Chapitre 1

Éléments de logique

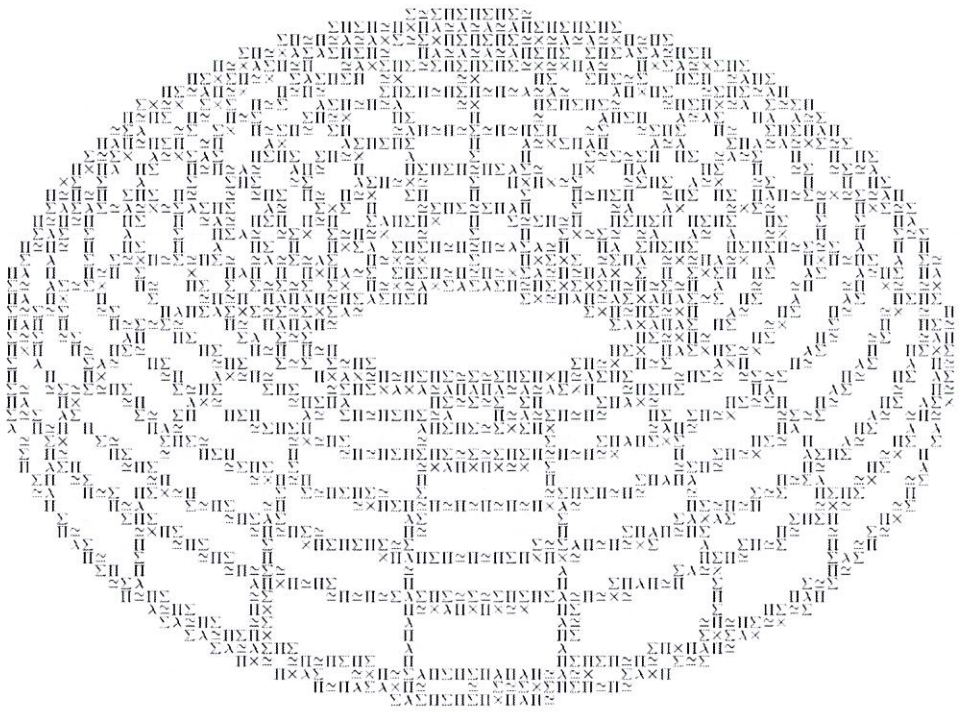


Illustration de couverture du livre
Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics (2013)

Au tournant du vingtième siècle (entre 1880 et 1920), poussées par des paradoxes indépassables, les mathématiciens ont été contraints de s'engager dans une grande tâche de refondation. On a appelé cette période de l'histoire des mathématiques : **la crise des fondements**. *Depuis, les mathématiques ont acquis des fondations solides, formelles.*

À titre d'exemple important, mentionnons Les éléments de mathématiques, *écrits collectivement par un groupe de mathématiciens réunis sous le pseudonyme de Nicolas* BOURBAKI. *Cette œuvre, commencée en 1935, avait pour objectif de présenter toutes les mathématiques contemporaines en ne partant de « rien ».*

Récemment, sous l'impulsion du mathématicien Vladimir VOEVODSKY *(1966–2017), une nouvelle approche de fondation des mathématiques a émergé, appelé « fondation univalente ».*

Dans ce premier chapitre du cours de mathématiques, on se donne un but analogue — mais qu'on poursuivra avec moins de rigueur : définir un cadre dans lequel on peut dire et faire des mathématiques.

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

1

Éléments de logique

plan de cours et principaux résultats

I. Deux notations, une abréviation

1) Le symbole $:=$

2) Le « ssi de définition »

3) La locution *ie*

II. Assertions

1.1

1) Définition

a) Assertions

b) La locution « on a »

Convention 1.1

Si P est une assertion, on écrira « On a P » pour dire que P est vraie.

2) Variables libres, variables liées/muettes, prédicats

3) Vocabulaire

III. Opérations sur les assertions

1.5

1.4

1) Négation

2) Conjonction

3) Disjonction

4) Négation de la conjonction, négation de la disjonction

a) Un calcul

b) Interchangeabilité

5) Lois de De Morgan

Proposition 1.2 Ⓣ

1) $\text{non}\big(\text{non}(P)\big) \equiv P$

2) $\text{non}\big(P \text{ et } Q\big) \equiv \text{non}(P) \text{ ou non}(Q)$

3) $\text{non}\big(P \text{ ou } Q\big) \equiv \text{non}(P) \text{ et non}(Q)$

6) Implication

a) Définition
b) Exemples
c) Vocabulaire
d) Implication réciproque
e) Principe de contraposition

Proposition 1.3 Ⓣ

$$(P \implies Q) \equiv \big(\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)\big)$$

f) Négation de l'implication

Proposition 1.4 Ⓣ

$$\text{non}(P \implies Q) \equiv \big(P \text{ et } \text{non}(Q)\big)$$

g) Ne pas confondre « donc » et « $\implies$ »
h) Une autre écriture de $P \implies Q$

7) Équivalence

a) Définition
b) Lien entre équivalence et implication
c) Vocabulaire
d) Ne pas confondre « *ie* » et « $\iff$ »

8) Double-distributivité entre « et » et « ou »

Proposition 1.5 Ⓣ

1) $(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \equiv (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$
2) $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \equiv (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$

9) Chaînes d'implication

IV. Tautologies

1) Définition

a) Formules propositionnelles
b) Définition des tautologies
c) Exemples

2) Principe du tiers-exclu

3) Raisonnement par l'absurde

V. Quantificateurs

1.8 ⚓
1.14 ⚓

1) Quantificateur universel

a) Définition
b) Assertions universellement quantifiées sur le vide

Proposition 1.6
L'assertion « $\forall x \in \varnothing$, $P(x)$ » est toujours vraie.

c) Notations

2) Quantificateur existentiel
- a) Définition
- b) Notations
- c) Quantificateur d'existence unique
- d) Vocabulaire

3) Ordre des quantificateurs
- a) Non-interchangeabilité $\forall - \exists$
- b) Interchangeabilités $\forall - \forall$ et $\exists - \exists$

4) « Pour tout x tel que... »

5) Négation des quantificateurs

Proposition 1.7 Ⓣ

1) $\text{non}\big(\forall x \in E,\, P(x)\big) \;\equiv\; \exists x \in E : \text{non}\big(P(x)\big)$
2) $\text{non}\big(\exists x \in E : P(x)\big) \;\equiv\; \forall x \in E,\, \text{non}\big(P(x)\big)$

VI. Démonstrations : méthodes et exemples

1.31 1.18 1.24 1.47

1) $\forall$-assertions

2) Implications

3) Démonstration par contraposition

4) Équivalences

5) Démonstration par disjonctions de cas

6) $\forall \Rightarrow$-assertions

7) Démonstrations par l'absurde

8) $\exists$-assertions
- a) Explicitement
- b) En invoquant une autre $\exists$-assertion
- c) Par analyse-synthèse

9) Assertions d'existence unique

10) Démonstration par analyse-synthèse

VII. Principes de récurrence

2.22 2.19 2.17

1) Récurrences simples

2) Récurrences doubles

3) Récurrences fortes

4) Autres types de récurrence

VI Demonstration : méthodes et Exemples

1) ∀ - Assertions

Pour montrer que " $\forall x \in E, P(x)$ ", on fixe :

"Mq $\forall x \in E, P(x)$"

Soit $x \in E$.

Montrons que $P(x)$

(...)

Ainsi, $P(x)$

Ainsi, on a montré, " $\forall x \in E, P(x)$ "

Exemple :

Mq $\forall x > 0, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$) dis

Soit $x > 0$

Mq $x + \frac{1}{x} \geq 2$) dis

M^q Delta + Reflexe Je préfère ≥0 à ≤0 = $\mathbb{R}^x$

Posons $\Delta := x + \frac{1}{x} - 2$

On a $\Delta = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x}$

Mise au même dénominateur, ie factoriser

$\Delta = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

Ainsi $x + \frac{1}{x} \geq 2$

CCl : Ainsi, on a $\boxed{\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2}$) dis

2) Implications

Pour mq "$P \Rightarrow Q$", on fera

"Montrons $P \Rightarrow Q$

| Supposons P
| Montrons Q
| | (...)
| Ainsi, on a Q

Ainsi on a montré $P \Rightarrow Q$

Exemple : Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\Rightarrow n^2$ pair

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\Rightarrow n^2$ pair

| Soit $n \in \mathbb{Z}$
| Mq n pair $\Rightarrow n^2$ pair
| | Supposons n pair
| | Montrons que n^2 pair
| | | Comme n est pair, fixons $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k$
| | | On a $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
| | Ainsi, n^2 est pair
| Ainsi, on a n pair $\Rightarrow n^2$ pair

ccl : on a mq $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}}$

3) Démonstration par contraposition

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Mq n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

Par contraposition, mq n impair $\Rightarrow$ n^2 impair

Supposons n impair

Mq n^2 impair

Comme n impair, fixons $k \in \mathbb{Z}$, $n = 2k+1$

On a $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

Ainsi, n^2 est impair

Par contraposition, on a mq n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

Ainsi, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

CCl : on a mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

4) Equivalences

⚠ On raisonne par double-~~équivalence~~-implication

Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on fera

Mq $P \Leftrightarrow Q$

On raisonne par double-implication

Mq $P \Rightarrow Q$

(...)

Ainsi, on a $P \Rightarrow Q$

Mq $Q \Rightarrow$

(...)

Ainsi, on a $Q \Rightarrow P$

CCl. Par double implication, on a mq $\boxed{P \Leftrightarrow Q}$

Ex :

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair

~~Procédons par double~~ :

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Mq n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair

On raisonne par double-implication (ORDI)

- Mq n pair $\Rightarrow$ n^2 pair

  Supposons n pair

  Mq n^2 pair

  Ĉ n pair, fixons $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k$

  On a $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

  Ainsi n^2 pair

  Donc n pair $\Rightarrow$ n^2 pair

- Mq n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

  On raisonne par contraposition

  Mq n impair $\Rightarrow$ n^2 impair

  Supposons n impair

  Mq n^2 impair

  Ĉ n impair, Fixons $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k+1$

  On a $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

  Ainsi, on a n^2 impair

Ainsi, ~~n^2 pair $\Rightarrow$ n pair~~ n impair $\Rightarrow$ n^2 impair

Ainsi n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

Ainsi, n^2 pair $\Leftrightarrow$ n pair

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ pair}}$

5) Par disjonction de cas

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Mq $\frac{(n+1)n}{2} \in \mathbb{Z}$

On distingue deux cas

- Premier cas : on suppose n pair

  Fixons $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k$

  On a

  $$\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$$

  Dans ce cas $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

- Deuxième cas, on suppose n impair

  Donc n+1 est pair

  D'après le premier cas : $\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \in \mathbb{Z}$

  or $\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n+1}{2} + (n+1)$

  Comme $n+1 \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas, on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Dans tout les cas, on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

CCl : **On a mq $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$**

Rq : 1) Évidemment, on aurait pu dire "$n = 2k+1$ ..."

2) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$

3) (T) (R*) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

!!!

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

4) (T) (R*) $[\![0, n]\!]$ a $n+1$ él^{nts}

Donc $[\![0, n-1]\!]$ a n éléments

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-0)(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(k-1))}{k!}$$

(exo) Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\iff n^3$ pair

(exo) Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ n pair $\iff n^k$ pair

Rq (T) : $\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1))}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))(n-k)\cdots 2\cdot 1}{k!(n-k)(n-(k+1))\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$ (OHAA)

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rq (T) : $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdots k} \cdot \frac{(n+1)}{(k+1)}$

$$= \frac{(n+1)\, n\, (n-1) \cdots (n-(k-1))}{(k+1)!}$$

(AC) ! $= \binom{n+1}{k+1}$

F^{mle} d'absorption

F^mle d'absorption :

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad (*)$$

(AF) Démontrer $(*)$ avec $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

6) $\forall \Rightarrow$ - assertion

Pr montrer que " $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ " on fera

"Mq $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$

| Soit $x \in E$ tel que $P(x)$
| Montrons que $Q(x)$
| |
| Ainsi, on a $Q(x)$

Ainsi, on a mq $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$

Exemple : (on admet : $\forall x > 0,\ \sqrt{x} > 0$) (exo)

Mq $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante

($\mathbb{R}^*$) c'est une $\forall$-assertion, mieux, une $\forall\Rightarrow$-assertion

i.e. mq $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

| Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tq $x < y$
| Mq $\sqrt{x} < \sqrt{y}$
| | On pose $\Delta := \sqrt{y} - \sqrt{x}$
| | On a $y > x$ donc $y > 0$ donc $\sqrt{y} > 0$
| | donc $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$
| | On a $\Delta = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \frac{y - x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0$
| Donc, on a $\sqrt{x} < \sqrt{y}$

Ainsi, on a mq $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

Rq : Mq $\forall x>0,\ \sqrt{x}>0$

Soit $x>0$

Mq $\sqrt{x}>0$

On supp. que $\sqrt{x}\leq 0$

Ĉ $\sqrt{x}<0$ ou $\sqrt{x}=0$

donc $x=(\sqrt{x})^2=0^2=0$

c'est absurde

Donc $\sqrt{x}>0$

Donc $\forall x>0,\ \sqrt{x}>0$

7) Demo par l'absurde

P (Md) Δ

Ex : Mq $\sqrt{2}$ est irrationnel

ORPA et on supp que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

Fixons donc $p,q\in\mathbb{Z}$ tq $\begin{cases} q\neq 0 \\ \sqrt{2}=\frac{p}{q} \\ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \end{cases}$

On a $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, i.e. on a

$p^2=2q^2$

donc p^2 est pair

Or, $\forall n\in\mathbb{Z}$, n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair, donc p est pair

Fixons $k\in\mathbb{Z}$ tel que $p=2k$

On a $(2k)^2=2q^2$ donc $2k^2=q^2$

donc q^2 est pair, donc q est pair

c'est absurde car p,q sont pairs et premiers entre eux

Ainsi, $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exo Mq $\sqrt{5}>3\sqrt{3}-3$

8) ∃ - Assertions

Pour montrer que " $\exists\, x \in E : P(x)$ " On fera

" Mq $\exists\, x \in E : P(x)$

Posons $x_0 := \dots$ On a $x_0 \in E$

On a $P(x_0)$

Ainsi, On a $\exists\, x \in E : P(x)$

Ex : Mq $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{R}\ .\ x < z < y$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x < y$

Mq $\exists\, z \in \mathbb{R} : x < z < y$

Posons $z_0 := \frac{x+y}{2}$

On a $x < y$ donc $x + x < x + y$

donc $x < \frac{x+y}{2}$, i.e. $x < z_0$

Et On a $x < y$ donc $x + y < y + y$

donc $\frac{x+y}{2} < y$, i.e. $z_0 < y$

Ainsi, $x < z_0 < y$

Donc $\exists\, z \in \mathbb{R} : x < z < y$

Ccl : On a mq $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} :$ ~~$x < y$~~ $x < z < y$

Rq Soient $x < y$, alors

$\frac{x+y}{2}$ est le milieu de $[x; y]$ (R*)

$y - x$ est la longueur de $[x; y]$ (R*)

$\frac{y-x}{2}$ est le rayon de $[x; y]$ (R*)

On a $\begin{cases} x + \frac{y-x}{2} = \frac{x+y}{2} \\ y - \frac{y-x}{2} = \frac{x+y}{2} \end{cases}$ (AC)

b) en invoquant une autre ∃-assertion

Mq $\exists x \in E : P(x)$

On sait que $\exists y \in F : Q(y)$

Fixons un tel y

(...)

"On utilise ce y pour construire un x_0 convenable"

(...)

Ex : Mq $\forall a,b \in \mathbb{R}, \overset{a<b}{\forall} \exists x,y \in \mathbb{R} : a < x < y < b$

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $a<b$

Mq $\exists x,y \in \mathbb{R} : a<x<y<b$

Je sais que : $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \overset{\alpha}{a}<\beta \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\alpha < \gamma < \beta$

Donc en particulier (pour $\alpha = a$ et $\beta = b$),

On sait que $\exists x_0 \in \mathbb{R} : a < \overset{x_0}{\blacksquare} < b$

Fixons un tel x_0.

De même, en particulier avec $\alpha = x_0$ et $\beta = b$ on a

$\exists y_0 \in \mathbb{R} : x_0 < y_0 < b$

Fixons un tel y_0

On a $a < x_0 < y_0 < b$

Donc : $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{R} : a < x_0 < y_0 < b$

Ccl : $\forall a,b \in \mathbb{R}, a<b \Rightarrow \exists x,y \in \mathbb{R} : a<x<y<b$

c) Analyse synthèse

cf voir plus loin

g) $\exists ! \, x \in E : P(x)$

Mq $\exists ! \, x \in E : P(x)$

- Existence
  - cf (8)
  - ~~Rq~~
  - (...)
- Unicité
  - Soit $x_1, x_2 \in E$ tq $P(x_1)$ et $P(x_2)$
    - Mq $x_1 = x_2$
      - (...)
    - Ainsi, $x_1 = x_2$
- D'où l'unicité

CCl : on a mq $\exists ! \, x \in E : P(x)$

Ex : On admet l'existence de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(Mq : si $x \in \mathbb{R}$, on pose $\exp(x) := \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

(Rq : $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 - 5n + 8 - \frac{1}{n}} = 2$)

Mq $\exists ! f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{cases} f \text{ dérivable} \\ f' = f \text{ et } f(0) = 1 \end{cases}$

(Rq : Si P et Q sont des assertions, on note $\begin{cases} Q \\ P \end{cases} := P \text{ et } Q$)

Existence : ok car $\exp' = \exp$

Unicité :

Soit $f \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} f \text{ est dérivable} \\ f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Mq $f = \exp$

Astuce : Posons $g := \frac{f}{\exp}$

Cette def° est légitime car $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$

La fonction g est dérivable

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot \exp(x) - f(x) \cdot \exp'(x)}{\exp^2(x)}$$

$$= \frac{f(x) \exp(x) - f(x) \cdot \exp(x)}{(\dots)}$$

$g'(x) = 0$

donc g est cnte

or $g(0) = \frac{1}{1} = 1$

donc $g = 1$

donc $f = \exp$

!!! 10) Analises - Synthèses

L'AS permet de trouver des solt°

L'AS permet de

- résoudre des éq° "compliquées"
- mq des ∃-Assertions
- mq des ∃!-assertions

Si on veut trouver tous les $x \in E$ tels que $P(x)$, on fera

Ex : résoudre $\sqrt{x^2-3x+2} = |x-3|$

- Analyse

  Soit $x \in E$ tel que $P(x)$:

  donc

  donc

  donc

  (...)

  donc $x=1$ ou $x=2$ (par exemple)

- Synthèse

  Posons $x = 1$

  Mq $P(x)$. Souvent, on écrit "Vérifions que $P(x)$"

  (...)

  CCl : (...)

Ex : Résolvons l'équation $\sqrt{x^2-3x+2} = |x-5|$

ORPAS

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x^2-3x+2} = |x-5|$

Donc $x^2-3x+2 = (x-5)^2$

ie $x^2-3x+2 = x^2-10x+25$

donc $7x = 23$, i.e. $x = \frac{23}{7}$

Synthèse

Posons $x := \frac{23}{7}$ Vérifions $P(x)$

On a $x^2 - 3x + 2 = \frac{23^2 - 3 \times 23 \times 7 + 2 \times 7^2}{7^2}$

Astuce de calcul $= \frac{23(23-21) + 2 \times 49}{7^2}$

$= \frac{144}{49} = \left(\frac{12}{7}\right)^2$

donc $\sqrt{x^2-3x+2} = \frac{12}{7}$

de plus $|x-5| = 5 - \frac{23}{7} = \frac{35-23}{7} = \frac{12}{7}$

Donc $\sqrt{x^2-3x+2} = |x-5|$

CCl: L'ensemble S des solution est $\left\{\frac{23}{7}\right\}$

ou ~~Donc l'ensemble~~

Donc $\left\{x, \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2-3x+2} = |x-5|\right\} = \left\{\frac{23}{7}\right\}$

Rq: Si à l'issue de l'analyse, on a ne trouve qu'une valeur possible, alors on a montré l'unicité, On l'écrira à la fin de l'analyse (modulo l'existence)

Mq $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :$ $\begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Mq $\exists g, h \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: "

ORPAS

Analyse

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $f(x) = g(x) + h(x)$

$f(-x) = g(-x) + h(-x)$

donc $f(-x) = g(x) - h(x)$

donc $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$

Rq Ainsi, si g existe on sait qu'elle est unique

et $h(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Synthèse

Posons $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \to \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \to \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Vérifions que $\begin{cases} f = g+h \\ h \text{ impaire} \\ g \text{ paire} \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a

$$g(x)+h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$$

et $g(-x) = \dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2}$

$$= \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$$

et $h(-x) = f(-x) - (-(-x))$

$$h(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = -h(x)$$

Ainsi h impaire, g paire et $f = g+h$

Ainsi, $\exists\, g,h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$: (...)

CCl On a mq $\forall f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\exists\, g,h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$: (...)

VII Principe de récurrence (rec)

1) (rec) simple

Thm : (Principe de (rec))

Soit $P(n)$ un prédicat de $n \in \mathbb{N}$

Ex : $P(n) = n^2$ pair

On suppose que :

1) $P(0)$ est vrai

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$

D/ ORPA et osp $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; non $P(n)$

Posons $A := \{ n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ est fausse} \}$

On sait que $A \neq \emptyset$

Notons n_0 le plus petit élément de A

On a $n_0 \in A$. Ĉ $P(0)$ est vrai ; $n_0 \neq 0$

et donc $n_0 \geq 1$

Posons $n_1 := n_0 - 1$

On a : $n_1 \in \mathbb{N}$ car $n_0 \geq 1$

$n_1 < n_0$

Donc : $P(n_1)$ est vrai

Or, on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(n+1)$

Donc $P(n+1)$ est vrai, i.e $P(n_0)$ est vrai

Absurde on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)}$

§3 >

Ex et modèle de rédaction

Soit $a \in \mathbb{R}$ tq $a \neq 1$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ " $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ "

Mq par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$

- Mq $P(0)$

  On a $\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1$

  et $\frac{a^{0+1}-1}{a-1} = 1$

  $\mathbb{R}^{\times}$

  $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$

  $0^0 = 1$

  d'où $P(0)$

- Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$

  Mq $P(n+1)$

  On a $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1}$

  $= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+(a-1)a^{n+1}}{a-1}$

  $= \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{(n+1)+1}-1}{a-1}$

  D'où $P(n+1)$

  D'où l'hérédité

Ainsi, par (rec), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

2) Recurrences doubles

Prop : Soit $P(n)$ un predicat de $n \in \mathbb{N}$ tel que :
- $P(0)$ et $P(1)$ sont V
- $\forall n \in \mathbb{N}, \big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2)$

Alors, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

D/ (exo)*

Rque :
- Ecrire $P(n)$: " $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq 2^n$ " est un Bug$^\infty$. Que serait $P(0)$? ce qui n'a pas de sens.
- De même, on peut faire des recurrences triples, etc. (exo) l'énoncer

Ex : Considérons (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; U_{n+2} = 3U_{n+1} - U_n \end{cases}$$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n = 2^n + 1$

ORP (rec)

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $U_n = 2^n + 1$ "

On a $P(0)$

En effet : $U_0 = 2 = 2^0 + 1$

On a $P(1)$

En effet $U_1 = 3 = 2^1 + 1$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ et $P(n+1)$

Mq $P(n+2)$

On a $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$

D'après $P(n)$ et $P(n+1)$,

$$u_{n+2} = 3(2^{n+1}+1) - 2(2^n+1)$$

$$= 3\cdot 2^{n+1} + 3 - 2^{n+1} - 2$$

$$= 2^{n+2} + 1$$

D'où $P(n+2)$

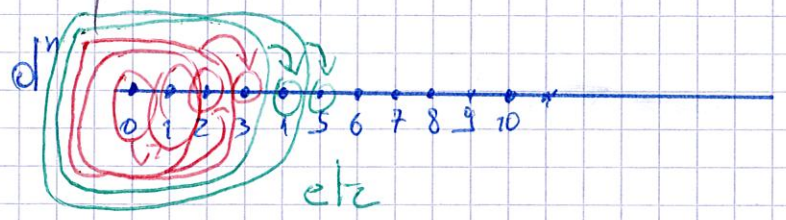
D'où l'hérédité double

Ccl : par rec double, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$

3) Récurrence Forte

Pour mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ par (rec) forte, on doit faire

- mq $P(0)$
- mq $P(n+1)$ en utilisant si on veut $P(n), P(n-1) \dots P(0)$



La (rec) forte est (+) puissante que la (rec) simple

Mais H

Thm Soit $P(n)$ un prédicat de $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(0)$ vraie et $\forall k \in [\![0;n]\!]$

* D/ On introduit un nouveau prédicat $Q(n)$ défini par

$$Q(n) : \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(k)$$

pour $n \in \mathbb{N}$

On a $Q(0)$ vrai

En effet, $P(0)$ est V donc on a bien $\forall k \in [\![0;0]\!], P(k)$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $Q(n)$

Mq $Q(n+1)$

Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$

Mq $P(k)$

On distingue deux cas

- Si $k \in [\![0, n]\!]$, on a bien $P(k)$ car on a supposé $Q(n)$ vraie
- Mq $P(n+1)$

  On a supposé dans l'énoncé

  $\forall m \in \mathbb{N}, \left(\forall p \in [\![0, m]\!] \; P(p)\right) \Rightarrow P(n+1)$

  ie $\forall m \in \mathbb{N}, Q(m) \Rightarrow Q(m+1)$

  En particulier, on a $Q(n) \Rightarrow P(n+1)$

  or $Q(n)$ vraie

  Donc $P(n+1)$ vraie

D'où $P(k)$

D'où : $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $P(k)$; ie $Q(n+1)$

Donc, on a mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

Par rec, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, (HC)

Ex : Mq $\forall$ entier ≥ 2 est le produit de nombres premiers

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "n est le produit de nb premiers"

Mq $\forall n \geq 2$, $P(n)$ par (rec) forte

- $P(2)$ est vrai, en effet, 2 est premier
- Mq $\forall n \geq 2$, $\left(\forall k \in [\![2, n]\!], P(k)\right) \Rightarrow P(n+1)$

  Soit $n \geq 2$ tq $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $P(k)$

  Mq $P(n+1)$

  On distingue 2 cas :

  Si $n+1$ est

Sinon, (i.e. si $(n+1)$ n'est pas premier, il est composé)

Fixons donc $k, \ell \in [\![2; n]\!]$ tq :

$n+1 = k \cdot \ell$

$\hat{C}$ $P(k)$ et $P(\ell)$ sont vraies, (HC), k et ℓ peuvent s'écrire $\hat{C}$ produit de nb premiers

D'é même pour $P(n+1)$

D'où l'hérédité forte

D'où $\forall n \geq 2$, $P(n)$

Rq : on a $(\forall x \in [0,1],\ x^2 \leq x)$ et $(\forall x > 1,\ x^2 > x)$

⚠ $\forall$ ne fixe pas la valeur de la variable

4) Autres types de (rec)

- Les initialisations peuvent commencer à 1, 2 etc
- On peut faire des (rec) descendantes
- On peut faire des (rec) finies ascendantes ou descendantes
-

Annexe du cours

① Dans "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$", la variable "$x$" est liée
Ce n'est pas un prédicat de x

"$x \geq 2$" est un prédicat de x

PP15 D/ $(P \Rightarrow Q) \equiv (\text{non}(Q) \Rightarrow (\text{non}(P))$

On a

P	Q	non Q	non P	non Q ⇒ non P
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

PP16 D/ $\text{non}(P \Rightarrow Q) \equiv (P \text{ et non}(Q))$

On a

P	Q	P ⇒ Q	non(P⇒Q)	non Q	P et non Q
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

② Ex de mauvaise utilisation de "$\Leftrightarrow$"

Soit $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + 4x + 20 = 0$

On a $x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow (x+2) = \pm 4$

Bonne red° n°1

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x^2 + 4x - 12 = 0$

On a $x^2 + 4x - 12 = 0$, ie $(x+2)^2 - 4 - 12 = 0$

i.e. $(x+2)^2 - 16 = 0$ ie $(x+2)^2 = 0$ ie $(x+2)^2 = 4^2$

ie on a $(x+2) = \pm 4$

Très Bonne rédo

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x^2 + 4x - 12 = 0$

On a : $x^2 + 4x - 12 = (x+2)^2 - 4 - 12$

$= (x+2)^2 - 16$

Comme $x^2 + 4x - 12 = 0$, on a $(x+2)^2 - 4^2 = 0$

ie $(x+2)^2 = 4^2$ ie $x+2 = \pm 4$

D/ PP20

On a

P	Q	R	P et Q	R	(P et Q) ou R
V	V	V	V		V
V	V	F	V		V
V	F	V	F		V
V	F	F	F		F
F	V	V	F		V
F	V	F	F		F
F	F	V	F		V
F	F	F	F		F

et

P	Q	R	P ou R	Q ou R	(P ou R) et (Q ou R)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F

De $\hat{m}$, on a $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \equiv (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$

D/ En effet, pour $x = -2$, $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ est fausse. En effet, "$x^2 = 4$" est vrai, mais, "$x = 2$" est F

Rq : c'est le seul n qui marche

D/PP 25. 1) À faire

* ③ Rq : si $P(x)$ est un prédicat de $x \in E$, alors dans "$\forall x \in E, P(x)$" la variable "x" est liée / muette

"$x^2 \geq 0$" x libre

"$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" x liée

D'une certaine façon, on a l'analogie

Σ / +

$\forall$ / et

En effet, si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de réels

On a $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots x_n$

Si $P(i)$ est un prédicat $i \in [\![1 ; n]\!]$, on a

"$\forall i \in [\![1 ; n]\!], P(i)$" $\equiv$ $P(1)$ et $P(2)$ et... et $P(n)$

"$\forall x \in E, P(x)$" $\equiv$ "$\forall x, (x \in E \Rightarrow P(x))$"

si $E = \emptyset$, $x \in E$ tjrs faux donc $x \in E \Rightarrow P(x)$

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq$ $:\equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0$

$\forall x \geq 0, P(x) :\equiv \forall x \in \mathbb{R}+, P(x)$

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, on note

$[\![a ; b]\!] = \mathbb{Z} \cap [a ; b]$

④ Considérons le texte

"On a $(\exists\, n \in \mathbb{R} : x^2 = 8)$ et

$(\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 7)$

On a $x^2 - 5 = 7 - 5 = 2$."

Si je sais que "$\exists\, x \in E : P(x)$" est vraie,

je dois, pour utiliser cette assertion, écrire "Fixons un tel $x \in E$"

CCl : Posons / Notons $:=$

$\exists\, x \in E : P(x)$ → Fixons un tel $x \in E$

qu'on sait être vraie

et qu'on veut utiliser

Nous "f est croissante"

On sait que "f est croissante" $\equiv \forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Rq