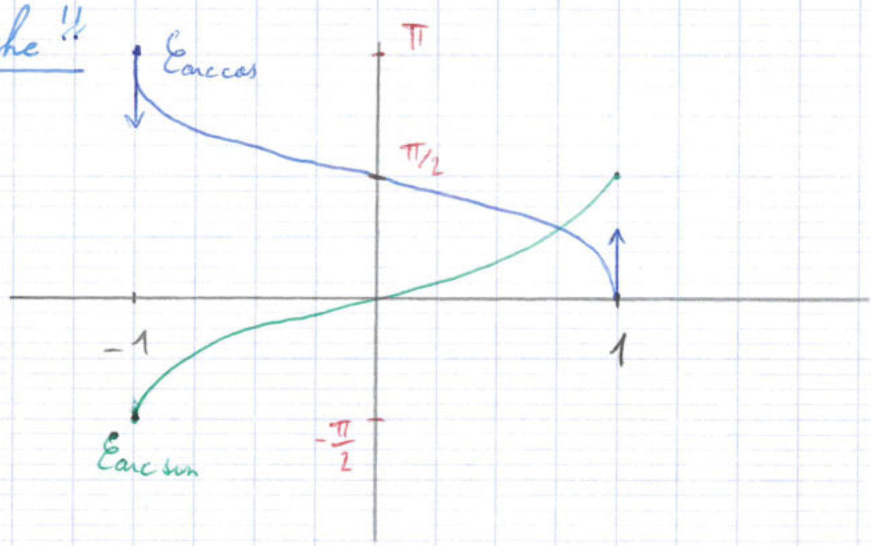
$\cos|_{[0,\pi]}$ est $\searrow\searrow$ et c^0 donc bijective

Déf : la fct arccos est la réciproque de $\cos|_{[0,\pi]}$

Fait : On a

- $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$
- arccos $\searrow\searrow$
- arccos c^0

Graphe !!



RF :

$\forall y \in [-1,1], \cos(\arccos(y)) = y$

$\forall y \in [0,\pi]\ \arccos(\cos(x)) = x$

Calcul

? Mq $\forall y \in [-1,1]$, $\sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}$

Dérivée

Prop

1) $\arccos \in \mathcal{D}(]-1,1[, \mathbb{R})$
2) $\forall y \in]-1,1[$, $\arccos'(y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ démo ?

Une relation

Prop : $\forall y \in [-1,1]$, $\arcsin(y) + \arccos(y) = \dfrac{\pi}{2}$

Rq : Cela donne une rel. géom. entre $\mathcal{E}_{\arccos}$ et $\mathcal{E}_{\arcsin}$

Démo 1: (analytique)

On pose $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$
$y \mapsto \arcsin(y) + \arccos(y)$

On a $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[, \mathbb{R})$

et $\forall y \in]-1,1[$, $\varphi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} = 0$

De plus, $\varphi \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$
donc, φ est constante

Or $\arccos(0)$ est l'angle $\theta \in [0, \pi]$ tq $\cos(\theta) = 0$
ie $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

donc, $\varphi = \widehat{\frac{\pi}{2}}$

Démo 2:

Soit $y \in [-1, 1]$
On écrit $y = \sin(x)$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On a $\frac{\pi}{2} - x \in [0, \pi]$ cf $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$
$[-\pi/2, \pi/2] \xleftarrow{\arcsin} [-1,1]$

On a :
$\arcsin(y) = \arcsin(\sin x) = x$ car $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos(y) = \arccos(\sin x)$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

donc : $\arccos(y) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ $[0,\pi]$

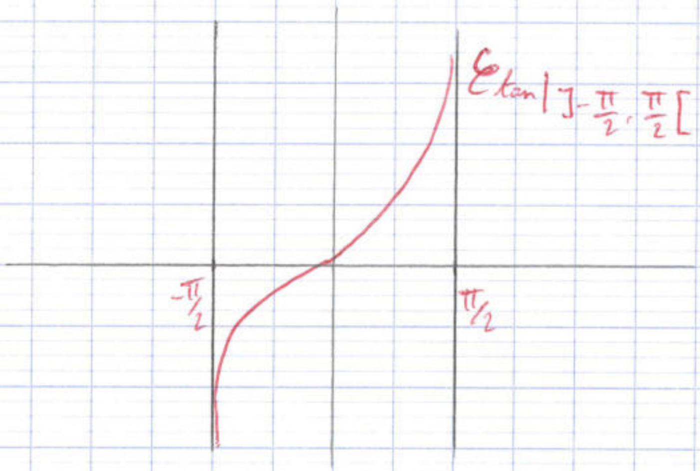
$= \frac{\pi}{2} - x$

En sommant :

$$\arcsin(y) + \arccos(y) = \frac{\pi}{2}$$

4) arctan !!

On a



On a $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ (∗) est c^0 et ↗↗

On a $\tan \underset{-\frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $\tan \underset{\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty$

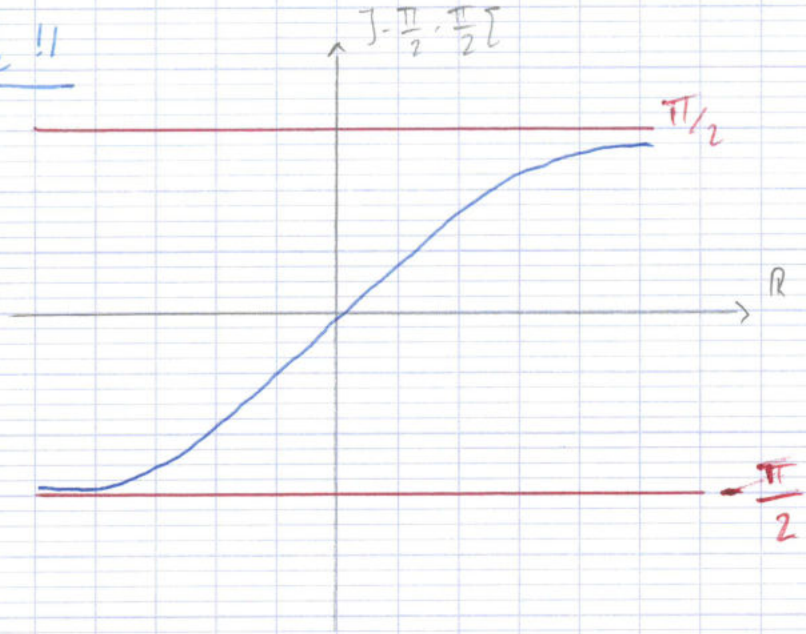
donc (∗) est une bijection d'après le thm de la bij monotone

Déf : la réciproque de (∗) est notée :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Fait : elle est C^0 et ↗↗

Graphe !!



Fait :

a) arctan est impaire

b) $\arctan(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$ et $\arctan(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

⚠ $\underbrace{\arctan}_{\mathbb{R} \to \mathbb{R}} = \frac{\arcsin}{\underbrace{\arccos}_{[-1, 1[\to \mathbb{R}}}$ est faux !! même si on restreint

Relations fondamentales

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \arctan(\tan x) = x$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ \tan(\arctan(y)) = y$$

Dérivée

Prop

1) $\arctan \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2) $\forall y \in \mathbb{R}$, $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$

Démo : modèle de rédaction

D'après le cours, on sait que :

Soit $y \in \mathbb{R}$, arctan est dérivable en y ssi $\tan'(\arctan(y)) \neq 0$

Or, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) \geqslant 1$

Donc $\tan'(\arctan y) \neq 0$
On sait alors que :

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))}$$

$$= \frac{1}{1+y^2}$$

Rq : $\arctan \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$