Chapitre 1

Éléments de logique

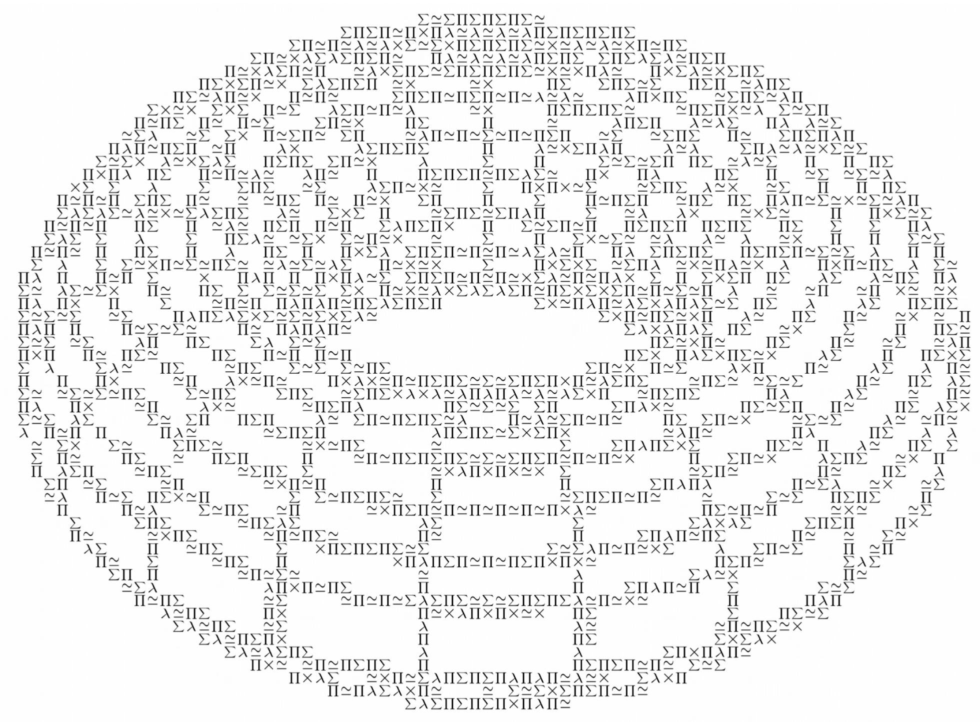

Illustration de couverture du livre
Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics (2013)

Au tournant du vingtième siècle (entre 1880 et 1920), poussées par des paradoxes indépassables, les mathématiciens ont été contraints de s'engager dans une grande tâche de refondation. On a appelé cette période de l'histoire des mathématiques : **la crise des fondements**. *Depuis, les mathématiques ont acquis des fondations solides, formelles.*

À titre d'exemple important, mentionnons Les éléments de mathématiques, *écrits collectivement par un groupe de mathématiciens réunis sous le pseudonyme de Nicolas* Bourbaki. *Cette œuvre, commencée en 1935, avait pour objectif de présenter toutes les mathématiques contemporaines en ne partant de « rien ».*

Récemment, sous l'impulsion du mathématicien Vladimir Voevodsky *(1966–2017), une nouvelle approche de fondation des mathématiques a émergé, appelé « fondation univalente ».*

Dans ce premier chapitre du cours de mathématiques, on se donne un but analogue — mais qu'on poursuivra avec moins de rigueur : définir un cadre dans lequel on peut dire et faire des mathématiques.

Sommaire

I. Deux notations, une abréviation

1) Le symbole $:=$

Notation LGQ.**1**
Soit « A » une variable qui n'est pas encore utilisée.
Soit x une expression qui est déjà définie.
On note

$$A := x$$

pour introduire la variable A en la définissant comme étant égale à x.
*On dit alors qu'*on a posé A égal à x.

Pour utiliser le symbole « $:=$ », on emploie les verbes « poser » ou « noter ».

Exemples
Ainsi, on pourra écrire :

- Posons $A := \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $B := \dfrac{1}{x^2+1}$.

2) Le « ssi de définition »

Le symbole « $\overset{\triangle}{ssi}$ » est l'analogue pour les définitions du symbole « $:=$ ».
Il se lit « si et seulement si de définition ».
Vous n'aurez jamais à l'utiliser dans une copie : il sera uniquement utilisé dans le cours et uniquement dans les définitions.
Plutôt qu'en donner une définition formelle, on montre sur un exemple comment il s'emploie.

Exemple
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est croissante $\overset{\triangle}{ssi}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).$$

3) La locution *ie*

On utilisera « *ie* » pour abréger « *id est* » qui est une locution latine signifiant « c'est-à-dire ».

Exemple
Ainsi, on pourra écrire : « Le nombre 42 est un entier naturel *ie* un entier positif ou nul ».

II. Assertions

1) Définition

a) Assertions

Définition (informelle) LGQ.**2**
Une assertion est une phrase ayant un sens et susceptible d'être vraie ou fausse.

Exemples

- « Socrate est un chat »
- « Il existe une infinité de nombres premiers »
- « Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha^2 = 2$ »
- « Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha^2 = 2$ ».
  Cette assertion est fausse.

Les assertions seront notées P, Q, R, *etc.*
Dans la suite, on abrègera « vrai » par « V » et « faux » par « F ».

Remarques

- Dans ce chapitre, on utilise beaucoup les guillemets, pour distinguer les phrases qui parlent des assertions et les phrases qu'on considère comme assertions.
- Dans les chapitres suivants, où l'on *fera* des mathématiques (par opposition à ce chapitre où l'on *définit le cadre* dans lequel les fera), on n'utilisera plus les guillemets, sauf pour introduire les prédicats $P(n)$ démontrés par récurrence.

b) La locution « on a »

Convention LGQ.**3**
Si P est une assertion, on écrira « On a P » pour dire que P est vraie.

Exemple

- On a $1 + 1 = 2$.

2) Variables libres, variables liées/muettes, prédicats

Définition (informelle) LGQ.**4**

- *Une assertion P peut dépendre d'une variable x.*
  - ▷ *On la note alors $P(x)$.*
  - ▷ *On dit alors que $P(x)$* est un prédicat *de x.*
- *Si $P(x)$ dépend de x, on dit que x* est une variable libre *(dans $P(x)$)*
- *Sinon, on dit que x est une variable liée/muette.*

De même, on note $P(x, y)$ quand P dépend des variables x et y.

Exemples de prédicats

- « n est pair » est un prédicat de $n \in \mathbb{Z}$.
- « f est croissante » est un prédicat de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (*ie* de f fonction réelle).

Exemples de variables liées/muettes

- Dans l'assertion « $\sum_{k=0}^{42} k$ est pair » : la variable k est liée/muette.
- Dans l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ » : la variable x est liée/muette.

Exemples de variables libres

- Dans l'assertion « $3x + 2 = 0$ » : la variable x est libre.
- Dans l'assertion « n est pair » : la variable n est libre.
- Dans l'assertion « f est croissante » : la variable f est libre.

Exemples mixtes

- Dans l'assertion « $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ » : la variable t est liée/muette et la variable f est libre.
- Dans l'assertion

$$\text{« } \forall x, y \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y) \text{ »}$$

les variables x et y sont liées/muettes et la variable f est libre ; il s'agit donc d'un prédicat de f.

Informellement, on retiendra :

- si une variable est libre : elle est libre pour être remplacée par un objet défini ;
- si une variable est muette : elle ne dit rien ; la remplacer par une autre variable ne change pas le sens de l'assertion.

En pratique, si quand vous remplacez dans une assertion la variable x par 42 vous obtenez une phrase syntaxiquement dénuée de sens, c'est que la variable x est liée/muette ; elle n'est pas remplaçable, elle n'est pas libre.

3) Vocabulaire

- Une assertion vraie est un *fait*.
- Une *propriété* est un fait.
- Un fait notable est appelé *proposition*.
- Un *théorème* est une proposition importante.
- Un *lemme* est un fait qu'on énonce pour l'utiliser dans la démonstration d'une proposition ; c'est un résultat intermédiaire.
- Un *corollaire* est un fait qui se déduit facilement d'une proposition.
- Une *conjecture* est une assertion qu'on pense être vraie mais qu'on ne sait pas démontrer.
- Un *axiome* est une assertion qu'on ne peut pas prouver (ou qu'on pense être indémontrable) et qu'on suppose vraie.

III. Opérations sur les assertions

Soient P, Q et R des assertions.

1) Négation

Définition LGQ.**5**
La négation de P, notée $\mathrm{non}(P)$ *est l'assertion qui est vraie quand P est fausse et qui est fausse quand P est vraie.*

On dispose ainsi du schéma suivant, qu'on appelle *table de vérité* :

P	$\mathrm{non}(P)$
V	F
F	V

2) Conjonction

Définition LGQ.**6**
La conjonction de P et Q, notée $(P \text{ et } Q)$ *est l'assertion qui est vraie quand P est vraie et Q est vraie, et qui est fausse sinon.*

La table de vérité de la conjonction est :

P	Q	$(P \text{ et } Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Remarque
Dans $(P \text{ et } Q)$ et dans les notations qui suivent, on pourra omettre les parenthèses si le contexte, l'espacement, *etc.* rendent la lecture non ambiguë.

3) Disjonction

Définition LGQ.**7**
La disjonction de P et Q, notée $(P \text{ ou } Q)$ *est l'assertion qui est vraie quand P est vraie ou Q est vraie, et qui fausse sinon.*

La table de vérité de la disjonction est :

P	Q	$(P \text{ ou } Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque
Le « ou » mathématique n'est pas *exclusif* : si P et Q sont toutes les deux vraies alors $(P \text{ ou } Q)$ est aussi vraie. Le « ou » du langage courant est souvent exclusif. Quand on dit que le menu comprend « fromage ou dessert », on veut dire que c'est ou bien l'un ou bien l'autre (mais pas les deux).

4) Négation de la conjonction, négation de la disjonction

a) Un calcul

Proposition LGQ.**8**
Les tables de vérité de $\text{non}(P \text{ et } Q)$ *et de* $\big(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\big)$ *sont identiques.*

Démonstration. — ....

....

....

....

....

.... ∎

b) Interchangeabilité

Plutôt que de donner une définition formelle de l'interchangeabilité, on la définit sur un exemple.
Comme $\text{non}(P \text{ et } Q)$ et $\big(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\big)$ ont des tables de vérité identiques, on pourra toujours interchanger ces deux assertions sans changer le sens des textes où elles apparaissent.

Définition (informelle) LGQ.**9**
On dira que $\text{non}(P \text{ et } Q)$ et $\big(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\big)$ sont interchangeables *et on notera*

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \;\equiv\; \big(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\big).$$

5) Lois de De Morgan

Proposition LGQ.**10**
On a :

1) $\text{non}\big(\text{non}(P)\big) \equiv P.$
2) $\text{non}\big(P \text{ et } Q\big) \equiv \text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q).$
3) $\text{non}\big(P \text{ ou } Q\big) \equiv \text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q).$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ∎

6) Implication

a) Définition

Définition LGQ.**11**
L'implication de Q par P, *notée* $(P \implies Q)$ *est l'assertion définie par la table de vérité*

P	Q	$(P \implies Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On retiendra que si P est fausse, alors l'assertion $P \implies Q$ est vraie quelle que soit l'assertion Q.

Exemple

- L'assertion
$$\text{« Le Père Noël existe »} \implies 0 = 1$$
est vraie.
- Autrement dit, l'assertion
$$\text{« Si le Père Noël existe alors } 0 = 1 \text{ »}$$
est vraie.

b) Exemples

Exemples

- L'implication « ABCD carré $\implies$ ABCD rectangle » est vraie.
- L'implication « ABCD rectangle $\implies$ ABCD carré » est fausse.
- L'implication « $x = 2 \implies x^2 = 4$ » est vraie quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$.

Fait LGQ.**12**
L'implication
$$x^2 = 4 \implies x = 2$$
n'est pas vraie quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. — ....

....

....

.... ■

c) Vocabulaire

- Dans $P \implies Q$,
  - ▷ P est appelée *prémisse* ;
  - ▷ Q est appelée *conclusion*.
- Si $P \implies Q$ est vraie, on dit que
  - ▷ P implique Q ;
  - ▷ Q est une *condition nécessaire* à P ;
  - ▷ P est une *condition suffisante* à Q ;
  - ▷ pour que P (soit vraie), il faut que Q (le soit) ;
  - ▷ pour que Q (soit vraie), il suffit que P (le soit).

⚠ Attention
L'usage dans le langage courant de « il suffit » ou de « il faut » est parfois contraire à l'usage mathématique : faites attention ! Par exemple, ne dites pas « *pour connaître les variations de f, il faut calculer sa dérivée* » mais « *pour connaître les variations de f, il suffit de connaître le signe de sa dérivée* ».

d) Implication réciproque

Définition LGQ.13
La réciproque de $P \implies Q$ est l'assertion $Q \implies P$.

⚠ Attention
En général, si $P \implies Q$ est vraie, il n'y a aucune raison que $Q \implies P$ le soit.
Par exemple, l'implication

« ABCD carré $\implies$ ABCD rectangle »

est vraie mais

« ABCD rectangle $\implies$ ABCD carré »

est fausse.

e) Contraposée

Définition LGQ.14
La contraposée de $P \implies Q$ est l'assertion $\mathrm{non}(Q) \implies \mathrm{non}(P)$.

Proposition LGQ.15
On a

$$(P \implies Q) \equiv \big(\mathrm{non}(Q) \implies \mathrm{non}(P)\big).$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

.... ■

f) Négation de l'implication

⚠ Attention
- En aucun cas, la négation de $P \implies Q$ n'est :
  - ▷ $Q \implies P$
  - ▷ $\mathrm{non}(P) \implies \mathrm{non}(Q)$
- En fait, la négation de $P \implies Q$ n'est pas une implication !
- La négation de « x est breton $\implies$ x est sympa » n'est pas
  - ▷ « x est sympa $\implies$ x est breton »
  - ▷ « x n'est pas breton $\implies$ x n'est pas sympa ».
- La négation de « x est breton $\implies$ x est sympa » est : « il existe (au moins) un breton x_0 qui n'est pas sympa ».

Nier $P \implies Q$, c'est trouver un contre-exemple à $P \implies Q$: c'est donc trouver un cas où P est vraie et où Q est fausse. Autrement dit, nier $P \implies Q$, c'est montrer $\big(P \text{ et } \mathrm{non}(Q)\big)$.
Autrement dit, $\mathrm{non}(P \implies Q)$ correspond à $\big(P \text{ et } \mathrm{non}(Q)\big)$.

Ceci est vrai formellement.

Proposition LGQ.**16**
On a

$$\mathrm{non}(P \implies Q) \equiv \big(P \text{ et } \mathrm{non}(Q)\big).$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

.... ■

g) Ne pas confondre « donc » et « $\implies$ »

Attention
On n'utilisera **jamais** « $\implies$ » pour abréger la locution « donc ».

Ces connecteurs sont complètement différents, comme le montrent les phrases suivantes :
- « Si Socrate est un chat alors Socrate est mortel »
- « Socrate est un chat » $\implies$ « Socrate est mortel »
- « Socrate est un chat donc Socrate est mortel »

h) Une autre écriture de $P \implies Q$

Proposition LGQ.**17**
On a

$$P \implies Q \equiv \big(\mathrm{non}(P) \text{ ou } Q\big).$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

Remarque
Cette interchangeabilité se retrouve dans le langage courant. On pourra comparer les phrases

« Si tu manges trop de sucre, tu auras des problèmes de santé »
et « Ne mange pas trop de sucre ou tu auras des problèmes de santé ».

7) Équivalence

a) Définition

Définition LGQ.18
L'équivalence entre P et Q, *notée* $(P \iff Q)$ *est l'assertion définie par la table de vérité*

P	Q	$(P \iff Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

b) Lien entre équivalence et implication

Proposition LGQ.19
On a
$$P \iff Q \equiv \big((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)\big).$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ∎

c) Vocabulaire

Si $P \iff Q$ est vraie, on dit que
- P équivaut à Q ;
- P est une *condition nécessaire et suffisante* à Q ;
- P (est vraie) *si et seulement si* Q (est vraie) ;

d) Ne pas confondre « *ie* » et « $\iff$ »

⚠ Attention
On n'utilisera **jamais** « $\iff$ » pour abréger la locution « *ie* ».

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparez les phrases suivantes.
- ▷ « On a $2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}$ ».
  ▷ Plus explicitement, la phrase précédente signifie « On a : $2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}$ ».
- « On a $2x > 1$, *ie* on a $x > \frac{1}{2}$ ».

La première phrase dit que « $2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}$ » (ce qui est vrai, quelle que soit la valeur de x).
La dernière phrase affirme qu'on a $2x > 1$ (ce qui n'est pas toujours vrai) et donc qu'on a, de façon équivalente, $x > \frac{1}{2}$.

⚠ Attention
Ce qui précède est relativement subtil et doit absolument être compris.

8) Double-distributivité entre « et » et « ou »

Proposition LGQ.20
On a
1) $(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \equiv (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$
2) $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \equiv (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$

Remarque

On rapprochera ces résultats du fait : $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (a+b)c = ac + bc$.

Démonstration. — ....

9) Chaînes d'implication

Proposition LGQ.21
On a

$$(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R) \text{ et } (R \implies P)$$
$$\equiv$$
$$(P \iff Q) \text{ et } (Q \iff R) \text{ et } (R \iff P).$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ∎

Ainsi, si on veut montrer que trois assertions sont équivalentes entre elles, il suffit de montrer trois implications alors qu'en théorie il en aurait fallu six.

Remarques

- On a écrit des assertions du type $(A \text{ et } B \text{ et } C)$. Cette écriture est ambiguë car elle peut signifier

$$(A \text{ et } B) \text{ et } C \qquad \text{ou bien} \qquad A \text{ et } (B \text{ et } C).$$

  Comme on peut prouver que $(A \text{ et } B) \text{ et } C \equiv A \text{ et } (B \text{ et } C)$, on a le droit de ne pas préciser le parenthésage.
- On dit que la conjonction est *associative*.
- La proposition précédente se généralise à plus que trois assertions.

IV. Tautologies

1) Définition

a) Formules propositionnelles

Soient P, Q, R, *etc.* des assertions.

Définition (informelle) LGQ.22
Une formule propositionnelle *est une expression bien formée à l'aide*

- *des lettres* P, Q, R, etc.
- *des opérateurs logiques* « non », « et », « ou », « $\implies$ » *et* « $\iff$ »
- *des valeurs de vérité* V *et* F.

On les note généralement $f(P, Q, \ldots)$.

Exemples

Voilà des exemples de formules propositionnelles.

- $P \implies (Q \implies R)$
- $(P \text{ et } Q) \implies \Big(\text{non}(R) \implies (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))\Big)$
- $P \implies \mathsf{F}$

b) Définition des tautologies

Définition LGQ.23
Soit $f(P, Q, \ldots)$ *une formule propositionnelle.*
On dit que $f(P, Q, \ldots)$ est une tautologie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $f(P, Q, \ldots) \equiv \mathsf{V}$.

c) Exemples

Voici des tautologies :

- $P \implies P$
- $P \iff P$
- $(P \text{ et } Q) \implies P$
- $P \implies (P \text{ ou } Q)$
- $\mathsf{F} \implies P$
- $\big((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R)\big) \implies (P \implies R)$
- $\big((P \implies Q) \text{ et } (P \implies R)\big) \implies \big(P \implies (Q \text{ et } R)\big)$
- $\big(P \text{ et } (P \implies Q)\big) \implies Q$
- $\Big((P \implies R) \text{ et } (Q \implies R)\Big) \implies \big((P \text{ ou } Q) \implies R\big)$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

2) Principe du tiers-exclu

Proposition LGQ.**24**
La formule propositionnelle $\big(P \text{ ou } \operatorname{non}(P)\big)$ *est une tautologie.*

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

Remarque
Autrement dit, si P est une assertion alors P est vraie ou P est fausse.

3) Raisonnement par l'absurde

Proposition LGQ.**25**
Les formules propositionnelles suivantes sont des tautologies :

1) $\big(\operatorname{non}(P) \implies P\big) \implies P$;
2) $\big(\operatorname{non}(P) \implies \mathsf{F}\big) \implies P$.

Remarques
Cette proposition est tout à fait remarquable !

- La première tautologie affirme que
$$\big(\operatorname{non}(P) \implies P\big) \implies P$$
est toujours vraie. Ainsi, si on parvient à démontrer $\big(\operatorname{non}(P) \implies P\big)$, on pourra en déduire que P est vraie.
- De même, la deuxième tautologie affirme que
$$\big(\operatorname{non}(P) \implies \mathsf{F}\big) \implies P$$
est toujours vraie. Ainsi, si on parvient à déduire de $\operatorname{non}(P)$ quelque chose de faux, on pourra en déduire que P est vraie.
- En général, c'est le deuxième raisonnement qui est utilisé.
- Ainsi, une démonstration par l'absurde commencera toujours par la supposition que P est fausse, *ie* que $\operatorname{non}(P)$ est vraie et se poursuivra en général par la recherche d'une contradiction.

Démonstration. — ....

....

....

.... ■

V. Quantificateurs

Soient E et F des ensembles.
Soit $P(x)$ un prédicat de $x \in E$.

1) Quantificateur universel

a) Définition

Définition (informelle) LGQ.**26**
L'assertion « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est l'assertion qui est vraie quand $P(x)$ est vraie quelles que soient les valeurs dans E prises par x.

Exemples

- « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ » est vraie.
- « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1$ » est fausse.
  En effet, pour $x = 0$, l'assertion $x^2 \geqslant 1$ est fausse car $0^2 \geqslant 1$ est fausse.

b) Assertions universellement quantifiées sur le vide

Proposition LGQ.**27**
L'assertion « $\forall x \in \varnothing,\ P(x)$ » est toujours vraie.

Remarque
Le mot « toujours » dans la proposition n'a pas de sens mathématique. Il est là pour insister sur le fait que l'assertion « $\forall x \in \varnothing,\ P(x)$ » est vraie quel que soit le prédicat $P(x)$.

Justification. — Pour comprendre cette proposition, on part du principe que l'assertion « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est une notation pour l'assertion

$$« \forall x,\ \big(x \in E \implies P(x)\big) ».$$

Maintenant on suppose que $E = \varnothing$. Soit x un objet mathématique quelconque. Alors, l'assertion « $x \in \varnothing$ » est fausse : en effet, $\varnothing$ ne contient aucun élément. Donc, l'assertion « $x \in \varnothing \implies P(x)$ » est vraie, par définition du connecteur logique « $\implies$ ».
Ainsi, l'assertion « $\forall x,\ \big(x \in \varnothing \implies P(x)\big)$ » est vraie et donc « $\forall x \in \varnothing,\ P(x)$ » est vraie. ■

Exemple
L'assertion « $\forall x \in \varnothing,\ 1 = 0$ » est vraie.

c) Notations

- Si $Q(x,y)$ est un prédicat de $x \in E$ et $y \in E$, on notera

$$« \forall x, y \in E,\ Q(x,y) »$$

l'assertion « $\forall x \in E,\ \big(\forall y \in E,\ Q(x,y)\big)$ ».

- Dans les conditions adéquates, on notera

$$« \forall x \geqslant 0,\ P(x) »$$

l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(x)$ ».

- De même, on notera « $\forall x > 0,\ P(x)$ » ou « $\forall x \geqslant 1, P(x)$ », *etc.*
- Si $P(n)$ est un prédicat de $n \in \mathbb{N}^*$, on notera

$$« \forall n \geqslant 1,\ P(n) »$$

l'assertion « $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)$ ».

Remarque
On voit ainsi qu'en général, par tradition, la lettre n représente implicitement un entier. Cette petite ambiguïté est courante et n'empêche pas en pratique de faire des mathématiques.

Exemples
Voici des assertions. Lesquelles sont vraies ?

- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geqslant 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \geqslant y$ ou $x < y)$
- $\forall x, y \geqslant 0,\ x^2 \geqslant x^2 + y$
- $\forall x, y \geqslant 1,\ x^2 \geqslant x - y$

2) Quantificateur existentiel

a) Définition

Définition (informelle) LGQ.28
L'assertion « $\exists x \in E : P(x)$ » est l'assertion qui est vraie quand il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.

Exemples

- L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$ » est vraie.
- L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$ » est fausse.

Remarque
Si E est vide, l'assertion $\exists x \in E : P(x)$ est toujours fausse.

Attention

- Si on a « $\exists x \in E : P(x)$ », on ne peut pas utiliser l'objet x directement. Il faut le définir auparavant.
- On écrira :
  « *On a* $\exists x \in E : P(x)$. ***Fixons*** *un tel* $x \in E$. »
- Par exemple, on écrira :
  « *On a* $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha^2 = 2$. *Fixons un tel* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On a alors*
  $$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)(1-\alpha)} = \frac{1-\alpha}{1^2-\alpha^2} = \frac{1-\alpha}{1-2} = \alpha - 1 \text{ ».}$$
- Autre exemple, on écrira :
  « *Soit* $n \in \mathbb{Z}$ *un entier pair. Fixons donc* $\ell \in \mathbb{Z}$ *tel que* $n = 2\ell$ ».
  Dans ce dernier exemple, la $\exists$-assertion qui est vraie est sous-entendue. En effet, dire que « n est pair », c'est dire affirmer que l'assertion « $\exists \ell \in \mathbb{Z} : n = 2\ell$ » est vraie.

b) Notations

- Soit $Q(x, y)$ est un prédicat de $x \in E$ et $x \in F$.
  - ▷ On notera
    $$\text{« } \exists x \in E, \exists y \in F : Q(x, y) \text{ »}$$
    l'assertion « $\exists x \in E : \big(\exists y \in F : Q(x, y)\big)$ ».
  - ▷ Si $E = F$, on notera
    $$\text{« } \exists x, y \in E : Q(x, y) \text{ »}$$
    l'assertion « $\exists x \in E, \exists y \in E : Q(x, y)$ ».
- On notera, dans les conditions adéquates, « $\exists x \geqslant 0 : P(x)$ », *etc.*

Exemple

- La définition de $\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ est
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N,\ \left|\frac{1}{2^n}\right| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$
- Dans cette assertion, la partie « $\forall n \geqslant N$ » est ambiguë : le contexte et le fait que la lettre utilisée soit « n » permettent de lever cette ambiguïté.
- Une autre ambiguïté est la partie « $\forall \varepsilon > 0$ ».
- Des versions respectivement moins ambiguë et complètement non ambiguë de la définition de $\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ sont
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant N \implies \left|\frac{1}{2^n}\right| \leqslant \varepsilon\right) \tag{2}$$
  $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant N \implies \left|\frac{1}{2^n}\right| \leqslant \varepsilon\right). \tag{3}$$
- On préfèrera toujours une version claire, légère et formellement ambiguë à une version formellement non ambiguë et plus lourde.
- Ici, la version (1) est préférable à (2), qui elle-même est préférable à (3).

c) Quantificateur d'existence unique

Définition (informelle) LGQ.**29**
L'assertion « $\exists ! x \in E : P(x)$ » est l'assertion qui est vraie quand il existe un et un seul élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.

Exemples

- L'assertion « $\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \exists ! \alpha \in \mathbb{R} : \alpha^2 = A$ » est fausse.
- L'assertion « $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists !(a, b) \in \mathbb{R}^2 : z = a + ib$ » est vraie.
- L'assertion « $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists !(a, b) \in \mathbb{C}^2 : z = a + ib$ » est fausse.

d) Vocabulaire

- Une assertion du type « $\forall x \in E,\ P(x)$ » sera appelée une $\forall$-*assertion*.
- Une assertion du type « $\exists x \in E : P(x)$ » sera appelée une $\exists$-*assertion*.
- Une assertion du type « $\forall x \in E,\ P(x) \implies Q(x)$ » sera appelée une $\forall\!\Rightarrow$-*assertion*.

3) Ordre des quantificateurs

Soit $Q(x, y)$ un prédicat de $x \in E$ et $y \in F$.

a) Non-interchangeabilité $\forall - \exists$

En général, les assertions

$$\forall x \in E, \exists y \in F : Q(x, y) \tag{1}$$
$$\exists y \in F : \forall x \in E, Q(x, y) \tag{2}$$

ne sont pas du tout interchangeables.

- ▷ Dans l'assertion (1), le « y » qui existe dépend *a priori* de x.
  ▷ Existe-t-il un « y » qui conviennent pour tous les $x \in E$? En général et *a priori* : non.
- Dans l'assertion (2), en revanche, on affirme qu'il existe un « y » qui convient pour tous les $x \in E$.
- On pourra dire qu'on a une *existence globale* dans (2), alors que dans (1), on a uniquement une *existence locale*.

Exemple

- Ainsi, l'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : x \leqslant M$ est vraie.
- Mais, l'assertion $\exists M \in \mathbb{R} :\ \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant M$ est fausse.
- Assimilez parfaitement ces deux exemples et comprenez-les bien.

En revanche, on a toujours

$$\Big(\exists y \in F : \forall x \in E, Q(x, y)\Big) \implies \Big(\forall x \in E, \exists y \in F : Q(x, y)\Big).$$

Une existence globale implique des existences locales.

⚠ Attention
On retiendra que l'ordre des quantificateurs est crucial, ne doit pas être négligé ni choisi « au hasard » et doit être bien compris.

b) Interchangeabilités $\forall - \forall$ et $\exists - \exists$

Deux quantificateurs identiques sont interchangeables. Plus précisément :

Proposition LGQ.**30**

On a :

1) $\forall x \in E, \forall y \in F,\ Q(x,y) \ \equiv\ \forall y \in F, \forall x \in E,\ Q(x,y)$
2) $\exists x \in E, \exists y \in F :\ Q(x,y) \ \equiv\ \exists y \in F, \exists x \in E :\ Q(x,y)$

Démonstration. — On admet cette proposition. ∎

Remarques

- Le lecteur attentif aura remarqué qu'on n'a pas défini la relation d'interchangeabilité (notée « $\equiv$ ») pour les assertions quantifiées. L'idée de l'interchangeabilité reste la même : deux assertions sont interchangeables quand elles sont équivalentes de façon purement formelle.
- Une possibilité serait de définir « $\equiv$ » en imposant qu'elle satisfasse aux relations données ci-dessus, *ie* de considérer que ces relations sont des axiomes.
- Un traitement complètement rigoureux et formel de ces questions serait l'objet d'un cours de Master 2, ce qui est ici complètement hors de propos.

4) « Pour tout x tel que... »

On a parfois envie d'énoncer des assertions affirmant que « pour tout $x \in E$ tel que $P(x)$, on a $Q(x)$ ».

Exemple

- « Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que n^2 est pair et n^3 est multiple de 3, on a n qui est multiple de 6. »

⚠ Attention

On n'écrira pas

$$\forall x \in E \text{ tel que } P(x), \text{ on a } Q(x)$$
$$\forall x \in E/P(x), \text{ on a } Q(x)$$
$$\forall x \in E : P(x),\ Q(x).$$

Toutes ces écritures sont syntaxiquement incorrectes.

On écrira :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \ P(x) \implies Q(x).}$$

Exemple

- L'assertion précédente s'écrit formellement

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ (2 \mid n^2 \text{ et } 3 \mid n^3) \implies 6 \mid n.$$

5) Négation des quantificateurs

Proposition LGQ.**31**
On a :

1) $\text{non}\big(\forall x \in E,\ P(x)\big) \ \equiv\ \exists x \in E : \text{non}\big(P(x)\big)$
2) $\text{non}\big(\exists x \in E : P(x)\big) \ \equiv\ \forall x \in E,\ \text{non}\big(P(x)\big)$

Démonstration. — Elle est admise.
Le lecteur devra impérativement comprendre le sens intuitif de ces deux résultats. ■

Exemple
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
L'assertion « f croissante » est par définition :

$$\text{« } f \text{ croissante » } := \text{« } \forall x, y \in \mathbb{R},\ \left(x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\right) \text{ ».}$$

Sa négation est

$$\text{non}\Big(\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ \left(x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\right)\ \Big).$$

Une compétence fondamentale est de savoir « calculer » une assertion plus simple qui lui est interchangeable. Ici, on trouve :

$$\text{non}\Big(\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ \left(x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\right)\ \Big)$$

$$\equiv$$

....

....

....

....

....

....