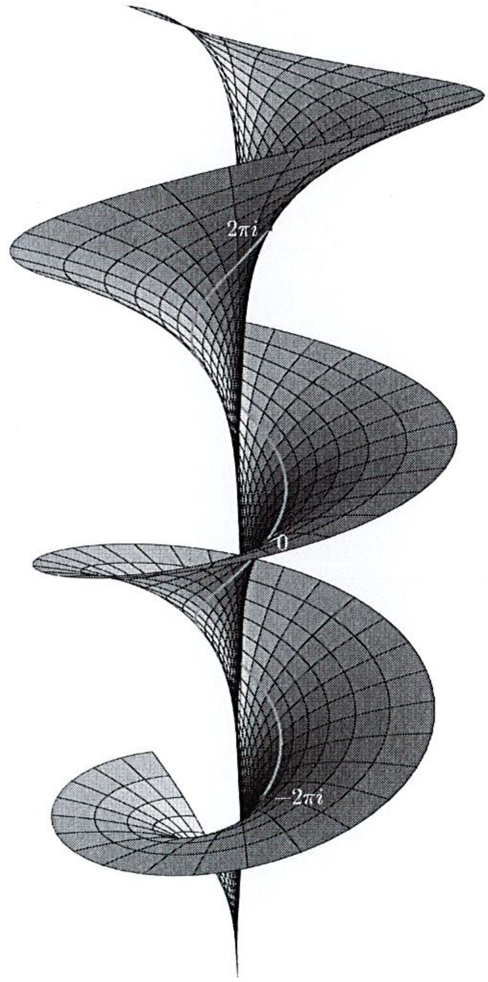
Lycée CHATEAUBRIAND
Colas Bardavid

Chapitre 6

Nombres complexes (II)



Représentation du revêtement de $\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{C}^*$ donné par $z \mapsto \exp(z)$

Les nombres complexes sont apparus pour la première fois aux alentours de 1545, pour résoudre des équations du troisième degré. Au début uniquement considérés comme un moyen artificiel de trouver de « véritables nombres », ils sont depuis devenus un objet central des mathématiques.

En effet, on a depuis compris que « $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$ » : toutes les équations algébriques dans $\mathbb{R}$ (comme par exemple $x^2 = -1$) ont « toutes leurs solutions » dans $\mathbb{C}$. Ainsi, d'un certain point de vue, $\mathbb{C}$ est le *bon ensemble de nombres à considérer en mathématiques : beaucoup d'énoncés sont plus esthétiques, symétriques, naturels quand ils sont exprimés dans $\mathbb{C}$ plutôt que dans $\mathbb{R}$.*

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

6
Nombres complexes (II)

plan de cours et principaux résultats

I. Préliminaires

7.9

1) Un calcul pour s'entraîner

2) Un second calcul

II. Inégalités triangulaires

7.25
7.28

1) Le module $|z - z'|$ est une distance

2) Un lemme

3) Inégalité triangulaire

a) énoncé

Théorème 6.1 Ⓣ
$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

b) interprétation géométrique
c) version négative

Proposition 6.2 Ⓣ
$|z - z'| \leqslant |z| + |z'|$

4) Inégalité triangulaire généralisée

5) Inégalité triangulaire renversée

Proposition 6.3
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a
$$|z| - |z'| \leqslant |z - z'|.$$

Corollaire 6.4 Ⓣ
$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$$

Corollaire 6.5 Ⓣ
$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'|$$

6) Inégalité triangulaire bilatérale

7) Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

a) positive-colinéarité
b) énoncé
c) généralisation

III. Le cercle-unité $\mathbb{U}$ 7.18

1) Définition 7.20

7.21

Définition 6.6 Ⓣ 7.22

$$\mathbb{U} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \right\}$$

2) Propriétés

3) Expression de l'inverse dans $\mathbb{U}$

4) Symbole $e^{i\theta}$

a) définition
b) dessin de $e^{i\theta}$
c) formules d'Euler

Proposition 6.7 Ⓣ

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

d) propriétés
e) formule de Moivre

5) « Noyau » de $\theta \longmapsto e^{i\theta}$

6) Forme exponentielle d'un nombre complexe

a) paramétrisation de $\mathbb{U}$
b) arguments d'un nombre complexe
c) propriétés des arguments

IV. Exponentielle complexe

1) Définition

2) Propriétés

Proposition 6.8

1) $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est surjective.*
2) *Soient* $z, z' \in \mathbb{C}$. *On a*

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(z') \iff z \equiv z' \ [2i\pi].$$

V. Racines de l'unité 7.34

1) Définition 7.36

7.39

2) Exemples

3) Propriétés

4) Description explicite de $\mathbb{U}_n$

Proposition 6.9 Ⓣ

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \ ; \ k \in [\![1, n]\!] \right\}$$

5) Somme des racines n-ièmes de l'unité

VI. Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

7.7
7.14

1) $z^2 = a$

a) existence et structure
b) $\mathbb{C}$-racines carrées
c) calcul pratique de $\mathbb{C}$-racines carrées

2) $z^n = a$

3) $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$

a) formule
b) relations coefficients-racines

Proposition 6.10 Ⓣ
Soient α et β les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$. Alors,

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \qquad \text{et} \qquad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}.$$

c) application à la résolution des systèmes somme-produit

Proposition 6.11 Ⓣ
Soient $S, P \in \mathbb{C}$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = S \\ \alpha\beta = P. \end{cases}$$

Alors, α et β sont les racines du polynôme $X^2 - SX + P = 0$.

VII. Nombres complexes et géométrie

1) Alignement

2) Angle entre vecteurs

3) Orthogonalité

4) Exemples de transformations du plan

a) $z \longmapsto z + a$ $(a \in \mathbb{C})$
b) $z \longmapsto e^{i\theta_0} z$ $(\theta_0 \in \mathbb{R})$
c) $z \longmapsto az$ $(a \in \mathbb{R}^*)$
d) $z \longmapsto az$ $(a \in \mathbb{C}^*)$
e) $z \longmapsto az + b$ $(a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C})$

Nombres $\mathbb{C}$ (II)

I Préliminaires

1) Un calcul

Posons $A := \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$

Calculons A

On passe par la forme expo
En effet on a une puissance

On a $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

d^n

↳ OFAA des cos/sin remarquables
OFAA $\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{i-\frac{\pi}{4}}$

OFAA

Donc $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Donc $A = \sqrt{2}^{30} \cdot e^{i\frac{7\pi}{12}30} = 2^{15}e^{i\frac{35}{2}\pi}$

$\sqrt{2}^{30} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{30} = 2^{\frac{30}{2}} = 2^{15}$

idée : OFAA 2π, mieux du 4π car on $\div$ par 2

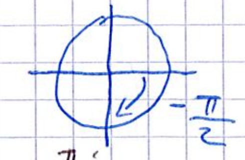
$35\pi = 36\pi - \pi$ donc $\frac{35\pi}{2} = 18\pi - \frac{\pi}{2}$

Donc $e^{i\frac{35\pi}{2}} = e^{i18\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

__CCl__ : $A = 2^{15} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$A = -2^{15} i$

d^n



$e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$

2) Un autre calcul

Notons $B := \dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$

Astuce Notons $C := \dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3}$

$$\overline{C} = \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$$

donc $B = C + \overline{C}$

$= 2\,\mathrm{Re}(C)$

On a $C = \dfrac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4}{\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3} = \sqrt{2}\, \dfrac{e^{i\pi}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$

OFAA 2π $C = \sqrt{2}\, e^{i\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\pi + \pi - \frac{\pi}{4}\right)}$

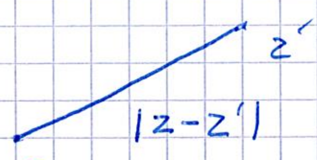
$= \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = (1-i)$

__CCl__ : On a $B = 2\,\mathrm{Re}(C) = 2$

II Inégalité triangulaires.

1) Le module $|z - z'|$

!! C'est une distance d^n



$\mathbb{C}$)

2) Un lemme

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors

1) $Re(z) \leq |z|$

2) $Re(z) = |z| \implies z \in \mathbb{R}_+$

(3) $|Re(z)| = |z| \implies z \in \mathbb{R}$)

D/ idée : on passe par la forme algébrique

3 rédactions possibles

- On pose $a := Re(z)$ et $b := Im(z)$
- Fixons $a, b \in \mathbb{R}$ tq $z = a + ib$
- On écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

1) On a $|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2$

Č $\sqrt{\ }$ est croissante, on a donc $|z| \geq \sqrt{a^2} = |a|$

or, $|a| \geq a$

Donc $|z| \geq a$ ie $|z| \geq Re(z)$

2) On supp. que $Re(z) = |z|$ on a donc $Re^2(z) = |z|^2$

donc $a^2 = a^2 + b^2$ donc $b^2 = 0$ donc $b = 0$

donc $z = a$

Č $R(z) = |z| = a$, on a $z = |z|$ donc

$z \in \mathbb{R}$

3) Osq $|\mathrm{Re}(z)| = |z|$, ie $|a| = |z|$

donc $|z|^2 = a^2$ car $|a|^2 = a^2$

donc $a^2+b^2=a^2$ donc $b^2=0$ donc $b=0$

donc $z=a$ donc $z \in \mathbb{R}$

3) L'inegalité triangulaire

a) énoncé

Thm : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ on a

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

D/ on a $\begin{cases} |z+z'| \in \mathbb{R}_+ \\ |z|+|z'| \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$

Or la fonction $(\cdot)^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Donc, on a équivalence entre

$$|z+z'| \leq |z|+|z'| \Leftrightarrow \left(|z+z'|\right)^2 \leq \left(|z|+|z'|\right)^2$$

Mq $|z+z'|^2 \leq \left(|z|+|z'|\right)^2$

idée : module au carre $\rightarrow$ + simple

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

On a $\left(|z|+|z'|\right)^2 = |z|^2 + 2|z|\,|z'| + |z'|^2$

et $|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')}$

$= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'})$

$= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}$

$= |z|^2 + (z\overline{z'} + z'\overline{z}) + |z'|^2$

Astuce : Posons $w = z\overline{z'}$

On a donc $|z+z'|^2 = |z|^2 + (w + \overline{w}) + |z'|^2$

Bilan : on a : $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(w) + |z'|^2$

et $(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|w| + |z'|^2$

En effet, on a $|w| = |z\overline{z'}| = |z|\cdot|\overline{z'}|$

$= |z|\cdot|z'|$

Posons $\Delta := (|z|+|z'|)^2 - |z+z'|^2$

On a $\Delta = 2(|w| - \mathrm{Re}(w))$ (*)

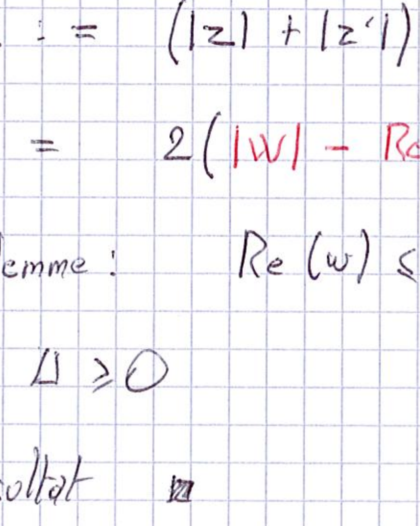
D'après le lemme : $\mathrm{Re}(w) \leq |w|$

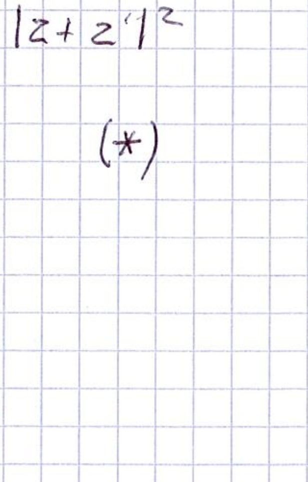
donc $\Delta \geq 0$

D'où le résultat ∎

b) interprétation géométrique

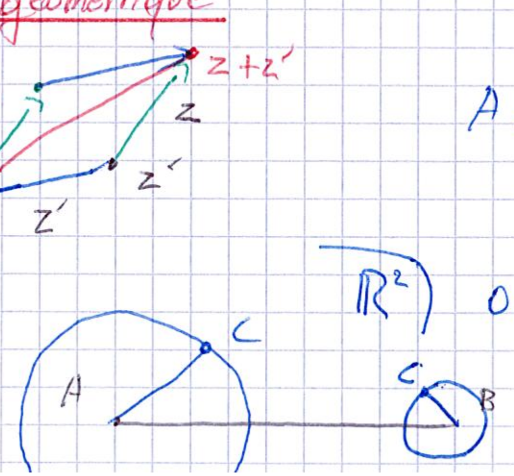
d^n





($\mathbb{C}$) ($\mathbb{R}^2$) On a $AC + BC \geq AB$

Sinon :



ie $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B = \emptyset$

c) Version négative

Prop (T) : $|z - z'| \leqslant |z| + |z'|$

D/ On a $|z-z'| = |z+(-z')|$

$\leqslant |z| + |(-z')|$

$|z-z'| \leqslant |z| + |z'|$

■

h) Version généralisée

Prop - R

Soit $n \in \mathbb{N}$,

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

D/ On procède par rec

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$

$P(n)$: " $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

Déjà, $P(1)$ est vraie car $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant |z|$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $P(n)$

Mq $P(n+1)$

Soient $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$

Mq $\left| \sum_{k=0}^{n+1} z_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n+1} |z_k|$

On sait que $\sum_{k=1}^{n+1} z_k = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k \right) + z_{n+1}$

Donc, par inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| + |z_{n+1}|$$

De ④, ĉ $P(n)$ est V, on a

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Donc on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} z_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

■

5) Inegalité triangulaire renversée

> **Prop :** Soient $z, z' \in \mathbb{C}$
>
> On a $|z - z'| \geqslant |z| - |z'|$

D/ idée On veut montrer que $|z| \leqslant |z-z'| + |z'|$

Peut-on appeler l'inégalité triangulaire ?

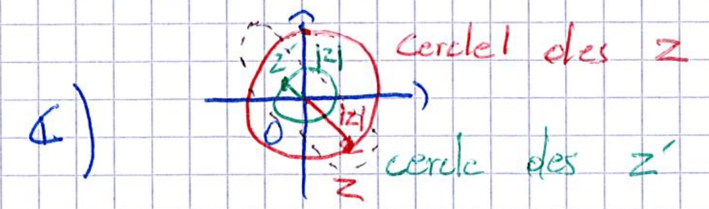
On écrit $z = (z - z') + z'$

donc, par ineg triang., on a $|z| = |(z-z') + z'|$

donc $|z| \leqslant |z - z'| + |z'|$

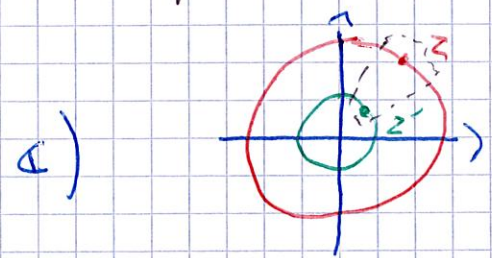
Donc, on a $|z| - |z'| \leq |z - z'|$ ■

d^n Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On connaît $|z|$ et $|z'|$ et on veut savoir quelle peut être la distance minimale entre z et z'



cas n°1, z et z' sont très éloignés

$$|z - z'| \leq |z| + |z'|$$



cas n°2, z et z' sont très proches

on a $|z - z'| \geq |z| - |z'|$

Rq On a montré que $|z - z'| \geq |z| - |z'|$

si $|z| \leq |z'|$, on a $|z| - |z'| \leq 0$ et l'inégalité (*) n'a $\emptyset$ intérêt.

- Dans ce cas on écrit $|z - z'| = |z' - z|$ et on réapplique l'inégalité triang. renversée à $|z' - z|$

On obtient $|z - z'| \geq |z'| - |z|$

Prop : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

1) On a $\begin{cases} |z - z'| \geq |z| - |z'| \\ |z - z'| \geq |z'| - |z| \end{cases}$

rq : on a forcément une de ces $\leq$ qui n'a aucun intérêt

2) On a $\underbrace{|z - z'|}_{\text{module}} \geq \Big| \overbrace{|z|}^{\text{mod}} - \overbrace{|z'|}^{\text{mod}} \Big|$

valeur absolue

D/ 1) ok

2) lemme Soit $x, a \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{cases} x \geq a \\ x \geq -a \end{cases} \implies x \geq |a|$$

D/ Osq $\begin{cases} x \geq a \\ x \geq -a \end{cases}$

On distingue 2 cas

1er cas : osq $a \geq 0$, alors $|a| = a$

or $x \geq a$, donc $x \geq |a|$

2e cas osq $a < 0$ On a $|a| = -a$

Or, on a $x \geq -a$ donc $x \geq |a|$ ☐ lemme

AC D/ AF 

6) inégalité triang bilatérale :

Prop : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ On a

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

D/ (+)

- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ c'est ok
- On écrit $|z + z'| = |z - (-z')|$

D'après plus haut, $|z + z'| \geqslant \big||z| - \underbrace{|-z'|}_{= |z'|}\big|$

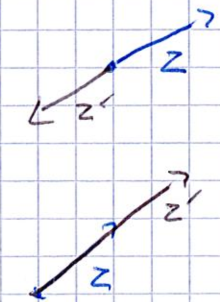
7) Cas d'égalité dans l'inégalité triang.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

a) positive colinéarité

Def° : On dit que z, z' sont positivement colinéaires $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $(\exists k \in \mathbb{R}_+ : z' = kz)$ ou $(\exists k \in \mathbb{R}_+ : z = kz')$

dⁿ



z, z' colinéaires

z, z' $\geqslant 0$ - colinéaire

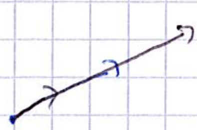
Prop : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

Osq z et z' positivement colinéaires

Osq $z \neq 0$. alors on peut prendre z c̄ support de la demi - droite

On a alors z, z' ≥ 0-colinéaires $\iff \exists k \in \mathbb{R}_+ : z' = kz$

d^n



D/ on a $z \neq 0$

Soient $z' \in \mathbb{C}$ tq $z, z' \geq 0$ - colinéaires

Deux cas :

1er cas on a $\exists k \in \mathbb{R}_+ : z' = kz$ c'est ok

2e cas on a $\exists k \in \mathbb{R}_+ : z = kz'$

Fixons un tel $k \geq 0$

On a $k \neq 0$ car $z \neq 0$. On peut donc écrire

$$z' = \frac{1}{k} z$$

Ĉ $\frac{1}{k} \geq 0$, on a bien $\exists k' \in \mathbb{R}_+ : z' = k'z$

b) énoncé

Prop : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ On a

$$|z + z'| = |z| + |z'| \implies z, z' \text{ sont } \geq 0\text{-colinéaires}$$

D/ Osq $|z + z'| = |z| + |z'|$

Donc on a $|z + z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$

or on a vu que $\begin{cases} |z + z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(\omega) + |z'|^2 \\ (|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|\omega| + |z'|^2 \end{cases}$

où $\omega := z\overline{z'}$ $\left(2\mathrm{Re}(\omega) = \omega + \overline{\omega} = z\overline{z'} + \overline{z}z' \right.$

$|\omega| = |z||z'|$

Donc $\mathrm{Re}(\omega) = |\omega|$

Donc d'après le lemme 2), on a $\omega \in \mathbb{R}_+$

- Ainsi, on a $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$
- Si $z' = 0$, c'est ok, on a bien z, z' ≥ 0-colinéaires
- Osq $z' \neq 0$

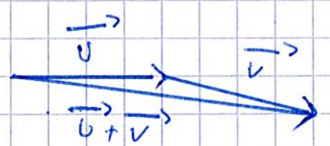
On sait que $z'\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$ $\left(= |z'|^2 \right)$

Donc $\dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} \in \mathbb{R}_+$ ie $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$

Notons $k := \dfrac{z}{z'}$. On a $k \in \mathbb{R}_+$ et $z = kz'$

Donc z, z' ≥ 0-colinéaires ∎

d^n



On a $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Ici, l'inégalité est stricte

Rq : on a bien que la réciproque est vraie

$(z, z'$ ≥ 0-colinéaires$)$

$\Rightarrow |z + z'| = |z| + |z'|$

D/ Assez bateau

Onsq z, z' ≥ 0-colinéaires. Osq $\exists k \in \mathbb{R}_+ : z' = kz$

Fixons un tel k

On calcule : $|z + z'| = |z + kz| = |(1+k)z|$

$= |1+k| \cdot |z| = (1+k)|z| = |z| + k|z|$

car $k+1 \geq 1 \geq 0$

$= |z| + |k| \cdot |z| = |z| + |kz| = |z| + |z'|$

$k \geq 0$

c) généralisation

Rq : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

Alors on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Rightarrow \left(\forall k, p \in [\![1,n]\!], \; z_k \text{ et } z_p \geq 0\text{-colinéaires} \right)$$

D/ exo

III Le cercle unité $\mathbb{U}$ ($\mathbb{U}$)

Def°

Def° On a appelle cercle unité ou groupe des nombres complexes de module 1 et on note $\mathbb{U}$ la partie de $\mathbb{C}$ définie par :

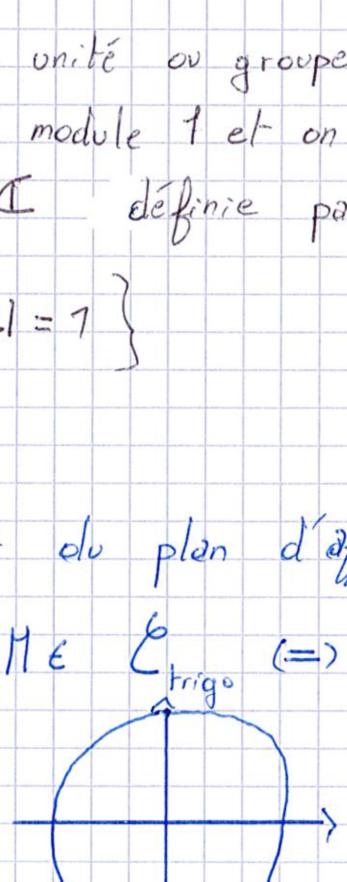
$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

Rq : soit $z \in \mathbb{C}$

Soit M un point du plan d'affixe z.

Alors, on a : $M \in \mathcal{C}_{trigo} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$

On dessine



2 Propriétés

Prop. : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors, on a

1) $1 \in \mathbb{U}$
2) $z \in \mathbb{U} \Rightarrow z \neq 0$
3) $z \in \mathbb{U} \Rightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$
4) $z, z' \in \mathbb{U} \Rightarrow zz' \in \mathbb{U}$

D/ 1) c'est ok

2) Par contraposition,

$$z = 0 \Rightarrow |z| = 0 \Rightarrow |z| \neq 1$$
$$\Rightarrow z \notin \mathbb{U}$$

3) Osq $z \in \mathbb{U}$

On a $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$

donc $z \in \mathbb{U}$

4) Osq $z, z' \in \mathbb{U}$ on a

$|zz'| = |z| \cdot |z'| = 1 \cdot 1 = 1$, ie $zz' \in \mathbb{U}$

Corollaire : 1) $z \in \mathbb{U} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, z^n \in \mathbb{U}$

$z, z' \in \mathbb{U} \Rightarrow \frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

D/ : 1) Soit $z \in \mathbb{U}$

Mq d'abord $\forall n \in \mathbb{N}, z^n \in \mathbb{U}$

(rec) $z^0 = 1$ ok

Osq $z^n \in \mathbb{U}$ on a $z^{n+1} = z^n \cdot z \in \mathbb{U}$

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}, z^n \in \mathbb{U}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Deux cas :

1er cas : $n \geq 0$. ok

2e cas : $n < 0$ ‼ notation Posons $m := -n$

On a $m \geq 0$

On a $z^n = z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \left(\frac{1}{z}\right)^m$

or $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ et $m \in \mathbb{N}$. Donc d'après ⊕ haut, on a $\left(\frac{1}{z}\right)^m \in \mathbb{U}$ ie $\underline{z^n \in \mathbb{U}}$

2) ⊕ $\frac{z}{z'} = \underset{\in}{z} \underset{\in}{\frac{1}{z'}} \in \mathbb{U}$

3) Expression de l'inverse dans $\mathbb{U}$

Prop - R^x

Soit $z \in \mathbb{U}$ Alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$

D/ Ĉ $z \in \mathbb{U}$, on a $|z| = 1$ donc $|z|^2 = 1$ ie

$z z \quad z\bar{z} = 1$

donc $\bar{z} = \frac{1}{z}$

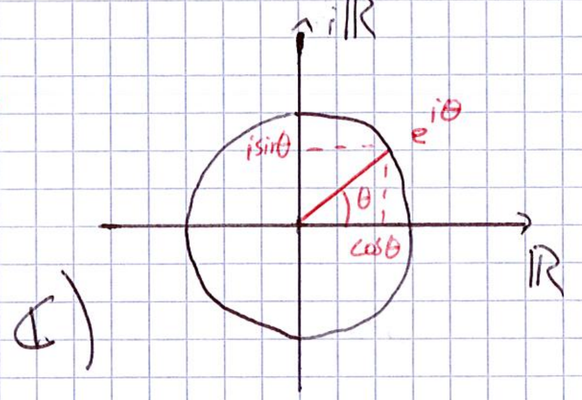
4) Symbole $e^{i\theta}$

a) def°

Notation

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On nde $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$

b) dessin



Rq : M_θ est le point du plan d'affixe θ

c) formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Rq : il y a un petit abus de notation (qu'on fera toujours) ; on note si $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{-i\theta} := e^{i(-\theta)}$$

D/ On a

$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(\theta)$$
$$= \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

car $\cos(\cdot)$ paire et $\sin(\cdot)$ impaire

En sommant $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

On obtient $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

De même pour $\sin(\theta)$: AF

d) Propriétés du symbole $e^{i\theta}$

Prop : Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

On a :

1) $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$

2) $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$

3) $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$

4) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

D/ 1) On a $|e^{i\theta}| = \sqrt{Re(e^{i\theta})^2 + Im(e^{i\theta})^2}$

Or $\mathbb{R}^*$: $Re(e^{i\theta}) = \cos\theta$

$Im(e^{i\theta}) = \sin\theta$

donc $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$

2) On calcule

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$$= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta')$$

$(a+ib)(a'+ib')$
$= aa' - bb' + i(ab' + a'b)$

$$+ i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$$

On reconnait les formules d'addition

Donc, on a : $e^{i\theta} e^{i\theta'} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$
$= e^{i(\theta+\theta')}$ ∎

3) On a $e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0$

$= 1 + i0 = 1$

et $e^{i0} = 1 = e^{i(\theta - \theta)} = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}$

Donc $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

4) Mq d'abord :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

par rec (T)

$n = 0$ $\quad (e^{i\theta})^0 = 1$ (produit vide)

$e^{i0} = 1$

hérédité $\quad e^{i(n+1)\theta} = e^{i(n\theta + \theta)}$

$= e^{in\theta} e^{i\theta}$

par HR $\quad = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = (e^{i\theta})^{n+1}$

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}, \ e^{i\theta} = (e^{i\theta})^n$

Soit $n \in \mathbb{Z}$; deux cas :

$n \geq 0$, c'est ok

$n < 0$, Posons $m := -n$ On a $n = -m$

et $m \geq 0$

On a $e^{in\theta} = e^{-im\theta} = \frac{1}{e^{im\theta}} = \frac{1}{(e^{i\theta})^m}$ (D'après plus haut)

$= (e^{i\theta})^{-m}$) par def° des puiss. négatives

$= (e^{i\theta})^n$ ■

Prop : On a $1 = -1$

D/ On a $-1 = e^{i\pi} = e^{i2\pi i\frac{1}{2}} = \left(e^{2i\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$
$= 1^{\frac{1}{2}}$

⚠ On a $\forall n \in \mathbb{Z},\ e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$

mais c'est faux en général si n n'est pas entier

e) Formule de Moivre

Prop : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

D/ c'est une réecriture de $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ■

5) "Noyau" de $\theta \longmapsto e^{i\theta}$

Prop : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0\ [2\pi]$

D/ $\boxed{\Leftarrow}$ Osq $\theta \equiv 0\ [2\pi]$

On a $\begin{cases} \cos\theta = \cos 0 = 1 \\ \sin\theta = \sin 0 = 0 \end{cases}$ par 2π-périodicité

D'où $e^{i\theta} = 1 + i0 = 1$

$\boxed{\Rightarrow}$ Osq $\underbrace{e^{i\theta} = 1}_{(*)}$ On a donc

Astuce : je passe $(*)$ à $\mathrm{Re}(\cdot)$ et $\mathrm{Im}(\cdot)$

$\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) = \mathrm{Re}(1)$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right) = \mathrm{Im}(1)$

$\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$

Ĉ $\sin\theta = 0$, on a $\theta \equiv 0\ [\pi]$

Fixons donc $k \in \mathbb{Z}$ tq $\theta = k\pi$

Mq k est pair

ORPA et Osq k impair

Fixons donc $p \in \mathbb{Z}$ tq $k = 2p+1$

On a $\theta = (2p+1)\pi = 2p\pi + \pi$

Donc $\cos\theta = \cos\pi = -1$

C'est absurde

Donc k est pair. Fixons donc $p \in \mathbb{Z}$ tq $k = 2p$

On a $\theta = 2p\pi$ ie $\theta = p\,2\pi$

Donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$

b) Forme exponentielle d'un nombre complexe

a) Paramétrisation de $\mathbb{U}$

Prop : On a $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R}\}$ AC

D/ : Notons $E := \{e^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R}\}$

Mq $\mathbb{U} = E$ par 2ble inclusion

- Déjà, on a $E \subset \mathbb{U}$

  En effet, si $\theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$

- Réciproquement : mq $\mathbb{U} \subset E$

  Soit $z \in \mathbb{U}$

  Réd° 1 : Fixons $a, b \in \mathbb{R}$ tq $z = a + ib$

  Réd° 2 : On écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

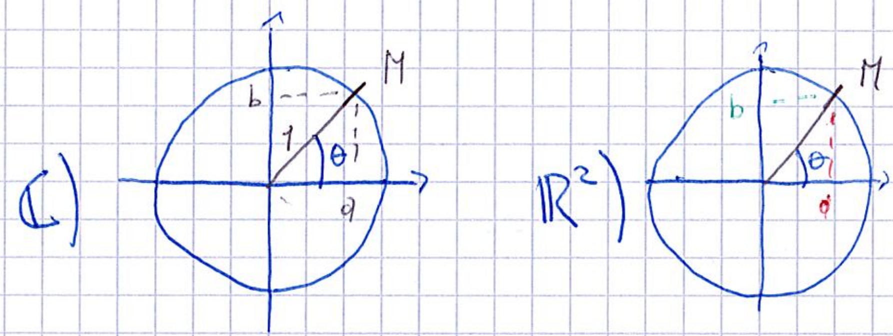
Réd^o 3 : Notons $a := \mathrm{Re}(z)$ et $b := \mathrm{Im}(z)$
on a $z = a + ib$

Comme $|z| = 1$, on a $a^2 + b^2 = 1$

Considérons M le point du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On a $M \in \mathcal{C}_{trigo}$ d^n

d^n



Notons θ la longueur de l'arc de $\mathcal{C}_{trigo}$ $\overset{\frown}{AM}$

On a par déf^o de M_θ : $\boxed{M = M_\theta}$

On a donc $\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$

Donc on a $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

Donc $z \in E$

Donc $\mathbb{U} \subset E$

Donc $\mathbb{U} = E$

Application Redactionnelle !!

"On a $z \in \mathbb{U}$

Fixons donc $\theta \in \mathbb{R}$ tq $z = e^{i\theta}$

On écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$

b) Arguments d'un nombre complexe

Thm – déf° :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

1) Alors, $\exists\, r > 0$, $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$: $z = re^{i\theta}$

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que θ est un argument de z $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists\, r > 0$: $z = re^{i\theta}$

On note alors $\arg(z) \equiv \theta \; [2\pi]$

<u>Rq</u>!! : On écrit $\arg(z) \equiv \theta \; [2\pi]$
mais le nombre $\arg(z)$ n'est pas défini
$\arg(z)$ est défini modulo 2π
On ne parle pas de l'argument de z
mais d'un arg de z

D/ 1) On pose : $r := |z|$ ĉ $z \neq 0$, on a $r > 0$

On pose $w := \dfrac{z}{|z|}$

R^* On a $|w| = \left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$

Donc $w \in \mathbb{U}$

Fixons donc $\theta \in \mathbb{R}$ tq $w = e^{i\theta}$

CCl : on a $z = re^{i\theta}$

i) Propriétés des arguments

Prop : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ des argument de z

1) Déjà, $\theta + 2\pi$ est aussi un argument de z

2) On a $\theta \equiv \theta' \, [2\pi]$

D/ c'est ⚓

$\hat{C}$ θ est un argument de z, fixons $r > 0$ tq $z = re^{i\theta}$

1) On a $re^{i(\theta + 2\pi)} = re^{i\theta} \times e^{i2\pi} = z$

donc $\theta + 2\pi$ est un argument de z

2) On a $r = |z|$ donc on a $z = |z| e^{i\theta}$

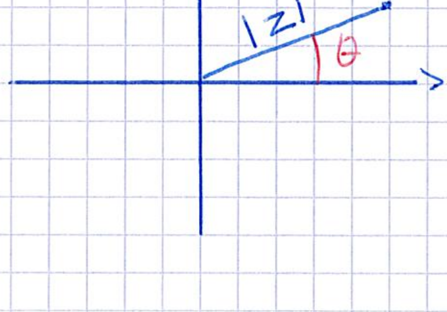
($\hat{C}$ $z = re^{i\theta}$, on a $|z| = |re^{i\theta}| = |r| \, |e^{i\theta}| = r$)

$\hat{C}$ θ' est un argument de z, on a aussi $z = |z| e^{i\theta'}$

Donc $|z| e^{i\theta} = |z| e^{i\theta'}$, $\hat{c}$ $|z| \neq 0$, on a

$e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ Ainsi, on a

d^n



$\mathbb{C}$

Prop (T)

1) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')$ $[2\pi]$

2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)$ $[2\pi]$

3) $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)$ $[2\pi]$

4) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi$ $[2\pi]$

5) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')$ $[2\pi]$

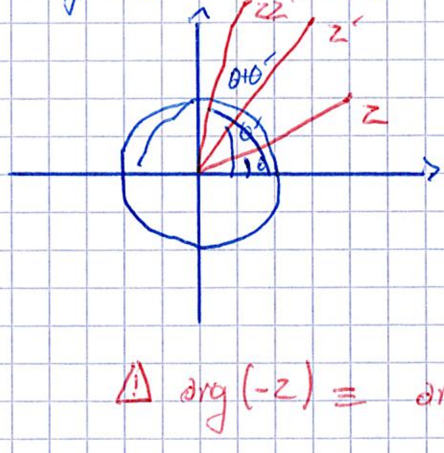
Rq : Donnons un énoncé (4) exact pour 1)

$$\left.\begin{array}{l}\theta \text{ argument de } z\\ \theta' \text{ argument de } z'\end{array}\right\} \Rightarrow \theta + \theta' \text{ argument de } zz'$$

D/ Ĉ θ est un arg de z, on a $z = |z| e^{i\theta}$ de m̂, $z' = |z'| e^{i\theta'}$

donc $zz' = |z||z'| e^{i\theta + \theta'}$; Ainsi, $\theta + \theta'$ est un argument de zz'

(d n)



D/ (AF) ■ ⚠ $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi$ $[2\pi]$

IV Exponentielle Complexe

1) Déf°

Th - déf°

Il existe une unique fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tq

1) $\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = e^t$ (la fonction $\exp(\cdot)$)

2) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \ f(i\theta) = e^{i\theta}$ (le symbole)

3) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \ f(z+z') = f(z) f(z')$

Cette unique f° est appelée exponentielle complexe est notée

$$\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

⚠ la dérivation est réservée aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Rq*: On peut dériver les f° $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

C'est Hors-Programme, niveau L, Analyse Complexe (fonctions holomorphes)

On a alors $\exp_{\mathbb{C}}' = \exp_{\mathbb{C}}$

D/ On raisonne par analyse-synthèse

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une telle fonction
$z \in \mathbb{C}$

Alors on a $f(z) = f\Big(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)\Big)$

$= f(\operatorname{Re}(z)) \ f(i\operatorname{Im}(z))$

$= e^{Re(z)} \times e^{i\, Im(z)}$

$= e^{Re(z)} \times \cos Im\, z + i \sin Im\, z$

Ainsi, on a l'unicité modulo l'existence

Synthèse : c'est ok ■

<u>Rq</u> : Si $z \in \mathbb{C}$, on notera e^z ou $\exp(z)$

le nombre complexe $\exp_{\mathbb{C}}$

2) Propriétés

Fait : $\forall z \in \mathbb{C}, \exp_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$.

<u>D/</u> Soit $z \in \mathbb{C}$

On a $\exp_{\mathbb{C}}(z) = \underbrace{e^{Re(z)}}_{\substack{>0 \\ \text{cf Term.}}} \cdot \underbrace{e^{i\, Im(z)}}_{\substack{\neq 0 \text{ car} \\ \in \mathbb{U}}}$

■

<u>Proposition :</u>

1) $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective

2) Elle n'est pas injective, mais, si $z, z' \in \mathbb{C}$ on a

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(z') \Rightarrow z \equiv z' \, (2i\pi)$$

D/ 1) Soit $z \in \mathbb{C}^*$

Ĉ $z \neq 0$, écrivons $z = re^{i\theta}$

avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Ĉ $r > 0$ et ĉ $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est surjective,

Fixons $a \in \mathbb{R}$ tq $\exp(a) = r$

Posons $v := a + i\theta$

$$\exp_{\mathbb{C}}(v) = \exp(a + i\theta)$$

$$= \exp_{\mathbb{C}}(a)\, e^{i\theta}$$

$$= e^{a} e^{i\theta} = re^{i\theta} = z \quad \blacksquare$$

2) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tq $\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(z')$

écrivons $z = a + ib$ et $z = a' + ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

monde +   monde ×

$a + ib$ $re^{i\theta}$

On a $\exp_{\mathbb{C}}(z) = e^{a} e^{ib} = \exp_{\mathbb{C}}(z') = e^{a'} e^{ib'}$

On passe au module : $|e^{a} e^{ib}| = e^{a} = e^{a'}$

Ĉ $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est injective, on a $a = a'$

Donc on a $e^{a} e^{ib} = e^{a} e^{ib'}$

Donc puisque $e^{a} > 0$, $e^{ib} = e^{ib'}$ donc $b \equiv b' \; [2\pi]$

Fixons donc $k \in \mathbb{Z}$ tq $b' = b + 2k\pi$

On a $z' = a' + ib' = a + ib' = a + i(b + 2k\pi)$

$= a + ib + 2ki\pi = z + k2\pi i$

Donc $z \equiv z' [2i\pi]$ ∎

V Racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) Déf°

Déf° Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que z est une racine n-ième de l'unité $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $z^n = 1$

Exemple :

Posons $z_0 := -\frac{1}{2} \quad i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Calculons $z_0^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $z_0^3 = \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{a+b}\underbrace{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{a-b}$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = 1$

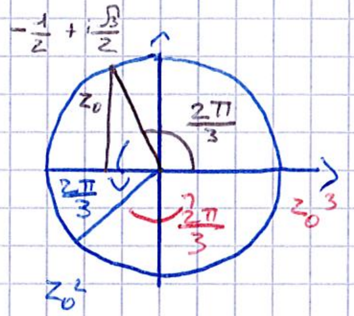
Fait : $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine 3-ième de l'unité

Exemple :

- $1^4 = 1$
- $(-1)^4 = 1$
- $i^4 = 1$
- $-i^4 = (-1)^4 i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

Ainsi $1, -1, i, -i$ sont des racines 4-ème de l'unité

Rq : Dessinons



On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité

On a $\mathbb{U}_n := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \right\}$

Rq : on montrera que $\mathrm{card}(\mathbb{U}_n) = n$

2, Exemples

a) $\mathbb{U}_1$ (+)

On a $z \in \mathbb{U}_1 \iff z^1 = 1 \iff z = 1 \iff z \in \{1\}$
donc $\mathbb{U}_1 = \{1\}$

b) $\mathbb{U}_2$

$z \in \mathbb{U}_2 \iff z^2 = 1 \iff z^2 - 1 = 0 \iff (z-1)(z+1) = 0$
$\iff z = 1$ ou $z = -1 \iff z \in \{1, -1\}$

Donc $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$

c) $\mathbb{U}_4$

$z \in \mathbb{U}_4 \iff z^4 = 1 \iff (z^2)^2 = 1$

$\iff z^4 - 1 = 0 \iff (z^2+1)(z^2-1) = 0$

$\iff (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$

$\iff z \in \{\pm 1, \pm i\}$

d) $\mathbb{U}_3$

Soit $z \in \mathbb{C}$

On a $z \in \mathbb{U}_3 \iff z^3 = 1 \iff z^3 - 1 = 0$

or on a $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$

Bernoulli

Donc $z \in \mathbb{U}_3 \iff z = 1$ ou $z^2+z+1 = 0$

or, on sait d'après le cours, on a

$z^2+z+1 = 0 \iff z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$z = \dfrac{-1+i\sqrt{|\Delta|}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1-i\sqrt{|\Delta|}}{2}$

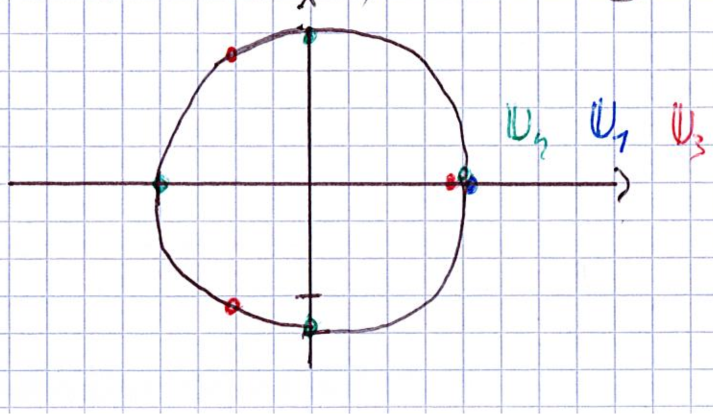
où $\Delta := 1^2 - 4 \; (= -3)$

Donc on a

$z \in \mathbb{U}_3 \iff z = 1$ ou $z = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

donc $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right\}$

e) Dessins



3) Propriétés

Fait f^{al} $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

D/ Soit $z \in \mathbb{U}_n$

Mq $z \in \mathbb{U}$, ie mq $|z| = 1$

ORAA et Osq $|z| \neq 1$

On distingue 2 cas :

1er cas : osq $|z| > 1$

Donc d'après le lemme, $|z|^n > 1^n$

or $|z|^n = |z^n| = |1| = 1$

donc $1 > 1$, absurde

2e cas, osq $|z| < 1$

De même, on déduit que $1 < 1$

, absurde

Dans tout les cas c'est absurde

Ainsi, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

Lemme

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$

Alors $\left.\begin{array}{l} a < b \\ \alpha < \beta \end{array}\right\} \Rightarrow a\alpha < b\beta$

$a < b \underset{\forall n \in \mathbb{N}^*}{\Rightarrow} a^n < b^n$

D/ 1) Osq $a<b$ et $\alpha<\beta$

On a $b-a>0$.

ĉ $\alpha \geqslant 0$, on a $\alpha(b-a)\geqslant 0$ donc $\alpha b \geqslant \alpha a$

de même, $b\beta > b\alpha$

CCl : On a montré que $b\beta > b\alpha \geqslant \alpha a$

donc $b\beta > \alpha a$

2) On note pour $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$: " $a^n < b^n$ "

Déjà, $P(1)$ est vrai

Mq $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tq $P(n)$

C $a<b$, d'après 1), on a $a^n a < b^n b$

D'où $P(n+1)$

D'où l'hérédité

Corollaire : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors la fonction

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^n$$

est strictement croissante

Cpt Soit $n\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$

Alors on a $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$

Rq : Cf $(a+b)^2 = \dots$, $\overbrace{(a+b+c)^2}^{\text{carré de la }\Sigma} = \overbrace{a^2+b^2+c^2}^{\Sigma\text{ des carrés}} + \overbrace{2ab+2ac+2bc}^{\text{doubles produits}}$

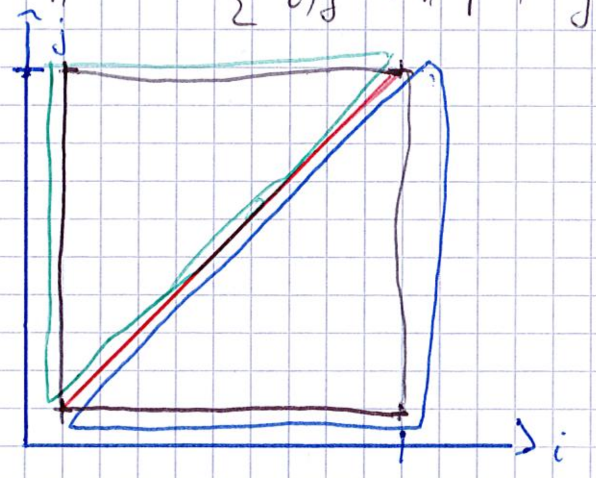
D/ Notons $K_n := [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$

$$\hat{T}_n := \{ (i,j) \in K_n \mid i<j \}$$

$$\hat{T}_n' := \{ (i,j) \in K_n \mid i>j \}$$

$$\Delta_n := \{ i,j \in K_n \mid i=j \}$$

d^n



On a $K_n = \hat{T}_n \sqcup \hat{T}_n' \sqcup \Delta_n$

échange nom des variables

Or $\displaystyle\sum_{(i,j)\in \hat{T}_n} a_i a_j = \sum_{1\leq j< i\leq n} a_i a_j = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_j a_i$

$\displaystyle= \sum_{(i,j)\in \hat{T}_n} a_i a_j$

Donc $\displaystyle\sum_{(i,j)\in K_n} a_i a_j = 2\sum_{(i,j)\in \hat{T}_n} a_i a_j + \sum_{(i,j)\in \Delta_n} a_i a_j$

Or $\displaystyle\sum a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

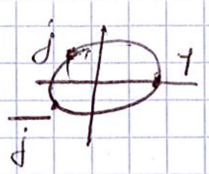
et $\displaystyle\sum_{(i,j)\in \hat{T}_n} a_i a_j = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$

enfin, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in K_n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j$

Σ carrée à variables séparées $\displaystyle= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$

$\displaystyle= \left(\sum^{n} a_i\right)^2$

Rq : Posons $j := e^{\frac{i2\pi}{3}}$ $\quad (j^n)$



On a $\overline{j^2} = \overline{j}$

D/ $\hat{C}$ $j \in \mathbb{U}$, on a $\overline{j} = \frac{1}{j}$

or $j^3 = 1$ d'après la description de $\mathbb{U}_3$

donc $\overline{j} = \frac{j^3}{j} = j^2$ ■

D²/ (T) $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\overline{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ or on a $\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$ ■

Fait : $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{j^0, j^1, j^2\}$

Prop : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Alors

Soient $\omega, \omega' \in \mathbb{C}$

1) $1 \in \mathbb{U}_n$

2) $\omega, \omega' \in \mathbb{U}_n \implies \omega \cdot \omega' \in \mathbb{U}_n$

3) $\omega \in \mathbb{U}_n \implies \frac{1}{\omega} \in \mathbb{U}_n$

D/ 1) On a $1^n = 1$

2) Osq $\omega, \omega' \in \mathbb{U}_n$

On a $(\omega\omega')^n = \omega^n \cdot \omega'^n = 1 \times 1 = 1$

3) AF ■

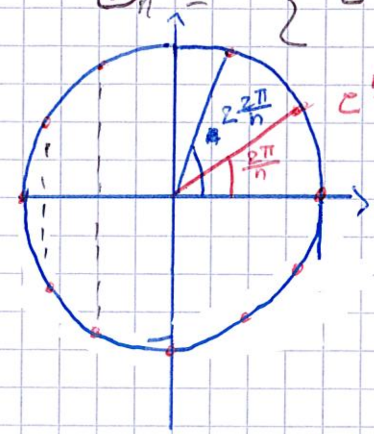
Rq $\mathbb{U}_n$ est stable par produit et passage à l'inverse donc $\mathbb{U}_n$ est stable par puissance et quotient

De même que $\mathbb{U}$

h) Description explicite de $\mathbb{U}_n$

<u>Prop°</u> : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \,;\, k \in [\![0; n-1]\!] \right\}$

d^n



exo A-t-on $\mathbb{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$?

Rq (T) $\omega \in \mathbb{U}_n \Rightarrow \bar{\omega} \in \mathbb{U}_n$

D/ <u>Je note</u> $E := \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \,;\, k \in [\![1, n]\!] \right\}$

<u>Mq</u> $\mathbb{U}_n = E$ par double-inclusion

<u>Mq</u> $E \subset \mathbb{U}_n$

<u>Soit</u> $k \in [\![1, n]\!]$

On calcule

$$\left(e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right)^n = e^{ik\frac{2\pi n}{n}} = e^{ik2\pi} = 1$$

<u>Donc</u> $e^{ik\frac{2\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n$

Ainsi $E \subset \mathbb{U}_n$

Mq $\mathbb{U}_n \subset E$, Mq $\omega \in E$

<u>Soit</u> $\omega \in \mathbb{U}_n$, on a aussi $\omega \in \mathbb{U}$ car $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

<u>écrivons</u> $\omega = e^{i\theta}$ <u>avec</u> $\theta \in]0, 2\pi]$

On a $\omega^n = 1$ ie $e^{in\theta} = 1$

donc $n\theta \equiv 0 \,[2\pi]$

donc $\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$

Fixons donc $k \in \mathbb{Z}$ tq $\theta = k\frac{2\pi}{n}$

idée : $\theta \in]0; 2\pi] \rightsquigarrow k \in [\![1,n]\!]$

On a $k = \theta \cdot \frac{n}{2\pi}$, comme $0 < \theta \leq 2\pi$,

on a $0 < k \leq n$

ie $k \in [\![1,n]\!]$

Finalement, on a bien $w = e^{ik\cdot\frac{2\pi}{n}}$ avec $k \in [\![1,n]\!]$

donc $w \in E$

Donc $\mathbb{U}_n \subset E$

Donc $\mathbb{U}_n = E$ ■

Rq : · De même, on a $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} ; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$

Plus généralement, si $a, b \in \mathbb{Z}$ sont tels que $b - a + 1 = n$

alors on a $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} ; k \in [\![a,b]\!] \right\}$

Si n est impair et s'écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$

ĉ on a $\mathrm{card}([\![-p, p]\!]) = 2p+1$, on a

$$\mathbb{U}_{2p+1} = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{2p+1}} ; -p \leq k \leq p \right\}$$

Corollaire : $\mathrm{card}(\mathbb{U}_n) = n$

D/ : On va mq

$\forall k, \ell \in [\![1,n]\!], k \neq \ell \Rightarrow e^{ik\frac{2\pi}{n}} \neq e^{i\ell\frac{2\pi}{n}}$

Par contraposition, mq

$\forall k, \ell \in [\![1,n]\!], e^{ik\frac{2\pi}{n}} = e^{i\ell\frac{2\pi}{n}} \Rightarrow k = \ell$

Soient $k, p \in [\![1,n]\!]$ tq $e^{ik\frac{2\pi}{n}} = e^{ip\frac{2\pi}{n}}$

Mq $k = p$

Ĉ $e^{ik\frac{2\pi}{n}} = e^{ip\frac{2\pi}{n}}$, d'après la description du défaut d'injectivité de $\exp_{\mathbb{C}}$, on a

(Rappel Ⓣ : $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z' \, [2i\pi]$)

$$k\frac{2\pi}{n} \equiv p\frac{2\pi}{n} \, [2\pi]$$

et donc $k \equiv p \, [n]$

Fixons donc $p \in \mathbb{Z}$ tq $k - p = pn$

On distingue 2 cas :

- 1er cas : Osq $k \leq p$

  On a $\begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ 1 \leq k \leq n \end{cases}$ donc $\begin{cases} p \leq n \\ -k \leq -1 \end{cases}$

  donc $p - k \leq n-1$

  donc $0 \leq p - k \leq n-1$

  donc $0 \leq -pn \leq n-1$

  donc $0 \leq -p \leq \frac{n-1}{n}$ $\big) = 1 - \frac{1}{n} < 1$ $\mathbb{R}^*$

  Ainsi, on a $-p \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq -p < 1$

  donc $-p = 0$, ie $p = 0$, ie $k = p$

- 2e cas si $k > p$, c'est identique

■

5) Somme des racines n-ièmes de l'unité.

Prop : On a $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Rq : Géometriquement, si $n \geq 2$,

le centre de gravité de $\mathbb{U}_n$ est l'origine O.

D/ : SG ⚠ $\neq 1$

si $n = 1$ ok

Osq $n \geq 2$.

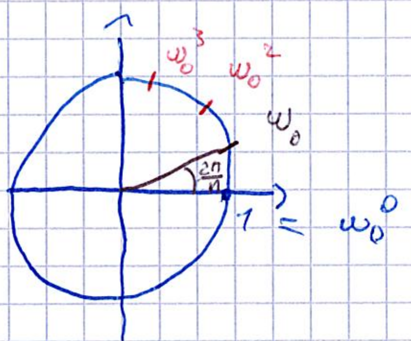
M$^{\text{él}}$ Notation : Posons $\omega_0 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

On a : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \,;\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$

$= \left\{ \omega_0^k \,;\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$

$= \left\{ 1, \omega_0, \omega_0^2, \cdots \omega_0^{n-1} \right\}$

d^n



Notons $S := \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$

on a donc $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_0^k$

$= \dfrac{1 - \omega_0^n}{1 - \omega_0}$ car $\omega_0 \neq 1$

$\hat{C}$ $\omega_0^n = 1$, on a $S = 0$ ■

VI Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

1) $z^2 = a$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, fixé

a) existence et structure

Prop :

1) On a $\exists z \in \mathbb{C} : z^2 = a$

i.e. l'éq° "$z^2 = a$" admet au moins une solution

2) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $z_0^2 = a$

i.e. soit z_0 une sol° de "$z^2 = a$"

Alors : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^2 = a \iff z = z_0$ ou $z = -z_0$

D/ 2) Soit $z \in \mathbb{C}$ idée : j'utilise z_0 c "pivot"

On a $z^2 = a \iff z^2 = z_0^2$

$\iff z^2 - z_0 = 0$

$\iff (z - z_0)(z + z_0) = 0$

$\iff z = z_0$ ou $z = -z_0$

1) idée : on écrit a sous forme exponentielle

écrivons $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

(en effet $a \in \mathbb{C}^*$)

posons $z = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

On a $z^2 = \left(\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = re^{i\theta}$

b) $\mathbb{C}$-racines carrées

Def° : Soit $a \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

On dit que z est une $\mathbb{C}$-racine carrée de a $\underset{ssi}{\Delta}$ $z^2 = a$

⚠ Dans $\mathbb{C}$ il est interdit d'utiliser $\sqrt{\cdot}$

Exemples :

- i est une $\mathbb{C}$-racine carrée de -1
- $\sqrt{2}$ ———————— 2
- $(-\sqrt{2})$ ———————— 2

c) En pratique

C'est une compétence à maîtriser

Regardons un exemple. On cherche une $\mathbb{C}$-racine carré de $1+2i$

ORPAS

Analyse

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z^2 = 1+2i$, qu'on écrit $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

On a donc $a^2 - b^2 + 2iab = 1+2i$

Donc $a^2 - b^2 = 1$ (On bosse que sur $Re(\cdot)$)

De plus, on a $2ab = 2$ donc $ab > 0$

donc a et b sont de même signe

On utilise les modules pour accélerer la resolution

On a l'égalité $|z|^2 = |1+2i|$

donc $a^2+b^2 = \sqrt{5}$

donc, on a : $2a^2 = 1+\sqrt{5}$, donc $a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Et, $2b^2 = \sqrt{5}-1$ donc $b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

donc, $\hat{c}$ a et b sont de même signe, on a

$$(*)\ z = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{ou}$$

$$z = -\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$$

Synthèse :

Comme on sait d'après le cours que "$z^2 = a$" admet exactement 2 solutions, les expressions $(*)$ sont solutions

2) $z^n = a$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ On a le même type de résultat que pour 1)

Prop :

1) $\exists z \in \mathbb{C} : z^n = a$

2) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $z_0^n = a$

Alors on a

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = a\} = \{z_0 \cdot \omega \ ; \ \omega_0 \in \mathbb{U}_n\}$$

D/ 1) donc en ecrivant $a = re^{i\theta}$

et en posant $z := \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$

ou $z := e^{\frac{\ln(r)}{n}} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$z^n = a \iff z^n = z_0^n \underset{z_0 \neq 0}{\iff} \frac{z^n}{z_0^n} = 1$$

$$\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$$

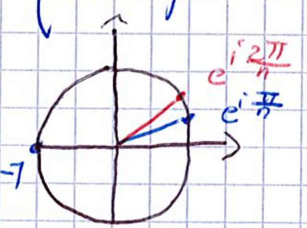
$$\iff \exists k \in [\![1, n]\!] : \frac{z}{z_0} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in [\![1, n]\!] : z = z_0 e^{ik\frac{2\pi}{n}}$$

<u>Exemple</u> Resolvons $z^n = -1$

Déjà, on a $\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n = e^{i\pi} = -1$

d^n



Soit $z \in \mathbb{C}$, on a donc les équivalences suivantes

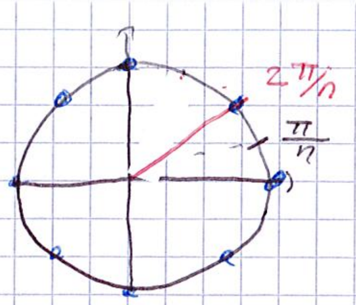
$$z^n = -1 \iff z^n = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n \iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{n}}}\right)^n = 1$$

notons $\mathcal{S} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = -1 \right\}$

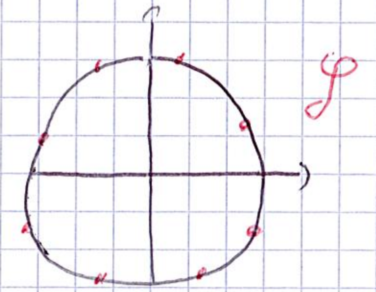
On a $\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{n}} w ; w \in \mathbb{U}_n \right\}$

$$= \left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} ; k \in [\![1, n-1]\!] \right\}$$

d^n on a



donc



3) $az^2 + bz + c$ dans $\mathbb{C}$

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$

a) formule

Thm : On note $\Delta := b^2 - 4ac$

Fixons $\delta \in \mathbb{C}$ une $\mathbb{C}$-racine carrée de Δ

Alors, on a

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$

D/ On utilise la forme canonique puis OFAA Δ

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

$$= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right)$$

$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\delta}{2a}\right]\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\delta}{2a}\right]$$

$$= a\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)$$

Donc $az^2+bz+c=0 \iff z=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$ ∎

b) Relation coeff./racines !!

Prop : Soient α, β les racines du polynôme aX^2+bX+c. Alors on a

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

D^1/ $\hat{C}$ α et β sont les racines (ie les zéros) de $aX^2+bX+c=a(X-\alpha)(X-\beta)$ $(*)$

on évalue $(*)$ en 0 pour obtenir

$c=a\alpha\beta$

D'où $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

∎

D^2/ Fixons $\delta\in\mathbb{C}$ tq $\delta^2=b^2-4ac$

On calcule : $\dfrac{-b-\delta}{2a}+\dfrac{-\delta+\delta}{2a}=-\dfrac{2b}{2a}$

$=-\dfrac{b}{a}$

et $\dfrac{(-b-\delta)(-b+\delta)}{(2a)^2} = \dfrac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$

$= \dfrac{c}{a}$

■

c) Application à la resolution des éq° somme/produit

Prop

Soient $S, P \in \mathbb{C}$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{cases} \alpha+\beta = S \\ \alpha\beta = P \end{cases}$

Alors, α et β sont les sol° de l'éq°

$$z^2 - Sz + P = 0$$

D/ C'est "fait pour"

Soit $z \in \mathbb{C}$, on calcule

$$(z-\alpha)(z-\beta) = z^2 - (\alpha+\beta)z + \alpha\beta$$

$$= z^2 - Sz + P$$

Donc, on a :

$$z^2 - Sz + P = 0 \iff z = \alpha \text{ ou } z = \beta$$

Application :

Résoudre le système $\begin{cases} \alpha\beta = 2 \\ \alpha+\beta = 3. \end{cases}$

Resolvons l'eq° $z^2 - 3iz + 2 = 0$ (*)

D'après le cours, on a, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 3iz + 2 = 0 \iff z = \frac{3i \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

où $\Delta := (-3i)^2 - 4 \cdot 2$

Donc les sol° de (*) sont $\dfrac{i\,(3 \pm \sqrt{17})}{2}$

• D'après le cours, les solutions de $\begin{cases} \alpha + \beta = 3i \\ \alpha\beta = 2 \end{cases}$

sont solutions de (*)

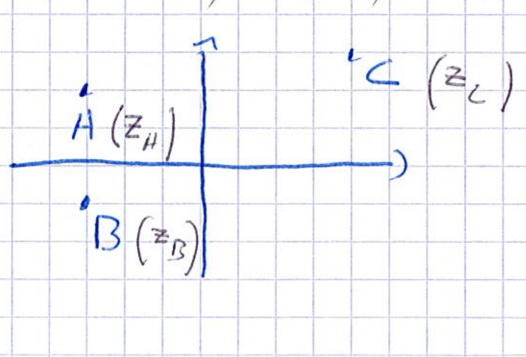
• Donc $\left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \begin{cases} \alpha + \beta = 3i \\ \alpha\beta = 2 \end{cases} \right\} = \left\{ \left(\frac{i(3-\sqrt{17})}{2}, \frac{i(3+\sqrt{17})}{2} \right), \right.$

$\left. \left(\frac{i\,(3+\sqrt{17})}{2}, \frac{i\;3-\sqrt{17}}{2} \right) \right\}$

VII Nombres complexes et géometrie

Soient, A, B, C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C deux à deux distincts

d^n



1) Alignement

On a A, B, C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ colinéaire $\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_B - x_A = k(x_C - x_A) \\ y_B - y_A = k(y_C - y_A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \quad z_B - z_A = k\,(z_C - z_A)$$

À l'oral (Rappel : $z_A = x_A + i y_A$)

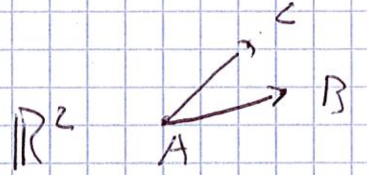
$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

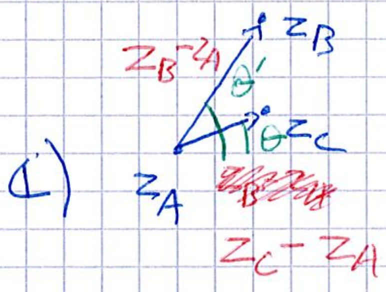
Prop : A, B, C Alignes $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

Dans la suite, on notera $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

2) Angles entre vecteurs

On a





θ' est un argument de $z_C - z_A$

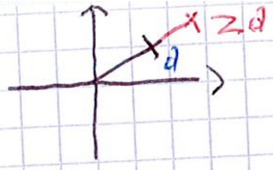
θ ——— $z_B - z_A$

D'après le cours, un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

est $\theta' - \theta$, qui est une mesure

de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$\mathbb{C}$)



d) $z \longmapsto az$ où $a \in \mathbb{C}^*$

écrivons $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

On fait : 1) une homothétie de rapport r

2) une rotation de centre O d'angle θ

En effet, $z \longmapsto (rz) \longmapsto e^{i\theta}(rz) = az$

Ou dans l'autre sens : 2) puis 1)

$$z \longmapsto e^{i\theta} z \longmapsto r e^{i\theta} z = az$$

e) $z \longmapsto az + b$ $(a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C})$

Il s'agit d'une 1) homothétie

2) rotation

3) translation

Cherchons un pt fixe de cette transformation

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto az + b$$

On cherche $z \in \mathbb{C}$ tq $f(z) = z$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$z = f(z) \iff az + b = z \iff (a-1)z = -b$

$\iff z = \dfrac{b}{1-a}$

Notons $z_0 := \dfrac{b}{1-a}$

Utilisons z_0 comme pivot

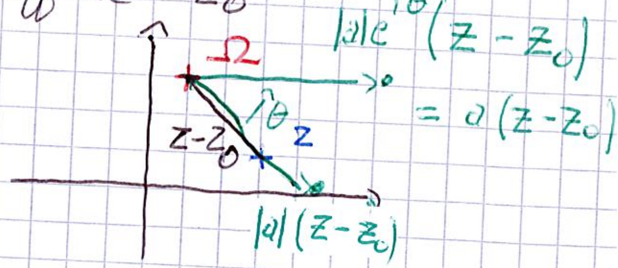
Calculons $f(z) - z_0 = az + b - z_0$

$$= az + b - (az_0 + b)$$

$$= a(z - z_0)$$

Notons Ω le point d'affixe z_0

Ainsi : $\mathbb{C}$)



Prop : Une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

3) Orthogonalité

On a donc $(AB) \perp (AC) \iff (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

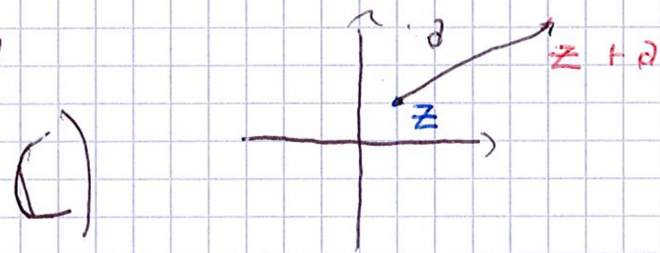
$$\iff \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$$

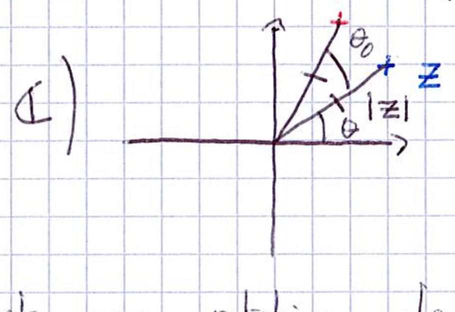
4) Transformations du plan complexe (Exemples)

a) $z \longmapsto z + a \quad (a \in \mathbb{C})$

C'est une translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe a



b) $z \longmapsto e^{i\theta_0} z \quad (\theta_0 \in \mathbb{R})$



C'est une rotation de centre O et d'angle θ_0

c) $z \longmapsto az \qquad a \in \mathbb{R}^*$

C'est ĉ un agrandissement si $a > 1$, ĉ une reduction si $a \in]0, 1[$. si $a < 0$, c'est une symétrie de centre O suivi de $z \longmapsto |a|z$