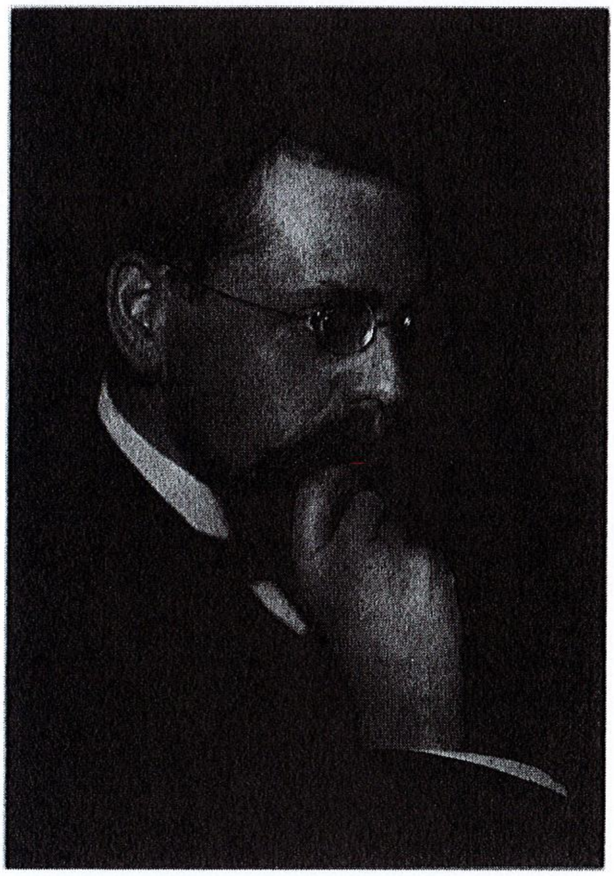
Chapitre 2

Théorie des ensembles I

Ensembles



Ernst ZERMELO (1871 – 1953)
Mathématicien allemand à qui l'on doit, avec FRAENKEL,
l'axiomatisation de la théorie des ensembles la plus utilisée.

La théorie des ensembles joue le rôle en mathématiques de théorie fondamentale : toutes les autres théories peuvent être formulées à l'intérieur de la théorie des ensembles.

Elle constituera donc pour nous un langage qu'il faut absolument maîtriser.

La théorie des ensembles la plus utilisée est la théorie de Zermelo-Fraenkel (avec axiome du choix), aussi appelée théorie ZFC.

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

2

Théorie des ensembles I

Ensembles

plan de cours et principaux résultats

I. Ensembles

1) Définitions et notations

2) Description d'ensembles

a) Par extension
b) Par compréhension
c) Par paramétrisation

3) L'ensemble vide

4) Inclusion, parties d'un ensemble

a) Définitions
b) Propriétés

5) Cardinal

II. Opérations sur les parties d'un ensemble

3.7
3.14
3.11

1) Union

2) Intersection

3) Deux caractérisations de l'inclusion

4) Double-distributivité

5) Complémentaire d'une partie

III. Deux constructions

3.24
3.29

1) Produit cartésien

a) Définitions et remarques
b) Cardinal

2) Ensemble des parties

3.27

a) Définitions et exemples
b) Cardinal

IV. Familles de parties

3.27 ♯♯

1) Notion de famille

2) Intersection et union d'une famille de parties

Définition 2.1 Ⓣ

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \left\{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\right\}$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \left\{x \in E \mid \exists i \in I :\ x \in A_i\right\}.$$

3) Partitions et recouvrements

4) Cardinal

ch2
Ensembles

I Ensembles

1) Def et notations

- Un ensemble E est une collection
- Si x est un objet de E, on dit que x appartient à E,
  On note $x \in E$
- Sinon, on note $x \notin E$

Ex : $\mathbb{N}$, $[0;1]$, {Margot, Charles}, MPSI 3, $\{0;1\}$

Un ensemble peut contenir n'importe quel objet donc un ensemble peut contenir un objet

$E_0 := \{[0,1],]0,1], [0,1[,]0,1[\}$

A-t-on $1 \in E_0$?

- Déjà, E_0 a 4 éléments
  Aucun de ces éléments ~~n'appartient~~ n'est 1, donc $1 \notin E_0$

Autre façon de voir : $\exists x \in E_0 : x = 1$?

Mais on a $\exists x \in E_0 : 1 \in x$

Rq**: On admet l'axiome de fondation :

pour tout ensemble E, on a $E \notin E$

2) Description d'ensembles

a) Par extension

Ex : on pose $E := \{1, 5, 8, 13\}$

Rq : un élément ne peut appartenir qu'une seule fois à un ensemble

Donc on a $\{0,1,2,2,2,2\} = \{0,1,2\}$

Rq : L'ordre ne compte pas

On a $\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{2,3,1\} \dots$

Rq : on a $3! = 6$ façons de noter l'ensemble

b) Par compréhension "Le menu comprend le café"

Notation : Soit E un ensemble
Soit $P(x)$ un prédicat de $x \in E$

On note $\{ x \in E \mid P(x \}$

est l'ensemble des $x \in E$ tels que $P(x)$ est vrai

Rq** : On a ainsi

$$\forall x \in E, \ P(x) \iff x \in \{ a \in E \mid P(a \}$$

Ex : $\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 \geqslant 3 \text{ et } x^2 - 2x - 5 \geqslant 0 \}$

est une partie de $\mathbb{R}$ définie par compréhension

AB Rq : Soit $x \in \mathbb{R}$, rédaction

on a $x^2 - 2x - 5 \geqslant 0 \iff x \leqslant x_0$ ou $x \geqslant x_1$

on a posé $x_0 := \frac{2 - 2\sqrt{6}}{2}$ et $x_1 := \frac{2 + 2\sqrt{6}}{2}$

et on a $2x + 1 \geqslant 3 \iff x \geqslant 1$

CCl, on a :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 - 2x - 5 \geqslant 0 \\ 2x + 1 \geqslant 3 \end{cases} \iff x \geqslant 1 + \sqrt{6}$
- i.e. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 5 \geqslant \text{ et } 2x+1 \geqslant 3 \} = [1 + \sqrt{6} ; +\infty[$

Rque : Résoudre une équation, c'est passer d'1 écriture par compréhension à une écriture par extention

Ex, on a $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 5 = 0\}$

$$= \{1 - \sqrt{6} ; 1 + \sqrt{6}\}$$

c) Par paramétrisation

Ex : on pose $E := \left\{ \frac{1}{1+t^2} ; t \in \mathbb{R} \right\}$

Alors E est l'ensemble des valeurs prises par l'expression $\frac{1}{1+t^2}$ quand t parcourt $\mathbb{R}$

3) L'ensemble vide

C'est l'unique ensemble qui ne contient aucun élement, on le note $\emptyset$

4) Inclusion

Déf° : Soient E, F ens

On dit que F est inclus dans E ssi $\forall x \in F \; x \in E$

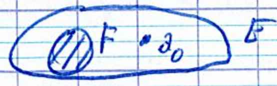
On note alors $F \subset E$ ou $F \subseteq E$

On dit que F est une partie de E.

On note ~~[illegible]~~ $E \not\subset F$ quand E n'est pas inclus dans F, ie $\exists x_0 \in F : x_0 \notin E$

· Plus subtil, on note $F \subsetneq E$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

($F \subset E$ et $F \neq E$). On dit que F est strictement inclus dans E

d^n  : on a $F \subsetneq E$

on a $F \not\subset E$

b) Propriétés

Proposition : Soit E, F, G des ensembles

On a : 1) $E \subset E$
2) $\emptyset \subset E$
3) $(E \subset F \text{ et } F \subset G) \Longrightarrow E \subset G$

D/ 1) En effet, on a bien $\forall x \in E,\ x \in E$
2) En effet, on a $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$: cf Logique
3) Mq $\left.\begin{array}{l} E \subset F \\ F \subset G \end{array}\right\} \Longrightarrow E \subset G$

Supposons que $E \subset F$ et $F \subset G$,
Mq $E \subset G$ $\quad (R^x)^{\text{III}} \longrightarrow \forall$-assertion
i.e., mq $\forall x \in E,\ x \in G$

Soit $x \in E$,
Mq $x \in G$
On a $E \subset F$, $\hat{C}$ $x \in E$, on a $x \in F$
On a $F \subset G$ $\hat{C}$ $x \in F$ on a $x \in G$

Donc, on a montré $E \subset G$

Ainsi, on a mq $\left.\begin{array}{l} E \subset F \\ F \subset G \end{array}\right\} \Longrightarrow E \subset G$

Rq : 1) On obtient ainsi un canevas de preuve pour $E \subset F$

Mq $E \subset F$

Soit $x \in E$

Mq $x F$

(...)

Ainsi, $x \in F$

CCl : On a $E \subset F$

2) L'assertion 3) dit que l'inclusion est transitive

1) dit qu'elle est reflexive

Prop (T) : $E = F \iff (E \subset F$ et $F \subset E)$

D/ On l'admet, c'est l'axiome ~~d'extensibilité~~ extensionnabilité

- C'est le principe de double-inclusion
- D'où le Canevas !∞ pour montrer que $E = F$

" Mq $E = F$ par double-inclusion

- Mq $E \subset F$

  (...) canevas précédent

- Mq $F \subset E$

  (...)

CCl : Par double inclusion, on a $E = F$

5) Cardinal

Si E est un ensemble fini, on appelle cardinal de E le nombre d'élément de E. On le note

$$\mathrm{Card}(E),\ |E| \text{ ou } \#E$$

Rq : c'est informel mais ce sera formalisé + tard

⚠ On n'écrit pas Card($\mathbb{N}$) car $\mathbb{N}$ est infini

Ex : on a $|\{1, 8, 12\}| = 3$

II Opérations sur les parties d'un ensembles

Soit E un ensemble

a) l'union

Def° : Soient A et B des parties de E

L'union de A et B, notée $A \cup B$, est la partie de E définie par :

$$A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

dⁿ

Propositions :

Soient $A, B, C \subset E$. on a

1) $A \cup A = A$
2) $A \cup \emptyset = A$
3) $A \subset A \cup B$
4) $A \cup B = B \cup A$
5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Rq : Soit E un ens et soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats de $x \in E$. On note

$$A_P := \{x \in E \mid P(x)\}$$

$$A_Q := \{x \in E \mid Q(x)\}$$

Alors on a $A_P \subset A_Q \iff \forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$

D/ exo

Ex : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad 6|n \Rightarrow 2|n$

On a alors $\{n \in \mathbb{Z} \mid 6|n\} \subset \{n \in \mathbb{Z} \mid 2|n\}$

En particulier, $A_P = A_Q \iff \left(\forall x \in E, P(x) \iff Q(x)\right)$

Ainsi, deux ensembles définis par compréhension sont égaux ssi les prédicats qui les définissent sont équivalent

D/ 1) On a : $A \cup A = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in A\}$

Or, on a a P ou $P \equiv P$ si P est une assertion

donc $A \cup A \{x \in E \mid x \in A\} = A$

admis

2) On a $A \cup \emptyset = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in \emptyset\}$

or, $x \in \emptyset \equiv F$ pour tout élement x

Et, P ou $F \equiv P$ pour toute assertion P

$A \cup \emptyset = \{x \in E \mid x \in A\} = A$

3) On a $P \Rightarrow P$ ou Q est une tautologie

donc,

$\forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$ est vraie

Donc d'après la remarque précedente

$\{x \in E \mid x \in A\} \subset \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

I.e on a $A \subset A \cup B$

4) On a P ou $Q \equiv Q$ ou P pour toutes assertion P et Q

Donc $\forall x \in E,\ (x \in A \text{ ou } x \in B) \Leftrightarrow (x \in B \text{ ou } x \in A)$

D'après la rq : on a $A \cup B = B \cup A$

5) De m̂ : AF

2) intersection

Def° : Soient $A, B \subset E$

L'intersection de A et B notée $A \cap B$ est la partie de E définie par

$$A \cap B := \{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$$

d^n

Prop (T) :

1) $A = A \cap A$
2) $A \cap \emptyset = \emptyset$
3) $A \cap B \subset A$
4) $A \cap B = B \cap A$
5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

D/ de $\hat{m}$.

Def° : Soient $A, B \subset E$,

On dit que A et B sont disjoint

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $A \cap B = \emptyset$

Dans ce cas, on note $A \sqcup B := A \cup B$

et on dit que l'union est disjointe.

d^n

3) Deux caractérisations de l'inclusion

Prop : Soient $A, B \subset E$:

On a $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$

D/ ORP chaîne d' $\Rightarrow$

Mq $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

Osq $A \subset B$

Mq $A \cap B = A$

On raisonne par double inclusion

• Déjà, on a tjrs $\boxed{A \cap B \subset A}$

Mq $A \subset A \cap B$

Soit $x \in A$,

$\hat{C}$ $A \subset B$, on a $x \in B$

donc $A \subset A \cap B$

Ainsi, par double inclusion, $A \cap B = A$

Donc, on a mq $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

Mq $A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$

Osq $A \cap B = A$

Mq $A \cup B = B$

Déjà, on a tjrs $B \subset A \cup B$

Mq $A \cup B \subset B$

Soit $x \in A \cup B$

Mq $x \in B$

On a $x \in A$ ou $x \in B$

ie $(x \in A$ et $x \in B)$ ou $x \in B$

Ainsi, $x \in B$

Ainsi, $A \cup B \subset B$

Ainsi, $A \cup B = B$

Ainsi, $A \cup B = B \Leftarrow A \cap B = A$

(*) Montrons que $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$

Ogq $A \cup B = B$ $\longrightarrow$ $B \subset A \cup B$, $\emptyset$ valeur

$A \cup B \subset B$, (++) valeur

Mq $A \subset B$

Soit $x \in A$

Mq $x \in B$

On a $x \in A \cup B$

or $A \cup B = B$

donc $x \in B$

donc $x \in B$

Ainsi, $A \subset B$

Ainsi, $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$

Ainsi, on a montré que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

Rq À la place de (*), on pourait faire

On a $A \subset A \cup B$

$A \subset B$

4) Double distributivité

Prop (T) : 1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

D/ on a vu que $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \equiv (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$

Soit $x \in E$

On a donc $(x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \in C$

$\iff (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)$

OR!! $x \in A \cup B \iff (x \in A) \text{ ou } (x \in B)$ etc

d'où $(x \in A \cup B) \text{ et } x \in C \iff (x \in A \cap C \text{ ou } x \in (B \cap C))$

d'où 1)

De même 2)

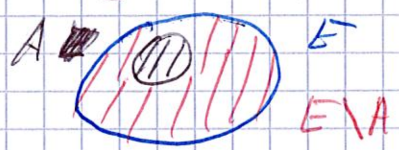
c) Complémentaire d'une partie

Def° : Soit $A \subset E$

Le complémentaire de E dans A, noté $E \setminus A$ est la partie de E définie par

$$E \setminus A := \{x \in E \mid x \notin A\}$$

d^n

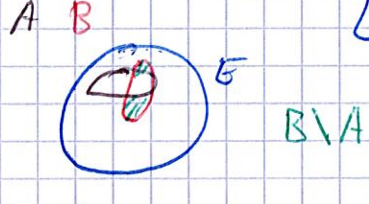


Si le contexte est clair, on note $\bar{A} := E \setminus A$

Rq : Si $A, B \subset E$, on note encorre

$B \setminus A \quad \{x \in B \mid x \notin A\}$

d^n



⚠ $\mathbb{N} \setminus 0 \rightarrow$ erreur

Ex : Soit $E := \mathbb{N}$ et $A := \{0\}$

Alors $\overline{A} = \mathbb{N}^*$

Si $E = \mathbb{Z}$ et $A = \{0\}$, ~~donc~~ alors :

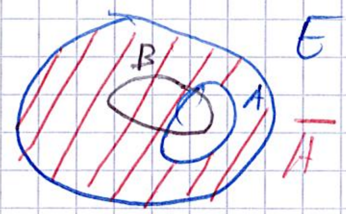
$$\overline{A} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$
$$= \{\dots, -2, -1, 1, 2 \dots\}$$

⚠!!! $\mathbb{Z}^* = \{1; -1\}$

$$\mathbb{Z}^* = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : n \cdot m = 1\}$$

Fait - R^x : (T) $B \setminus A = B \cap \overline{A}$

(d1)



D/ laissée au lecteur (exo)

b) propriétés

Prop : 1) $E \setminus \emptyset = E$

2) $E \setminus E = \emptyset$

(i.e.) $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{E} = \emptyset$

3) A et $\overline{A}$ disjoints

$A \sqcup \overline{A} = E$

D/ (exo)

c) lois de De Morgan

Prop (T) : 1) $\overline{\overline{A}} = A$

2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(A1) illustrer le propos

D/ On utilise les caractérisations suivantes :

Soit $x \in E$. on a :

a) $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$

b) $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$

c) $x \in E \setminus A \iff x \notin A \iff$ non $(x \in A)$

1) Déjà, on a (T) non(non(P)) $\equiv$ P

Soit $x \in E$ On a

$x \in \overline{\overline{A}} \iff x \in E \setminus \overline{A}$

$\iff x \notin \overline{A}$

$\iff$ non $(x \in \overline{A}) \iff$ non $(x \in E \setminus A)$

$\iff$ non(non $(x \in A)$) $\iff x \in A$

d'où $\overline{\overline{A}} = A$

2) On sait que non (P ou Q) $\equiv$ non P et non Q

Soit $x \in E$ On a

$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B$

$\iff$ non $(x \in A \cup B)$

$\iff$ non $((x \in A)$ ou $(x \in B))$

$\iff$ non$(x \in A)$ et non $(x \in B)$

$\iff x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

3) On aurait pu faire de même, mais on va faire plus joli.

On sait que $\forall A', B' \subset E$, $\overline{A' \cup B'} = \overline{A'} \cap \overline{B'}$
et $\forall A' \subset E$, $\overline{\overline{A'}} = A'$

💡 Astuce / Idée / R*

Posons $A' := \overline{A}$ et $B' := \overline{B}$

① ie soit $A, B \subset E$

on a $\overline{A' \cup B'} = \overline{B'} \cap \overline{A'}$

i.e. on a, $\overline{A' \cup B'} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}$

$= A \cap B$

donc, on a : $\overline{\overline{A' \cup B'}} = \overline{A \cap B}$

ie $A' \cup B' = \overline{A \cap B}$

ie $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

III Deux constructions

1) Produit Cartésien

a) Def° et remarques

Def° : On appelle couple (x, y) la donnée conjointe et dans cet ordre de x et de y (informel)

Rq : L'ordre compte, $(1,2) \neq (2,1)$
alors que $\{1,2\} = \{2,1\}$

La Rep° est possible : $(1,1)$ est un couple qui possède 2 coordonnées

- De même, on définit tripel, quadruplet... notés (x,y,z), (x,y,z,t)

- Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, on parle de n-uplet : la donnée conjointe dans cet ordre de n éléments $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

Def° : Soit E et F deux ensembles :

Le produit de E par F (produit cartésien), noté $E \times F$
(lu E croix F)
est l'ensemble des couples (x,y) pour $x \in E$ et $y \in F$

De même (T), on définit $E \times F \times G$ l'ensemble des triplets (x,y,z) où $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$

Si $n \in \mathbb{N}^*$. On définit E^n : c'est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ où pour tout i, $x_i \in E$
(On a alors $E^2 = E \times E$, $E^3 = E \times E \times E$)
Ex : On considère $E := \{1, 2, 3\}$ et $F := \{2, 8\}$

⚠ AC $(1,8) \in E \times F$ mais $(8,1) \notin E \times F$

De même AC, (T) : $\underbrace{(E \times F) \times G}_{\text{couple dont la 1^{re} coordonnée est un couple}} \neq \underbrace{E \times F \times G}_{\text{triplets}}$

Ex de couple dont la situation est compliquée :

$(]0,1[, (2,3))$

b) Cardinal

Prop$^{\text{(F)}}$: si E et F sont finis, alors :

$E \times F$ est fini

$$\text{card}(E \times F) = |E \times F| = |E| \times |F|$$

Rq* : Pour tout ensemble E, on a :

$$E \times \emptyset = \emptyset$$

$$\emptyset \times E = \emptyset$$

2) Ensemble des Parties

a) déf$^{\text{o}}$ et exemples

Def : Soit E un ensemble

L'ensemble des parties de E noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble dont les éléments sont des parties de E

Ex : Posons $E := \{1, 2, 3\}$ $\qquad \{\emptyset\} \neq \emptyset$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Fait : Soit E un ensemble. Alors, on a

1) $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$

2) $E \in \mathcal{P}(E)$

Ex (suite) : (AC) On a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ (*)

mais $\{\emptyset\} \notin \mathcal{P}(E)$

mais $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$

ie $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

Ĉ (*) est vrai. ie Ĉ $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$,

on a $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(E)$

(C'est tjrs vrai : (T) $a \in E \iff \{a\} \subset E$

ie $\{\emptyset\}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$

ie $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

À retenir : "$A \subset E$" $\equiv$ $A \in \mathcal{P}(E)$

Rq* : "$a \in E$" $\equiv$ "$\{a\} \subset E$" $\equiv$ $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$

Ex : Posons $E := \{1, 2\}$

On a $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

2.) Cardinal

Prop° : Soit E un ensemble fini. Alors

1) $\mathcal{P}(E)$ est fini

2) On a $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

D/ (peu formelle) :

Posons $n := |E|$

écrivons $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Pour construire une partie A de E, on procède comme suit :

1°) On répond à la q° : $a_1 \in A$? 2 réponses
2°) " " " " " " : $a_2 \in A$? 2 réponses
⋮
n°) " " " " " " : $a_n \in A$? 2 réponses

Ce procédé de construction étant exhaustif et sans redondance, le nombre de telles parties $A = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \cdots 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$

Ainsi, $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$

Ĉ $n = |E|$, on a $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

Rq : • pour tout ensemble E, on a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ (1)
• si $a \in E$, on a $\{a\} \subset E$, ie on a $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$

Bilan : déjà, on a $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ par (1)

Ensuite, on a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ (par (1)) donc par (2) on a $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

– On a donc $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ et $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

IV Familles de Parties

1) Notion de famille

Déf : Soit I un ensemble et soit E un ensemble.

- Une famille d'éléments de E indexée par I est la donnée pour tout élément $i \in I$ d'un élément $x_i \in E$

  Cette famille est alors notée $(x_i)_{i \in I}$

- Une suite à valeurs dans E est une famille d'élements de E indexée par $\mathbb{N}$

Rq : Ainsi, la notion de suite est un cas particulier de la notion de famille

Ex : (Camille, Sofia, Clémence, ...) est une suite à valeurs dans mpsi 3

$(1, 3, -2, 8, 8, 13, 25, 709, 2022, -13, \dots)$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$

$(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$

$(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite à valeurs dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$

Rq : En pratique, si la famille est indexée par $\mathbb{N}^*$ par ex $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on dira encore que c'est une suite

Exemples (suite) :

- $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$

On notera $M_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^{*4} \right\}$

$M_{n,p}(\mathbb{R})$: { matrices à n lignes et p colonnes et à coeff dans $\mathbb{R}$ }

En Particulier : $M_{n,1}(\mathbb{R})$ = ens des matrices colonnes à n coeff réells

$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} ; a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{R} \right\}$

Astuce $M_{n,1}(\mathbb{R})$
$\hookrightarrow$ Mn Ms

Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $M_2(\mathbb{R})$

Rq : On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(\mathbb{R}) := M_{n,n}(\mathbb{R})$

$\left(\begin{matrix} \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) \\ (-1)^n \end{matrix} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$

Rq !!∞ ⓣ : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D/ ⓣ $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\left([-n, n] \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Exemples de familles indexées par autre chose que $\mathbb{N}$

- $\left(\frac{2^i}{j+1} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille d'élements de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}^2$

- $(]x\,;+\infty[)_{x\in\mathbb{R}}$ est une famille de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ indexée par $\mathbb{R}$

- Def° (Suite)

L'ensemble des familles d'éléments de E indexée par I est notée E^I

- Ainsi, l'ensemble des suites réelles et noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
on écrira typiquement : " Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Intersection et union quelconque

Def° : Soit : E un ensemble
I un ensemble
$(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E (indexée par I)

ie soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$

L'union des A_i, notée $\bigcup_{i\in I} A_i$ est la partie de E définie par :
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x\in E \mid \exists i\in I : x\in A_i\}$$

L'intersection des A_i, notée $\bigcap_{i\in I} A_i$, est la partie de E définie par :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\in E \mid \forall i\in I, x\in A_i\}$$

Def° : Soit E un ens. et soit $n_0 \in \mathbb{Z}$

Une suite définie à partir du rang n_0 est un élément de $E^{[\![n_0 ; +\infty[\![}$

Rq : On notera $(U_n)_{n \geq n_0}$, les suites définies à partir du rang n_0

On peut écrire $E^{\{n \in \mathbb{Z} \mid n-1 \geq 42\}}$

Un n-uplet est une famille indexée par $[\![1, n]\!]$

on notera ces éléments : $(x_1, \dots, x_n)$

$(x_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$

$(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ $\longrightarrow$ not° ambigue

Rq$^{\star\infty}$: On suppose $I \neq \emptyset$ et E un sensemble

Alors $\emptyset^I = \emptyset$

Supposons $I = \emptyset$ alors il existe une unique famille de E indexée par $\emptyset$. C'est la famille qui à "rien du tout" associe rien du tout" !

On la note $(\ )$

Ainsi on a $E^{\emptyset} = \{(\ )\}$

Ainsi on a ~~##~~ $I \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset^I = \emptyset$

$\emptyset^{\emptyset} = \{(\ )\}$

3) Partitions et recouvrement

Soit | E un ensemble
| I " " "
| $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par I

1) Déf° : | On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E $\overset{\Delta}{ssi}$ $\bigcup_{i\in I} A_i = E$

2) | On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint $\overset{\Delta}{ssi}$ $\bigcup_{i\in I} A_i = E$ et les A_i sont 2 à 2 disjointes,

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} A_i = E \\ \forall i,j \in I, (i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset) \end{cases}$$

3) On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E $\overset{\Delta}{ssi}$

- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$
- $\forall i,j \in I, (i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$
- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$

Rq : Un système complet d'évènement est un recouvrement disjoint de l'univers

~~4) Cardinal~~

4) Cardinal

Prop. : Soit E un ensemble
I un ensemble
On supp. E et I finis

1) E^I fin

2) $|E^I| = |E|^{|I|}$ D/ AC

Remarques Finales

Propriétés sur $\bigcup_{i\in I}$ et $\bigcap_{i\in I}$:

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$