Lycée Chateaubriand
Colas Bardavid

Chapitre 7

Théories des ensembles II

Applications

$$E \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad g \quad} G$$

$$g \circ f \text{ injective} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ injective}$$
$$g \circ f \text{ surjective} \quad \Longrightarrow \quad g \text{ surjective}$$

Deux théorèmes très importants

Nous poursuivons dans ce chapitre l'étude de la théorie des ensembles avec le concept, essentiel, d'application. Grâce aux applications, on peut « relier » les ensembles les uns aux autres.

Colas Bardavid

7

Théorie des ensembles II

Applications

plan de cours et principaux résultats

I. Généralités

1) Applications

a) définition
b) vocabulaire
c) cardinal

Proposition 7.1
Soient E et F des ensembles finis. Alors, $\mathscr{F}(E,F)$ est fini et

$$\mathrm{Card}(\mathscr{F}(E,F)) = (\mathrm{Card}(F))^{\mathrm{Card}(E)}.$$

d) représentation graphique
e) exemples

2) Applications remarquables

a) identité
b) applications constantes
c) fonctions indicatrices

Définition 7.2 Ⓣ
Soit $A \subset E$. La fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, est la fonction de E dans $\{0,1\}$ définie par

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} E \longrightarrow \{0,1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{cases}$$

3) Restriction et corestriction

4) Composée de deux applications

a) définition
b) associativité
c) composition et identité

5) Diagrammes

6) Endo-applications de E

a) définition

Définition 7.3 ⓣ
Une endo-application de E est une application $f : E \longrightarrow E$.

b) points fixes
c) parties stables et endo-application induite

Définition 7.4 ⓣ
Soit $f : E \longrightarrow E$ une endo-application de E et soit $A \subset E$.

1) *On dit que A* est stable par f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$\forall a \in A,\ \ f(a) \in A.$$
2) *Dans ce cas, on peut définir l'endo-application $f\|_A$ de A par*
$$f\|_A : \begin{cases} A \longrightarrow A \\ a \longmapsto f(a). \end{cases}$$

d) composées itérées

7) Remarques

a) axiome du choix
b) retour sur les ensembles définis par paramétrisation

II. Injections, surjections, bijections

9.4
9.12
9.13
9.27

1) Injections

a) définition
b) propriétés
c) lien avec le cardinal

2) Surjections

a) définition
b) propriétés
c) lien avec le cardinal

3) Bijections

a) définition
b) propriétés
c) lien avec le cardinal

4) Réciproque d'une application

a) définition

Définition 7.5 ⓣ
Soit $f : E \longrightarrow F$. Soit $g : F \longrightarrow E$. On dit que g est réciproque à f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \textit{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$

b) exemples
c) unicité

5) Bijection réciproque

a) définition

Théorème-Définition 7.6 Ⓣ
Soit $f : E \longrightarrow F$.

1) *On a*
$$f \text{ bijective} \iff \exists g : F \longrightarrow E : \ g \text{ est réciproque à } f$$

2) *Si* f *est bijective, l'unique* $g : F \longrightarrow E$ *réciproque à* f *est appelée* bijection réciproque de f *et est notée* f^{-1}.

b) bijection réciproque et composition

III. Images réciproques et images directes

9.21 18

1) Image réciproque (tiré-en-arrière)

a) définition

Définition 7.7 Ⓣ
Soit $B \subset F$. L'image réciproque de B par f, *notée* $f^{\langle -1 \rangle}[B]$, *est la partie de* E *définie par*
$$f^{\langle -1 \rangle}[B] := \Big\{ x \in E \mid f(x) \in B \Big\}.$$

b) exemples
c) questions

2) Image directe (poussé-en-avant)

a) définition

Définition 7.8 Ⓣ
Soit $A \subset E$. L'image directe de A par f, *notée* $f[A]$, *est la partie de* F *définie par*
$$f[A] := \Big\{ f(a) \ ; \ a \in A \Big\}.$$

b) exemples
c) lien avec la surjectivité
d) questions

3) Cas des bijections

Ch 7
Applications

Soient H, E, F, G des ensembles

I Généralités

1) Applications

a) déf°

Définition : Une application f de E dans F est la donnée pour tout élément x de E d'un élement de F noté $f(x)$

- On note alors $f : E \longrightarrow F$
- On note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F
- Si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ (ie si $f : E \longrightarrow F$ ie si f est une application de E dans F), on note

$$f(\cdot) := f$$

b) vocabulaire

Soit $f : E \longrightarrow F$ Soit $x \in E$. Alors

- E est le domaine de f, aussi appelé ensemble de depart de f

· F est le codomaine de f, aussi appelé ensemble d'arrivée de f

Soit $y \in F$. Osq $y = f(x)$

On dit alors que :

· y est l'image de x par f

· x est un antécédent de y par f

En g^al^ On dit, si $y \in F$, que y est atteint par f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists\, x' \in E : y = f(x')$

<u>Rq</u> : lorsque F est composé de nombres réels, i.e quand $F \subset \mathbb{R}$,

on dit aussi que f est une fonction (réelle)

· De m^, si $F \subset \mathbb{C}$, on dit que f est une fonction (complexe)

c) Cardinal

> Prop : Osq que E et F sont finis. Alors :
>
> 1) $\mathcal{F}(E,F)$ est fini
>
> 2) On a $|\mathcal{F}(E,F)| = |F|^{|E|}$

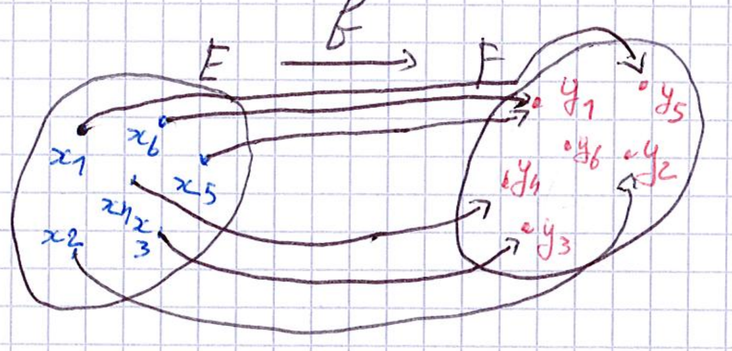
<u>Rq</u> : Certains profs notent F^E l'ensemble des applications de E dans F

D/ AC - AF, m^d construction exhaustive et sans redondances $\boxtimes$

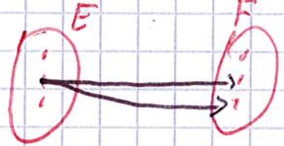
d) representation graphique

Soit $f : E \longrightarrow F$

On represente



⚠ Bug



$\not\!$ sens

Def° : Le graph de f, noté Γ_f (gamma majuscule) est la partie de $E \times F$ définie par

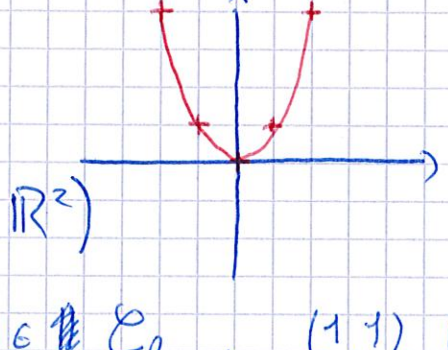
$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \; ; \; x \in E\}$$

· Lorsque $E, F \subset \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_f := \Gamma_f$ qu'on appelle alors la courbe de f

<u>Exemple</u> : On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

On a $\mathcal{C}_f = \{(x, x^2) \; ; \; x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

On dessine



On a $(0,0) \in \mathcal{C}_f$, $(1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4) \in \mathcal{C}_f$

Notation :

Si $f : E \longrightarrow F$, on note $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$

e) Exemples

- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $(\cdot)^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f \; \begin{array}{l} MPSI_3 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \text{taille de } x \end{array}$

- $g : \begin{array}{l} MPSI_3 \longrightarrow \{\text{bleu, rouge, vert} \dots\} \\ x \longmapsto \text{couleur favorite} \end{array}$

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_n \longmapsto u_0 \end{array}$

- $\Phi : \begin{array}{l} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \\ f \longmapsto \mathcal{E}_f \end{array}$

On a $\Phi\left((\cdot)^2\right) =$ 

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longrightarrow \cos(x) \end{array}$

  on a $f = \cos(\cdot)$

<u>Rq*</u> : Un application inclut dans sa définition son domaine et codomaine

On a donc $\begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \cancel{\mathbb{R}}\, [-1, 1] \\ x \longmapsto \sin x \end{array}$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\psi} \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
$$n \longmapsto \{p \in \mathbb{N} \mid p|n \text{ et } p \text{ est premier}\}$$

On a $\psi(30) = 2 \cdot 5 \cdot 3$

$\psi(1024) = \{2\}$

$\psi(100) = \{2, 5\}$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times U_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left([0,x], \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}, z\right)$$

De m̂,
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
$$x \longmapsto [-x, x]$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, je peux considérer l'application
$$\text{év}_{x_0} : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f(x_0)$$

<u>Exemple :</u>

On a $\text{év}_0(\sin) = 0$

$\text{év}_0(\exp) = 1$

$\text{év}_{\sqrt{2}}((\cdot)^2) = 2$

D'où
$$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathbb{R})$$
$$x_0 \longmapsto \text{év}_{x_0}$$

Ce qu'on peut aussi noter

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R}) \\ x_0 &\longmapsto \left(\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x_0) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Exemple : $\underbrace{\Phi(1)}_{\text{application}} \left((\cdot)^2 \right) = 1^2 = 1$

Notation : Si E, F, G sont des ensembles et si $f : E \times F \longrightarrow G$

si $(x,y) \in E \times F$, on note aussi $f(x,y)$ au lieu de $f((x,y))$.

On dit que f est une fonction à deux variables.

- Un dernier exemple d'applicat° abstraite

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{F}(E \times F, G) &\longrightarrow \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G)) \\ \varphi &\longmapsto \left(\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathcal{F}(F,G) \\ x &\longmapsto \left(\begin{aligned} F &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto \varphi(x,y) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Un ultime exemple... AC

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G)) &\longrightarrow \mathcal{F}(E \times F, G) \\ \varphi &\longmapsto \left(\begin{aligned} E \times F &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto \varphi(x)(y) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

• $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{N}$

$z \longmapsto 2$

• Soit E un ensemble. On considère

$$f : \mathcal{P}(E)^2 \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$
$$(A, B) \longmapsto A \cup B$$

• $$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$$
$$A \longmapsto \{B \subset \mathcal{P}(E) \mid A \subset B\}$$

<u>Exemple :</u> on prend $E = \mathbb{R}^2$

Alors $f($  $) = \left\{ \begin{array}{l} \text{l'ensemble des parties de} \\ \mathbb{R}^2 \text{ contenant} \end{array} \right.$  $\left. \right\}$

2) Applications remarquables

a) identité

C'est l'application de E dans E, notée Id_E, définie par $Id_E : E \longrightarrow E$
$x \longmapsto x$

Exemple : $Id_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(\exp) = \exp$

b) applications constantes

déf° : Soit $a \in F$. L'application (de E dans F) constante égale à a, notée $\tilde{a}$, est définie par $\tilde{a} : E \longrightarrow F$
$x \longmapsto a$

Rq : Plus rigoureusement, on la notera $\tilde{a}^{[E \to F]}$

c) Fonctions indicatrices

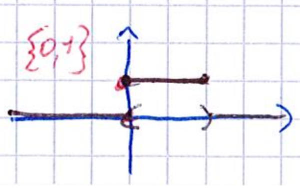
déf : Soit $A \subset E$. La fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, est l'applicat° de E dans $\{0,1\}$ déf par : $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0,1\}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Rq : ① Rigoureusement, on la notera $\mathbb{1}_A^{[E]}$

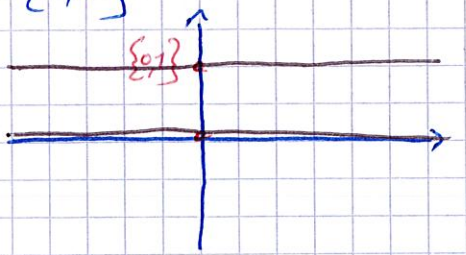
Exemples : $\mathbb{1}_{[0,1]} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

son graphe est



Regardons $1\!\!1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$

Son graphe est



<u>Prop :</u> Soit E un ensemble

Soient $A, B \subset E$

Alors, on a :

1) $1\!\!1_{\bar{A}} = \tilde{1} - 1\!\!1_A$

2) $1\!\!1_{A \cap B} = 1\!\!1_A \times 1\!\!1_B$

3) $1\!\!1_{A \cup B} = 1\!\!1_A + 1\!\!1_B - 1\!\!1_A \cdot 1\!\!1_B$

<u>D/</u> 1) R* C'est une $\forall$-Assertion

Mq $\forall x \in E$, $1\!\!1_{\bar{A}}(x) = 1 - 1\!\!1_A(x)$

Soit $x \in E$

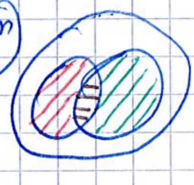
On distingue 2 cas

Si $x \in A$: on a $0 = 1 - 1$

Si $x \notin A$: $1 = 1 - 0$

2) Mq $1\!\!1_{A \cap B} = 1\!\!1_A \cdot 1\!\!1_B$

d^n



Soit $x \in E$

On distingue des cas

Si $x \in A$

On distingue 2 cas :

Si $x \in B$:

On a $1\!\!1_{A \cap B}(x) = 1$ et $1\!\!1_A \cdot 1\!\!1_B = 1$

Donc : $1\!\!1_{A \cap B}(x) = (1\!\!1_A \cdot 1\!\!1_B) = 1$

- Si $x \notin B$

  On a $x \notin A \cap B$ donc $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$

  Comme $\mathbb{1}_B(x) = 0$ (car $x \notin B$), on a bien

  $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = (\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B)(x)$

- Si $x \notin A$: de même

2) ■

3) Je me ramène au cas précédent.

On a : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_{\overline{\overline{A\cup B}}} = \mathbb{1}_{\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}}$

① $\tilde{1} - \mathbb{1}_{\bar{A}\cap\bar{B}}$

② $\tilde{1} - \mathbb{1}_{\bar{A}} \cdot \mathbb{1}_{\bar{B}}$

① $\tilde{1} - (\tilde{1} - \mathbb{1}_A)(\tilde{1} - \mathbb{1}_B)$

$= \tilde{1} - \tilde{1} + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \boxed{\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B}$

3) Restriction et corestriction

Def° : Soit $f : E \longrightarrow F$ et soit $A \subset E$

1) La restriction de f à A est l'applicat° de A dans F notée $f|_A$ et définie par

$$f|_A : \begin{array}{l} A \longrightarrow F \\ a \longmapsto f(a) \end{array}$$

2) Soit $f : E \longrightarrow F$ et soit $B \subset F$

On suppose que $\forall x \in E,\ f(x) \in B$

La corestriction de f à B notée $f|^B$ est définie par :

$$f|^B : \begin{array}{l} E \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

4) Composée

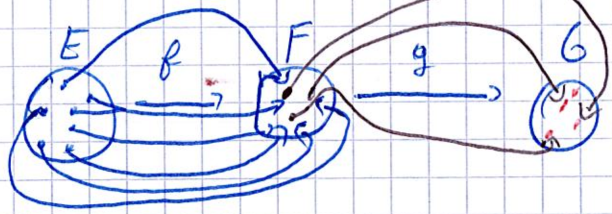
a) **Déf°** : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$

La composée de f et g, notée $g \circ f$, est définie par

$$g \circ f : \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$$

Rq : $g \circ f$ pourra être écrite : "f", "$\circ f$" puis "$g \circ f$" et lue "f puis g"

- On a le dessin



D'où

$g \circ f$

Exemples

- $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R} \xrightarrow{(\cdot)^2} \mathbb{R}$

On a $(\cdot)^2 \circ \sqrt{\cdot} = x$ ⚠ non, mais $Id_{\mathbb{R}_+}$

- $\mathbb{R} \xrightarrow{(\cdot)^2} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R}$

On a $\sqrt{\cdot} \circ (\cdot)^2 = |\cdot|$

D/ En effet, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x})^2 = x$

$\forall t \in \mathbb{R}, \sqrt{t^2} = |t|$

b) associativité

Prop : Soient $f : E \longrightarrow F$

$g : F \longrightarrow G$

$h : G \longrightarrow H$

Alors, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

d^n : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$

D/ c'est (f)   R° C'est une $\forall$-assertion

Mq $\forall x \in E, h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$

Soit $x \in E$, on a

$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x))$

$= h(g(f(x)))$

et $(h \circ g) \circ f(x)$

$= (h \circ g)(f(x))$

$= h(g(f(x)))$

Ainsi, on a $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$

Rq : On dit que la composition° est associative.

On peut écrire des compositions successives sans parenthésage : ex, $h \circ g \circ f$, $j \circ i \circ h \circ g \circ f$

c) Composition et identité

Prop : Soit $f : E \to F$. Alors on a

$$\begin{cases} f \circ Id_E = f \\ Id_F \circ f = f \end{cases}$$

(d^n) $E \xrightarrow{Id_E} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{Id_F} F$

D/ ($\forall$-Assertions)

Soit $x \in E$

On a $(f \circ Id_E)(x) = f(\underbrace{Id_E(x)}_{= x})$

$\qquad = f(x)$

D'où $f \circ Id_E = f$

De m̂ $Id_F \circ f = f$ ∎

5) Diagramme

Déf° : Un diagramme (d'ensembles) est la donnée d'ensembles et d'applications reliant ces ensembles.

Ex : (d^n)

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right, "i"'] & F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & G \arrow[dr, bend left, "j"] & \\
 & H & I \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "k"'] & J
\end{tikzcd}$$

On dit que le diagramme est commutatif $\underset{ssi}{\Delta}$ deux chemins dans ce diagramme ayant m̂ origine et m̂ but sont toujours égaux.

Ex :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & F \arrow[d, "i"] \\
G \arrow[r, "h"'] & H
\end{tikzcd}$$

commutatif $\Leftrightarrow i \circ f = h \circ g$

__Ex*__ : interprétons l'associativité de $\circ$ comme une commutativité

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(E,G) \arrow[dr] & \\
\mathcal{F}(F,G) \arrow[ur, "\rho_{f_0}"] \arrow[dr] & & \mathcal{F}(E,H) \\
 & \mathcal{F}(F,H) \arrow[ur, "\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

$g \longmapsto g \circ f_0$, $\quad g \longmapsto h_0 \circ g$

$\varphi \longmapsto h_0 \circ \varphi$, $\quad \varphi \longmapsto \varphi \circ f_0$

où $\rho_{f_0} : \mathcal{F}(F, G) \longrightarrow \mathcal{F}(E, G)$

$g \longmapsto g \circ f_0$

$\lambda_{h_0} : \mathcal{F}(F, G) \longrightarrow \mathcal{F}(F, H)$

$g \longmapsto h_0 \circ g$

$E, G \qquad E\, H$

$\varphi \qquad h_0 \circ \varphi$

6) Endo-applications de E

a) __déf°__ : Une endo-application de E est un application de E dans E

__Exemple__ :

- $[0,1] \longrightarrow [0,1]$

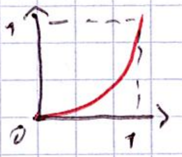
  $t \longmapsto \sqrt{t}$

ℓ

- De même, si $n \in \mathbb{N}^*$, $[0,1] \longrightarrow [0,1]$

  $t \longmapsto t^n$

d^n



$(\cdot)^n$

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{f} & [0,1] \\ t & \longrightarrow & 1-t \end{array}$$

On a bien $\forall t \in [0,1],\ f(t) \in [0,1]$

C'est une involution. On a $f \circ f = Id_{[0,1]}$

(D/ⓣ $f(f(t)) = f(1-t) = 1-(1-t) = t$

b) p^{ts} Fixes

Soit $f : E \to E$. Un point fixe de f est un élément $a \in E$ tel que $f(a) = a$

c) partie stable et endo-application induite

<u>Def</u> : Soit $f : E \longrightarrow E$

Soit $A \subset E$

On dit que A est stable par f $\overset{\Delta}{ssi}$

$\forall a \in A,\ f(a) \in A$

<u>Exemple</u>.

On considère $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$
$x \longmapsto x^2$

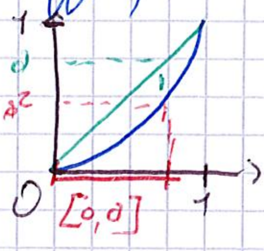
Voici des parties stables par f :

$\{0\}$, $\{1\}$ car ce sont des points fixes

$[0,1[$: en effet ⓣ $0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1$

si $a \in [0,1]$, l'intervalle $[0,a]$ est stable par f

En effet, on a $a^2 \leq a$



Mq $[0,a]$ est stable par f

Soit $t \in [0,a]$. On a $0 \leq t \leq a$

Or $(\cdot)^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $0 \leq t^2 \leq a^2$

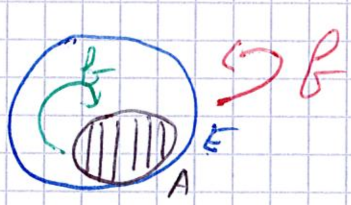
Or $a^2 \leq a$, on a $0 \leq t^2 \leq a$ ie $t^2 \in [0,a]$

Ainsi, on a $\forall t \in [0,a]$, $f(t) \in [0,a]$.

Donc $[0,a]$ est stable par f.

- $\left\{ \frac{1}{2^n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$ est stable par f
- De m̂ : $\left\{ \frac{1}{3^n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$
- $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est également stable par f
- $[0,1]$ stable par f
- $\emptyset$

d^n



Def : Soit $f : E \to E$

Soit $A \subset E$ une partie stable par f

L'endo-application induite sur A par f est l'endo-application de A, notée $f\|_A$, définie par

$$f\|_A : A \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Rq : On a $f\|_A = (f|_A)|^A$

d) Compositions itérées

Déf : Soit $f : E \longrightarrow E$

On pose $f^{n+1} := f^n \circ f$ si $n \in \mathbb{N}$

Rq : On a : $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathcal{F}(E,E)$

On pose $f^0 := \mathrm{Id}_E$

d^n

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend right, "f^n"'] & E \arrow[r, "f"] & \dots \arrow[r, "f"] & E \end{tikzcd}$$

Prop : Soit $f : E \longrightarrow E$ une endo application de E

Alors

$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad f^{n+m} = f^n \circ f^m = f^m \circ f^n$

e) commutation

- Déjà, pour écrire $g \circ f$ et $f \circ g$, il faut qu'on soit dans la situation

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] & F \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

ie $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$

- Or on a $g \circ f : E \longrightarrow E$

$f \circ g : F \longrightarrow F$

Donc, pour écrire que $g \circ f = f \circ g$, il faut que

f et g aillent de E dans E

Exemple : Prenons les endo-app° de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 \qquad\qquad x \longmapsto x+1$$

Alors $g \circ f \neq f \circ g$

En effet, sinon on aurait $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 = (x+1)^2$

Or, , $1^2+1 \neq (1+1)^2$

Déf : Soient $f, g : E \longrightarrow E$

On dit que f et g commutent $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $g \circ f = f \circ g$

7) Remarques*

a) axiome du choix

Axiome : Soit E un ensemble, I un ensemble
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par I.

Alors : $\exists f : I \longrightarrow E : \forall i \in I, f(i) \in A_i$
La fonction f "choisit" simultanément un élément $f(i)$ dans chacune des parties A_i

b) Paramètrisations

Soient I, E des ensembles
Soit $f : I \longrightarrow E$
On pose $\left\{ f(i) \; ; \; i \in I \right\} = \left\{ x \in E \mid \exists i \in I : x = f(i) \right\}$

III Injections, Surjections, Bijections

1) injections

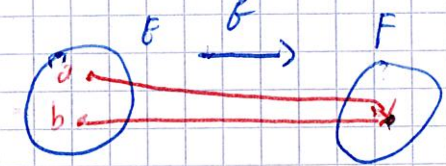
a) déf°

Déf : Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est injective $\underset{\text{ssi}}{\Delta}$ $\forall x, x' \in E,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Rq : On dit alors que f est injection (une injection)
On a f inj $\Longleftrightarrow \forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Exemples : $(\cdot)^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective,
en effet, on a $1^2 = (-1)^2$, or $1 \neq -1$

d^n



Non-Exemple

b) Propriétés

Prop : On considère le diagramme

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Alors, on a $\left.\begin{matrix} f \text{ inj} \\ g \text{ inj} \end{matrix}\right\} \Rightarrow g\circ f$ inj

D/ Osq f inj et g inj
Mq $g\circ f$ inj
Mq $\forall x, x' \in E,\ x = x' \Rightarrow g\circ f(x) \neq g\circ f(x')$
Soient $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$
Mq $g\circ f(x) \neq g\circ f(x')$

Ĉ f est inj et ĉ $x \neq x'$, on a $f(x) \neq f(x')$

Ĉ g est inj et ĉ $f(x) \neq f(x')$

on a $g(f(x)) \neq g(f(x'))$

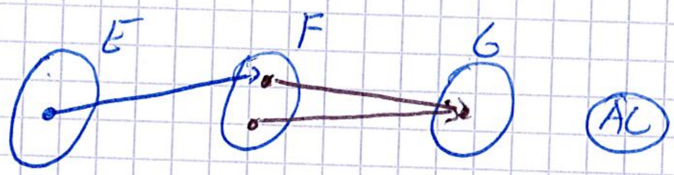
Ie, on a $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$

Donc $g \circ f$ est injective

D'où le resultat ■

<u>Rq</u> : la reciproque est fausse ie

$g \circ f$ inj $\not\Rightarrow$ g inj en g^{al}



Ici g n'est pas injective mais $g \circ f$ l'est (AC)

• Donnons un contre-exemple avec des fonctions :

$$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R} \xrightarrow{(\cdot)^2} \mathbb{R}_+$$

On a $(\cdot)^2 \circ \sqrt{\cdot} = Id_{\mathbb{R}}$: elle est injective

Mais $(\cdot)^2$ n'est pas injective

<u>Prop</u> : On a une réciproque partielle

On considère le diagramme

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On a $g \circ f$ inj $\Rightarrow$ f inj

D/ Osq $g \circ f$ inj

Mq f inj

Astuce : je choisi la contraposée

Mq $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$

Mq $x = x'$

$\hat{C}$ $f(x) = f(x')$, on a $g(f(x)) = g(f(x'))$

ie $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$

$\hat{C}$ $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x = x'$

Donc f est injective

D'où le resultat

c) lien avec le cardinal

Prop : Soient E, F des ens. finis

Soit $f : E \longrightarrow F$

Alors f injective $\Rightarrow |E| \leq |F|$

D/ + tard ; AC

Rq : $Id_E : E \longrightarrow E$ est tjrs injective

2) Surjections

a) déf°

Def : Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est surjective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

⚠ Ce n'est pas du tout
$\forall x \in E, \exists y \in F : y = f(x)$

<u>Exemples</u>

d^{n}

y_0 n'est pas atteint par f

Ici, f n'est pas surjective

- La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective
  En effet : $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t) > 0$
- Mais la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
  est surjective (on a $f = \exp|^{\mathbb{R}_+^*}$) $x \longmapsto \exp(x)$

b) propriétés

<u>Prop</u> : On considère la situation $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$
On a alors

1) $\left.\begin{array}{l} f \text{ surj} \\ g \text{ surj} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ surj

2) $g \circ f$ surj $\Rightarrow g$ surj

<u>D/</u> 1) Osq f et g surj.
Mq $g \circ f$ surj
Soit $z \in G$
Mq $\exists x \in E : z = (g \circ f)(x)$
Ĉ $z \in G$ et Ĉ $g : F \to G$ est surj., fixons $y \in F$ tq $z = g(y)$
Ĉ $y \in F$ et ĉ $f : E \to F$ est surj.
fixons $x \in E$ tq $y = f(x)$

On a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(y)$
$= z$

Ainsi, on a montré que

$$\forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x)$$

Ie $g \circ f$ surj

D'où le resultat 1)

d^n

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & F \arrow[r, "g"] & G \\ x \arrow[r, mapsto] & y \arrow[r, mapsto] & z \end{tikzcd}$$

2) Osq $g \circ f$ est surj.

Mq g est surjective

Soit $z \in G$

$\hat{C}$ $g \circ f : E \to G$ est surj., fixons $x \in E$ tq $z = (g \circ f)(x)$

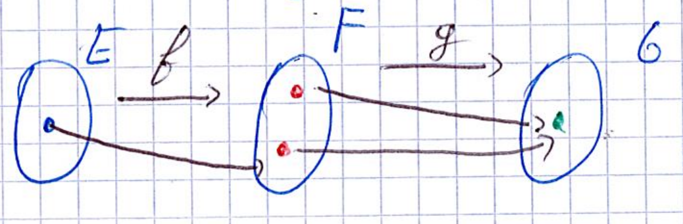
Ainsi, on a $z = g(f(x))$ $\to y$

Donc $\forall z \in G, \exists y \in F : g(y) = z$

Ie g est surjective

Contre - exemples

En g^{al} : $g \circ f$ surj $\not\Rightarrow$ f surj en g^{al}



On a $g \circ f$ surj mais f non surj.

$$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R} \xrightarrow{(\cdot)^2} \mathbb{R}_+$$

Déjà $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Mais $(\cdot)^2 \circ \sqrt{\cdot} = Id_{\mathbb{R}_+}$ est surjective

exo Mq $\left.\begin{array}{l} g\circ f \text{ surj} \\ g \text{ inj} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ surj

c) lien avec le cardinal

<u>Prop :</u> Soient E, F ens. finis et soit $f : E \to F$

Alors f surj $\Rightarrow |E| \geq |F|$

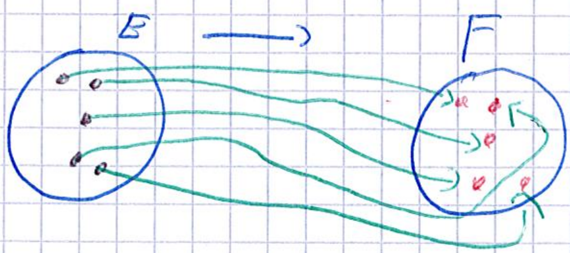
D/ AC ; f + plus loin ■

3) Bijections

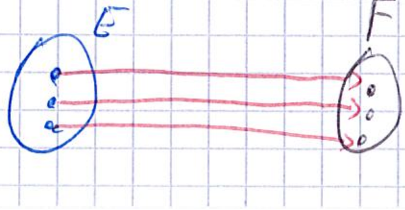
a) déf°

<u>Déf</u> : Soit $f : E \to F$. On dit que f est bijective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ f injective et f surjective

dⁿ



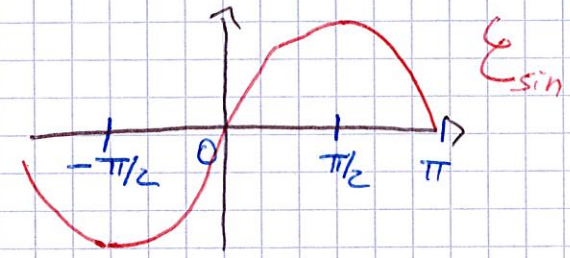
+ simple



Exemples :

- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection

- dⁿ $\sin(\cdot)$



On considère $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$: elle est surjective

On a $\boxed{\sin\Big|_{[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]}$

D/ En effet, $\sin(\cdot)$ est continue car dérivable

De ⊕ : sin est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$
(car $\sin' > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$) ■

b) propriétés

Prop : On considère $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$
Alors :

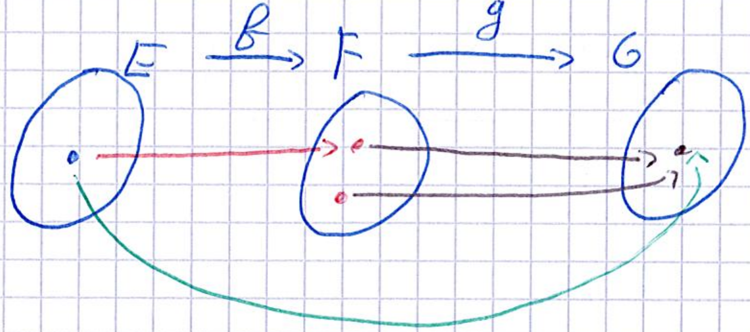
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ bij} \\ g \text{ bij} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ bij}$$

D/ c'est 😊

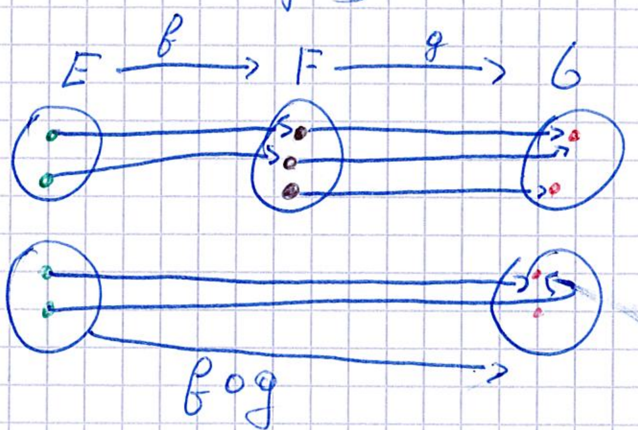
$$\left.\begin{array}{l} f, g \text{ bij} \Longrightarrow f, g \text{ inj} \Longrightarrow g\circ f \text{ inj} \\ \text{de } \hat{m} \text{ pour surj, } g\circ f \text{ surj} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ bij}$$

Rq ⚠ : En g^{al} : $g \circ f$ bij $\not\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{ni } f \text{ bij} \\ \text{ni } g \text{ bij} \end{cases}$

Contre-exemples



2) En g^{al}, $\left.\begin{matrix} g \text{ surj} \\ f \text{ inj} \end{matrix}\right\}$ $\not\Rightarrow$ $g \circ f$ bij



(AF) chercher contrex avec des f° réelles

c) lien avec le cardinal

Prop : Soient E, F des ens. finis
Soit $f : E \longrightarrow F$

Alors f bij $\Rightarrow |E| = |F|$

D/ (T) f bij $\Rightarrow$ f inj $\Rightarrow |E| \leq |F|$
$\Rightarrow$ f sorj $\Rightarrow |E| \geq |F|$ $\Big\} \Rightarrow |E| = |F|$

b) Réciproque d'une application

a) def

Def : Soit $f : E \to F$
$g : F \to E$

On dit que g est réciproque à f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$g \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_F$$

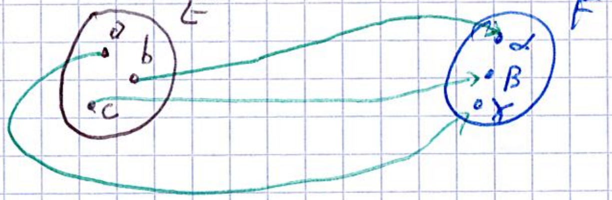
(d^n)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] & F \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

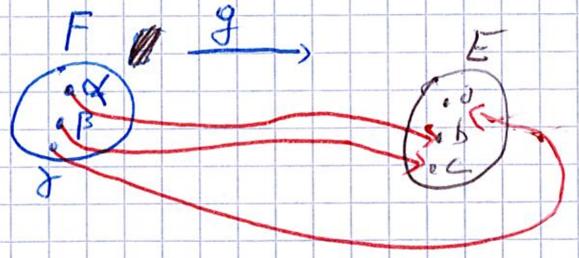
(Rq : Id_E est toujours inj, sorj, bij)

b) Exemples

On considère



Considérons



On vérifie (HF) que $\begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$

Donc g est rcpq à f

On considère $\mathbb{R} \underset{\ln(\cdot)}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}_+^*$

On a : (1) $\boxed{\ln \circ \exp = Id_{\mathbb{R}}}$

ie $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ln(e^x) = x$

(2) $\exp \circ \ln = Id_{\mathbb{R}_+^*}$

ie $\forall t > 0, \ e^{\ln(t)} = t$

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$

Alors f est réciproque à f : on a $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^*}$

On dit que f est une involution de $\mathbb{R}^*$

- En effet, si $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

- Id_E est toujours réciproque à Id_E

- $\mathbb{R}_+ \underset{\sqrt{\cdot}}{\overset{(\cdot)^2}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}_+$

c) Unicité

<u>Prop :</u> Soit $f : E \to F$

Soient $g_1, g_2 : F \to E$

Alors : $\left.\begin{array}{l} g_1 \text{ rcpq à } f \\ g_2 \text{ rcpq à } f \end{array}\right\} \Rightarrow g_1 = g_2$

<u>Rq :</u> Ainsi, si f admet une rcpq, celle-ci est unique

<u>D/</u> On procède Algebriquement

- Ĉ g_1 rcpq à f, on a $g_1 \circ f = Id_E$

- Composons à droite avec g_2, on a

$$(g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_E \circ g_2$$

or $Id_E \circ g_2 = g_2$

- Donc $(g_1 \circ f) \circ g_2 = g_2$

Or par associativité, on a

$$(g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ \underbrace{(f \circ g_2)}_{= Id_F \text{ car } g_2 \text{ rcpq à } f} = g_1 \circ Id_F$$

$= g_1$

<u>CCl :</u> $g_1 = g_2$ ▨

5) Bijection reciproque

a) déf°

Thm - déf :

Soit $f : E \longrightarrow F$

1) Alors : f bijective $\Longleftrightarrow$ ($\exists g : F \to E$; g repq à f)

2) Si f est bijective, l'unique $g : F \longrightarrow E$ qui est repq à f est appelée bijection reciproque de f et est notée $f^{-1} : F \to E$

D/ 1) $\boxed{\Leftarrow}$

Osq $\exists\, g : F \longrightarrow E$: g reciproque à f

Fixons une telle application g.

On a $g \circ f = Id_E$, Or Id_E est injective

donc f est injective

. De m̂, $f \circ g = Id_F$ est surjective

Donc f est surjective.

. CCl : f est bijective

$\boxed{\Rightarrow}$

Lemme :

Soit $f : E \to F$ une bijection,

Alors : $\forall y \in F$, $\exists!\, x \in E$: $y = f(x)$

D/ Soit $y \in F$

$\hat{C}$ f est surjective, on sait que $\exists x \in E : y = f(x)$

· Unicité

Soient $x_1, x_2 \in E$ tq $\begin{cases} y = f(x_1) \\ y = f(x_2) \end{cases}$

$\hat{C}$ f est inj et $\hat{C}$ $f(x_1) = f(x_2)$, on a $x_1 = x_2$

■ Lemme

$\boxed{\Longrightarrow}$ Osq f est bij

• Si $y \in F$, d'après le lemme, on sait que

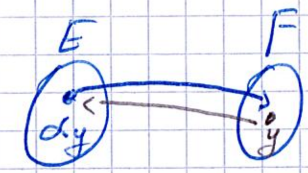
$\exists ! \, x \in E : y = f(x)$

· Notons donc, pour $y \in F$, $\alpha_y \in E$ cet unique x

On a donc la rela° fond^{ale} :

$$\forall y \in F, \; f(\alpha_y) = y \qquad (*)$$

d^n



Notons $g : F \longrightarrow E$

$y \longmapsto \alpha_y$

$(*)$ dit que $\forall y \in F, \; f(g(y)) = y$

ie dit que $f \circ g = Id_E$

Mq $g \circ f = Id_E$, ie mq $\forall x \in E$,

$g(f(x)) = x$

Soit $x \in E$

Mq $g(f(x)) = x$

Astuce : on utilise l'injectivité de f

Mq $f(g(f(x))) = f(x)$

On a $f(g(f(x))) = (f \circ g)(f(x))$

Or, $f \circ g = Id_F$

Donc $f(g(f(x))) = f(x)$

Ĉ $f(\cdot)$ est inj, on a

$g(f(x)) = x$

$\blacksquare$

À retenir : Dès que $f : E \longrightarrow F$ est bij, on peut utiliser $f^{-1} : F \longrightarrow E$ sans avoir à l'introduire

b) bij rcpq et composition

Prop : On se place dans le diagramme

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On suppose f, g bij. Alors :

1) $f \circ g$ et $g \circ f$ bij 2) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

d^n

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & F \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] & G \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \arrow[ll, bend left=50, "f^{-1}\circ g^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

D/ on fait une D/ Algébrique

- Vérifions que $f^{-1} \circ g^{-1}$ est rcpq à $g \circ f$

Déjà, on a

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{= Id_F} \circ f$$

$$= f^{-1} \circ f = Id_E$$

Puis on a

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \overbrace{(f \circ f^{-1})}^{Id_F} \circ g^{-1}$$

$$= g \circ g^{-1} = Id_G$$

Donc, par déf°, $f^{-1} \circ g^{-1}$ est rcpq à $g \circ f$

Donc .

$\square$

III Images reciproques et images directes

Soit $f : E \longrightarrow F$

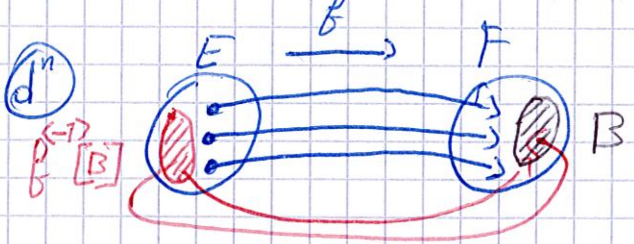
1) Images reciproques

a) déf°

<u>Déf°</u> : soit $B \subset F$. L'image reciproque de B par f (aussi appelée tirée en arrière de B par f (pull back)) notée $f^{\langle -1 \rangle}[B]$

est la partie de E définie par

$$f^{\langle -1 \rangle}[B] := \{ x \in E \mid f(x) \in B \}$$



<u>Rq</u> : $f^{\langle -1 \rangle}[B]$ c'est l'ensemble des éléments de E qui tombent dans B après application de f.

<u>Rq</u> : On le note également $f^{-1}(B)$ même si f^{-1} n'existe pas

b) Exemples

On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

Alors on a :

$$f^{(-1)}[[0,1]] = [-1,1]$$

$$f^{(-1)}[\{2\}] = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

$$f^{(-1)}[\{1\}] = \{1,-1\}$$

$$f^{(-1)}[\{0\}] = \{0\} \qquad f^{(-1)}[\{-1\}] = \emptyset$$

$$f^{(-1)}[\mathbb{R}] = \mathbb{R} \qquad f^{(-1)}[\emptyset] = \emptyset$$

Rq : On a ainsi, si $f : E \longrightarrow F$

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), \; f^{(-1)}[B] \in \mathcal{P}(E)$$

Soit E un ensemble. Soit $A_0 \in \mathcal{P}(E)$

On considère "la trace sur A_0". C'est

$\phi \; \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$
$A \longrightarrow A \cap A_0$

Alors, on a* : AC

$$\phi^{(-1)}[\{A_0\}] = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A_0 \subset A\}$$

$$\phi^{(-1)}[\emptyset] = \{\} = \emptyset$$

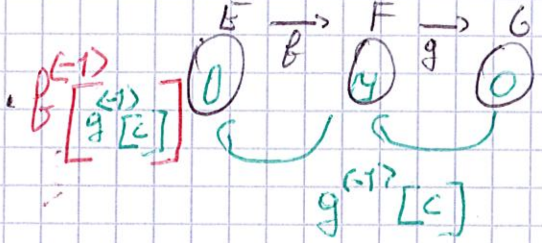
$$\phi^{(-1)}[\{\emptyset\}] = \{A \in \mathcal{P}(E \mid A \text{ et } A_0 \text{ disjointe}\}$$

c) questions

Revenons au cas g^{al} et considerons $f : E \longrightarrow F$

Plusieurs q^{o} sont naturelles

- Est ce que : $f^{(-1)}[\phi] = \phi$
- $f^{(-1)}[F] = E$?



- $f^{(-1)}\left[g^{(-1)}[C]\right] = g \circ f^{(-1)}[C]$?

Notons $f^{(-1)}[\cdot] : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

$$B \longmapsto f^{(-1)}[B]$$

- A-t-on $f^{(-1)}[\cdot] \circ g^{(-1)}[\cdot] = (g \circ f)^{(-1)}[\cdot]$?
- $f^{(-1)}[B \cap B'] = f^{(-1)}[B] \cap f^{(-1)}[B']$?
- $f^{(-1)}[B \cup B'] = f^{(-1)}[B] \cup f^{(-1)}[B']$?
- $f^{(-1)}[\overline{B}] = \overline{f^{(-1)}[B]}$?
- $B \subset B' \Longrightarrow f^{(-1)}[B] \subset f^{(-1)}[B']$?

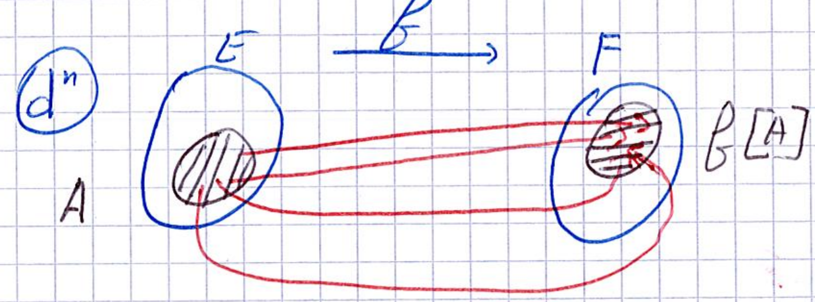
$\longrightarrow$ voir formulaire polycopié

2) Images directes

a) def°

Def : Soit $A \subset E$. L'image directe de A par f (ou la poussé en avant de A par f) notée $f[A]$ est la partie de F définie par

$$f[A] := \{y \in F \mid \exists a \in A : y = f(a)\} = \{f(a) ; a \in A\}$$



(push forward)

Rq : $f[A]$ est aussi notée $f(A)$

b) Exemples

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

On a $f[[0,1]] = [0,1]$; $f[[-1,1]] = [0,1]$

$f[\mathbb{R}_+] = \mathbb{R}_+$ $\quad$ $f[\mathbb{R}_-] = \mathbb{R}_+$

$f[\mathbb{R}] = \mathbb{R}_+$ $\quad$ $f[\{8\}] = \{64\}$

$f[\emptyset] = \emptyset$

c) lien avec la surjectivité

Prop : Soit $f : E \longrightarrow F$

1) On peut corestreindre f à $f[E]$
Mieux : $f[E]$ est la plus petite partie de F à laquelle je peux corestreindre f

2) On a alors $f|^{f[E]} : E \longrightarrow f[E]$ est surjective

D/ ok ■

d) questions

On a déjà les m̂ questions que pour $f^{\langle -1 \rangle}[\cdot]$

On dispose de $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F)$
$A \longmapsto f[A]$

Donc on est dans la situation

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(E) \arrow[r, bend left, "f[\cdot]"] & \mathcal{P}(F) \arrow[l, bend left, "f^{\langle -1 \rangle}[\cdot]"] \end{tikzcd}$$

Ces deux applications sont-elles réciproques

NON

D/ on se pose deux questions :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \; f^{\langle -1 \rangle}\left[f[A]\right] = A \; ?$$

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), \; f\left[f^{\langle -1 \rangle}[B]\right] = B \; ?$$

On prend $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

On a $f\left[f[\{-4\}]\right] = f[\emptyset] = \emptyset$

$$f^{\langle -1\rangle}\left[f\left[\{1\}\right]\right] = f^{\langle -1\rangle}\left[\{1\}\right] = \{-1, 1\}$$

3) Cas des Bijections

> **Prop :** Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection
> Soit $B \subset F$
> Alors, on a $f^{\langle -1\rangle}[B] = f^{-1}[B]$
> (on dispose de $f^{-1} : F \longrightarrow E$)

D/ Exo AC

Prop : On se place dans

$$E \to F \to G$$

Alors, on a,

$$\forall A \subset E, \quad g[f[A]] = (g \circ f)[A]$$

D/ $\subset$ Soit $z \in g[f[A]]$

$R^{\times}$ Fixons donc $y \in f[A]$ tq $z = g(y)$

De m̂, ĉ $y \in f[A]$: fixons $a \in A$ tq $y = f(a)$

On a $z = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$

Donc $z \in (g \circ f)[A]$

$\supset$ Soit $z \in (g \circ f)[A]$

$R^{\times}$ Fixons donc $a \in A$ tq $z = (g \circ f)(a)$

On a donc $z = g(f(a))$

Or $f(a) \in f[A]$

Donc $z \in g[f[A]]$