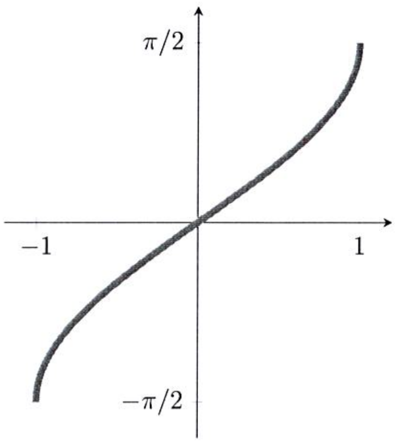
Colas Bardavid

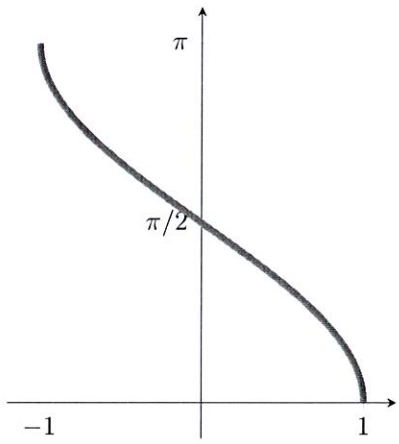
Chapitre 9

Fonctions usuelles II

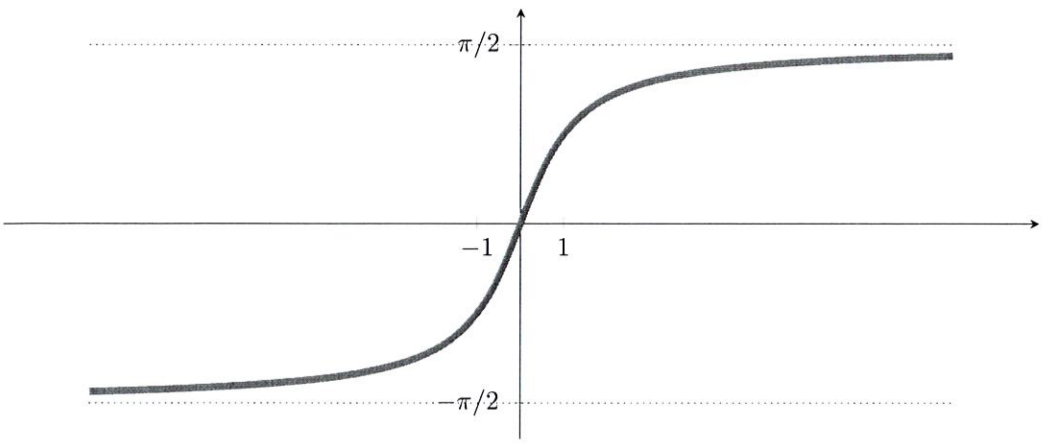
compléments



La fonction arcsin



La fonction arccos



La fonction arctan

Ce chapitre est l'occasion de compléter l'étude des fonctions réelles faites en classes de Première et Terminale. En plus de compléments, on introduit les fonctions trigonométriques inverses qui jouent un rôle important, entre autres, dans les calculs de primitives et donc, par extension, dans toutes les mathématiques.

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

9

Fonctions usuelles II

Compléments

plan de cours et principaux résultats

I. Rappels et compléments

11.9
11.10
11.20
12.8
12.9
12.14
12.15
12.19

1) Dérivée de la composée

2) Transformations de graphes et symétries

a) transformations
b) symétries

3) Espaces de fonctions

4) Fonctions réciproques

a) monotonie
b) graphes
c) dérivée

Théorème 9.1 Ⓣ
Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection dérivable et soit $y \in J$. Alors,

1)
$$f^{-1} \text{ est dérivable en } y \iff f'\big(f^{-1}(y)\big) \neq 0\,;$$

2) *dans ce cas, on a*
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f^{-1}(y)}.$$

5) Théorème de la bijection monotone

Théorème 9.2
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement monotone. Alors,

1) *l'ensemble $f[I]$ est un intervalle, qu'on note J ;*
2) *la fonction f établit une bijection entre I et J ;*
3) *sa réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue, strictement monotone, de même sens de variation que f.*

6) Dérivation des fonctions complexes

a) définition
b) exemple fondamental
c) propriétés
d) dérivation avec $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

II. Convexité

13.2
13.4
13.13
13.16

1) Paramétrisation des intervalles

2) Définition

3) Interprétation graphique

4) Lemme des trois pentes

a) le dessin du lemme
b) le lemme

5) Cas dérivable et cas $\mathscr{C}^2$

a) cas dérivable
b) cas $\mathscr{C}^2$

> **Corollaire 9.3**
> *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors,*
> $$f'' \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ convexe.}$$

6) Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes

7) Inégalité de Jensen

8) Inégalités classiques

a) avec $\ln(\cdot)$
b) avec $\exp(\cdot)$
c) avec $\sin(\cdot)$

III. Fonctions usuelles

1) Symbole x^a

2) Fonctions puissances

a) définition et notation
b) étude de p_a
c) comparaison des p_a

3) Exponentielle de base a

a) définition
b) dérivée

> **Fait 9.4**
> *On a*
> $$\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x} = x^{a-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = \ln(a)a^x$$

c) étude de la fonction $x \longmapsto a^x$

4) Croissances comparées

a) comparaison en $+\infty$
b) exemples
c) comparaison en 0

IV. Fonctions trigonométriques réciproques

14.7
14.10
14.17

1) La fonction $\arcsin(\cdot)$

a) définition et relation fondamentale
b) étude de $\arcsin(\cdot)$
c) exemples de calculs
d) dérivée de $\arcsin(\cdot)$

Proposition 9.5

1) *La fonction* $\arcsin(\cdot)$ *est dérivable sur* $]-1,1[$.
2) *On a*

$$\forall y \in \,]-1,1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

2) La fonction $\arccos(\cdot)$

a) définition et relation fondamentale
b) graphe
c) dérivée
d) une relation

3) La fonction $\arctan(\cdot)$

a) définition et relation fondamentale
b) graphe
c) dérivée

Proposition 9.6

1) *La fonction* $\arctan(\cdot)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
2) *On a*

$$\forall y \in \,]-1,1[, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

ch 9 : Fonctions usuelles

I Rappels et compléments

1) Fonction nulle part monotone

Il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et nulle part monotone ie tq

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \Rightarrow f|_{[a,b]} \text{ n'est pas monotone}$$

ie $\nexists\, a < b : f|_{[a,b]}$ monotone

Je ne sais pas dessiner une telle fonction.

2) Composition de limites

Je me place dans la situation

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \text{avec } I, J \text{ intervalles}$$

Exemple : $I = J = \mathbb{R}$

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto -\frac{5t^3 + 2t + 1}{8t^2 + 9}$$

$$f : \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}$$

On a $u(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$

En composant les limites, on obtient

$$(f \circ u)(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

(!) $f(u(t))$

Thm : On est dans la situation.

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Soit $a \in I$ ou a une borne de I

Soit $\ell \in J$ ou ℓ une borne de J

Alors on a : $\left(u(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell \right)$ et $\left(f(x) \xrightarrow[x \to \ell]{} L \right)$

Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$

$$\left.\begin{array}{l} u(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell \\ \\ f(x) \xrightarrow[x \to \ell]{} L \end{array}\right\} \Rightarrow (f \circ u)(t) \xrightarrow[t \to a]{} L$$

1) Dérivée de la composée

On a la formule (!) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

i.e $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$

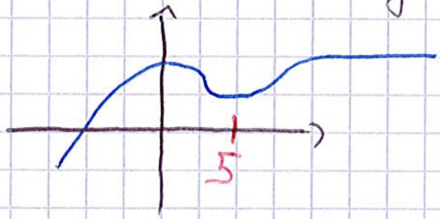
Ex : $\dfrac{d}{dx}\left(\exp\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)$

$$= \exp\left(\sqrt{x^2+1}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \, 2x = \frac{x\exp\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

2) Transformations de graphes et symétrie

a) Transformations :

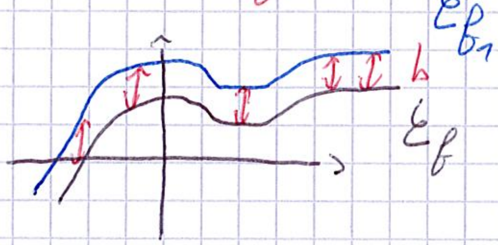
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont je connais $\mathcal{C}_f$



On pose $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad t \longrightarrow f(t) + b$

On a



On pose $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad t \longmapsto f(t+a)$

On a :

En effet, f_2 a un minimum local en $5-a$ quand elle vaut $f_2(5-a) = f(5-a+a)$

$$= f(5)$$

Exemple !!

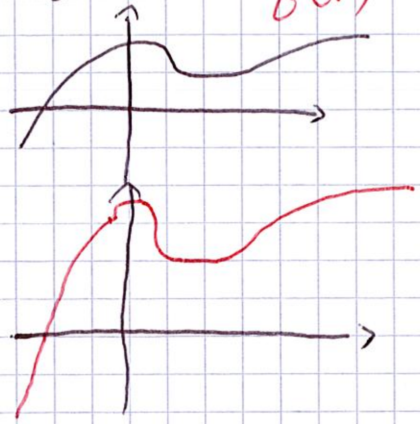
Considérons f définie par $f(x) = \sqrt{x+5}$

définie pour $x \in [-5, +\infty[$

On a

• Considérons f_3 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

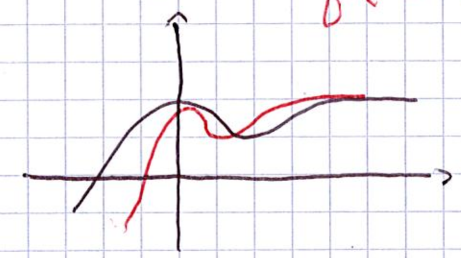
$t \longrightarrow \lambda f(t)$ avec $\lambda = 2$



Considérons $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow f(2t)$ (ou $f(\lambda t)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$)

On a

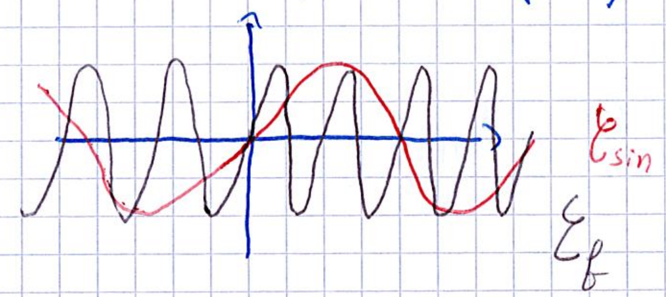


Exemple :

Considerons $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin(5x)$

On a



On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \sin'(5x)$

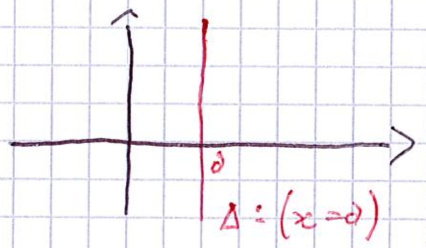
(AF) Dessiner $x \longmapsto 5 - \frac{1}{3+x}$

b) symétries

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Considerons Δ la droite d'éq° $(x = a)$

À quelle condition (CNS) a-t-on $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à Δ



On sait que $\mathcal{C}_f$ est symmétrique par rapport à (Oy) ssi f paire i.e ssi $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$

Prop : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à Δ

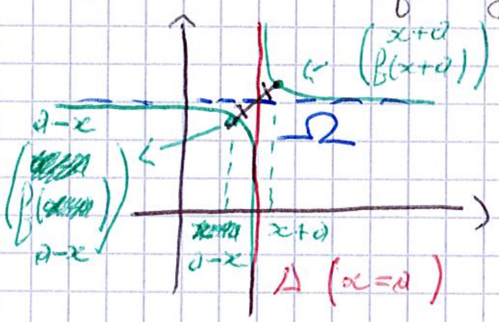
$\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(a+x) = f(a-x)$

Fixons $b \in \mathbb{R}$

Notons $\Omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

À quelle CNS a-t-on $\mathcal{C}_f$ sym par rapport à Ω ?

On a



On a $\mathcal{C}_f$ sym par rapport à $\Omega \iff \forall x \in \mathbb{R}$,

Ω milieu $[M_{a+x} ; M_{a-x}]$

où on a noté $M_t := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ si $t \in \mathbb{R}$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} a = \dfrac{(a+x) + (a-x)}{2} \\ b = \dfrac{f(a+x) + f(a-x)}{2} \end{cases}$$

Prop : on a :

$$\mathcal{C}_f \text{ sym } \Omega \iff \forall x \in \mathbb{R},\ b = \frac{f(a+x)+f(a-x)}{2}$$

3) Espaces de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\ell(I) > 0$

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ens des f° continues de I dans $\mathbb{R}$.

Rq : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est continue sur I $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall t \in I,$

$$|t-a| \leq \delta \implies |f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$$

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$

Rq : On dit que f est dérivable sur I $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall a \in I,\ \exists \ell \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall h \in \mathbb{R}^*,$$

$$\left.\begin{array}{l} |h| \leq \delta \\ a+h \in I \end{array}\right\} \implies \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq \varepsilon$$

Thm :

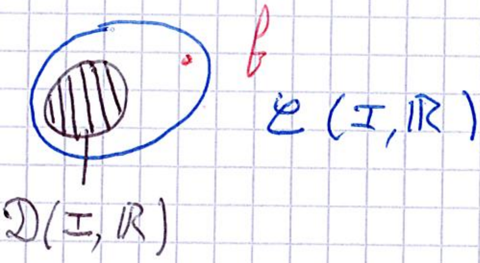
1) On a $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

i.e (T) f dérivable $\implies$ f continue

2) Mieux, on a $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

D/ 1) (+) Farol

2)



On a $|\cdot| \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

def Soit $I \in \mathbb{R}$

1) On dit que f est continûment dérivable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

f est dérivable et f' est continue

On note $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions

2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$

On dit que f est p fois dérivable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

f dérivable et f' est $(p-1)$ fois dérivable

On note $\mathcal{D}^p(I,\mathbb{R})$ l'ens. des fonctions p fois dérivables

Mieux : Plus formellement, on pose : $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) := \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$

Si $p \geq 2$, on pose

$$\mathcal{D}^p(I,\mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \mid f' \in \mathcal{D}^{p-1}(I,\mathbb{R}) \}$$

3) On dit que f est p fois continûment dérivable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ f est p fois dérivable et $f^{(p)}$ est continue

On note $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ l'ens de ces fonctions

Plus formellement, on pose

$$\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) := \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$$

si $p \geq 1$, $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$

Ex : $f \in \mathcal{C}^2 \iff f$ est 2 fois dérivable et f' continue

Prop : on a

1) $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$

2) Plus subtil, on a

$$\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$$

ie $\exists f : I \to \mathbb{R}$ dérivable : f n'est pas continue

3) (T) $\mathcal{D}^p(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^{p-1}(I,\mathbb{R}) \subset \dots \subset \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$

4) (T) $\mathcal{D}^p(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{p-1}(I,\mathbb{R})$

5) (T) $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}^p(I,\mathbb{R})$

D/ 2) + loin * AC

reste ok

def : On dit que f est infiniement dérivable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$, f est dérivable p fois.

Prop : $\displaystyle\bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{D}^p(I,\mathbb{R}) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$

On note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ens des f° ∞^{nt} dérivables

exo Mq par rec que $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^p(I,\mathbb{R})$

exo$^{*\infty}$ Trouver $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $f \notin \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Prop : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Alors

1) $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f' \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$

2) Mieux : $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \Rightarrow (\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)} \in \mathcal{C}^\infty \ldots)$

D/ ok ■

Rq : on définit si $f \in \mathcal{D}^p(I,\mathbb{R})$

$$f^{(p)} := f'^{(p-1)}$$

$$f^{(0)} := f$$

$$f'' = f^{(2)}$$

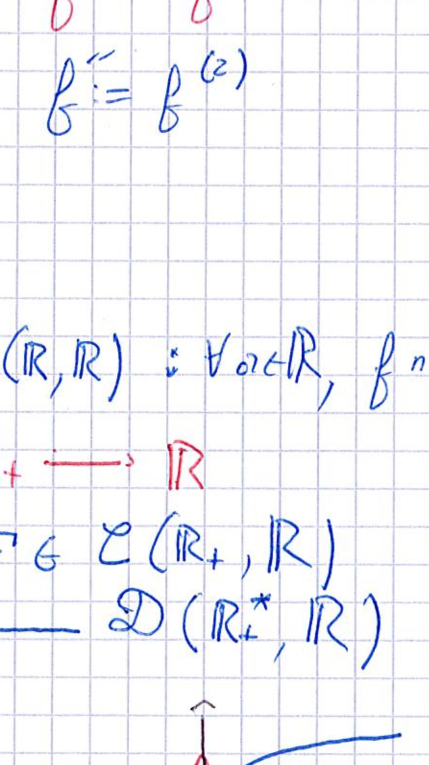
Exemples :

- $\exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall a \in \mathbb{R}$, f n'est pas dérivable en a
- $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

On a $\sqrt{\cdot} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$

On a ——— $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ ⚠ $\sqrt{\cdot}$ non dérivable en 0

d^n



Il faudrait écrire $\sqrt{\cdot}\big|_{\mathbb{R}_+^*} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$,

" $\sqrt{\cdot} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ " est un abus de notation

d) On a : $\forall x > 0,\ (\sqrt{\cdot})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $(\sqrt{\cdot})' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

i.e $\sqrt{\cdot} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

e) On a $\sqrt{\cdot} \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

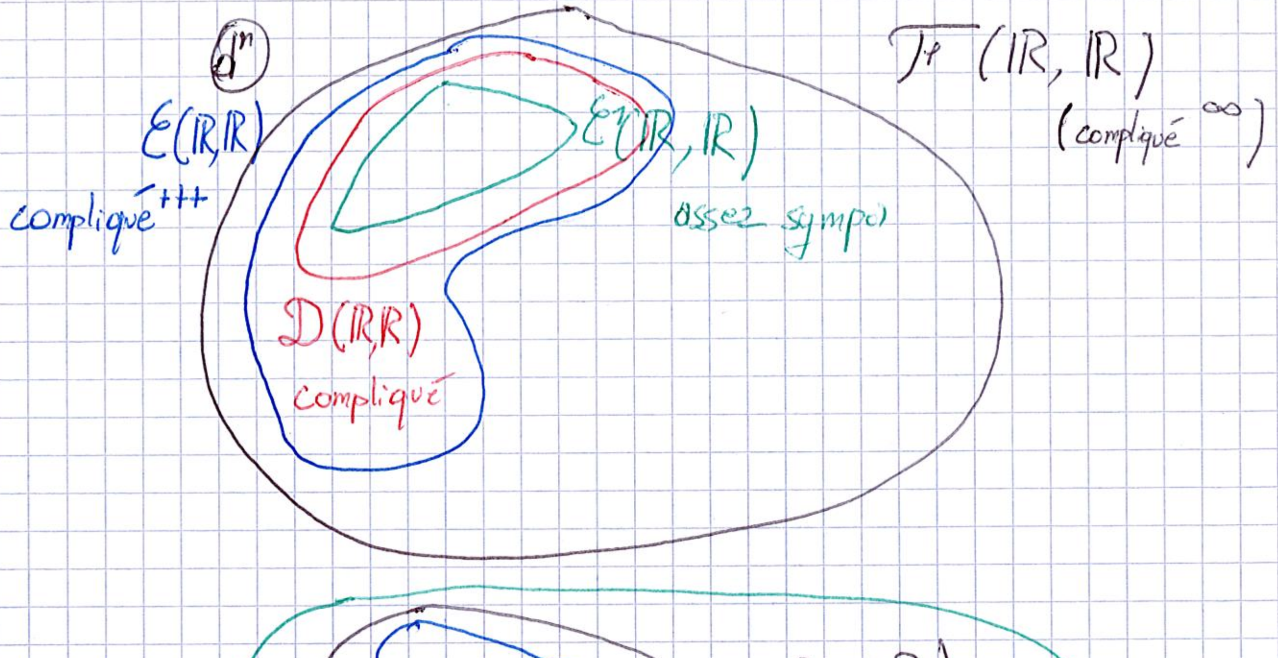
et $\forall x > 0,\ (\sqrt{\cdot})''(x) = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-1}{4\sqrt{x}}$

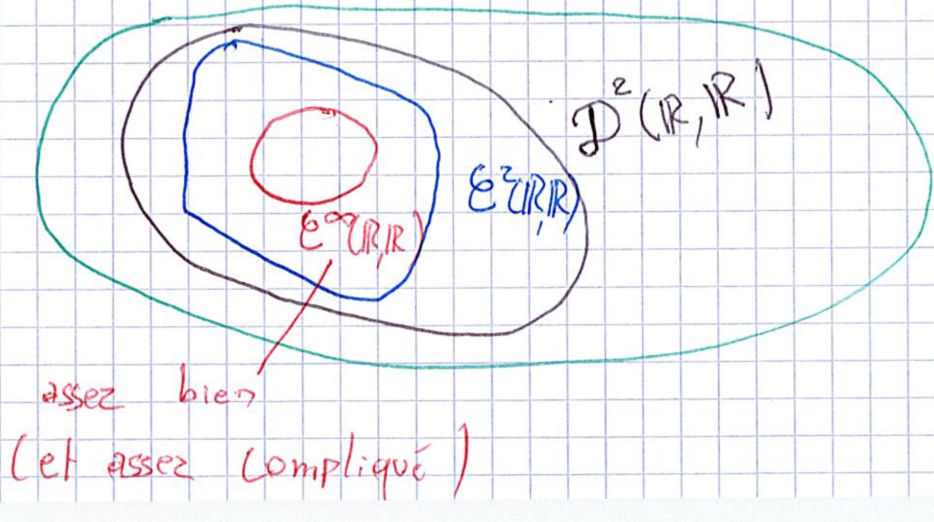
$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1}$

<u>Fait :</u> $\sqrt{x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

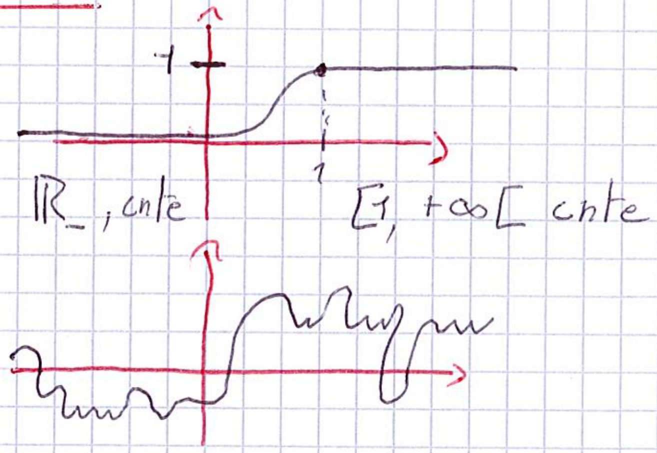
D'où $\sqrt{\cdot} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

• $(\cdot)^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

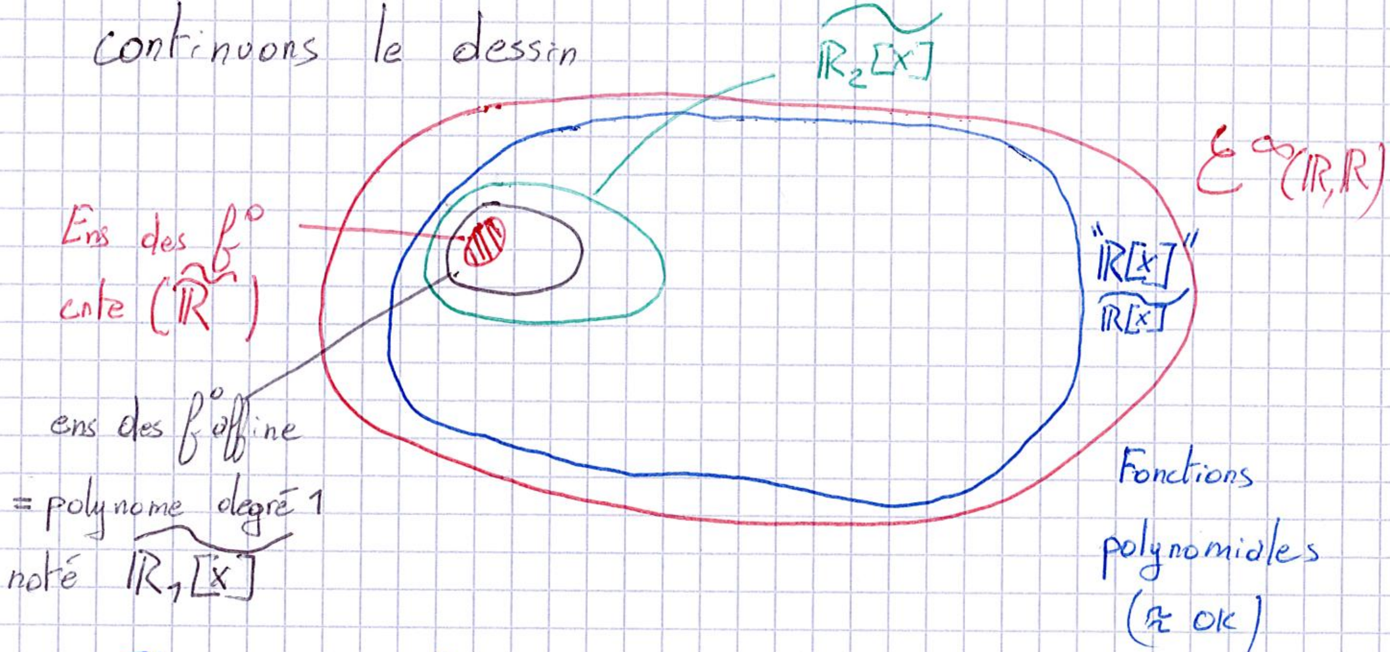




Ex de $f \in \mathcal{C}^\infty$

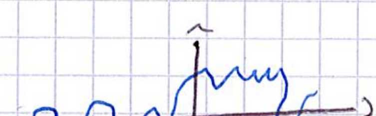


continuons le dessin

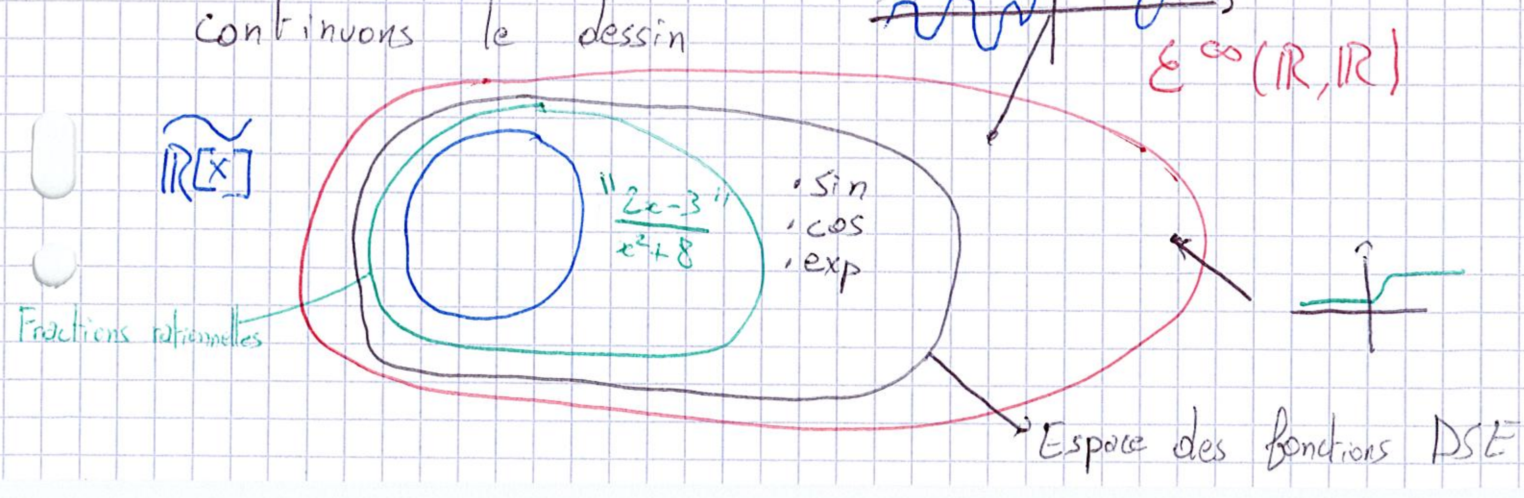


Thm $f°$ polynomiale est $\mathcal{C}^\infty$

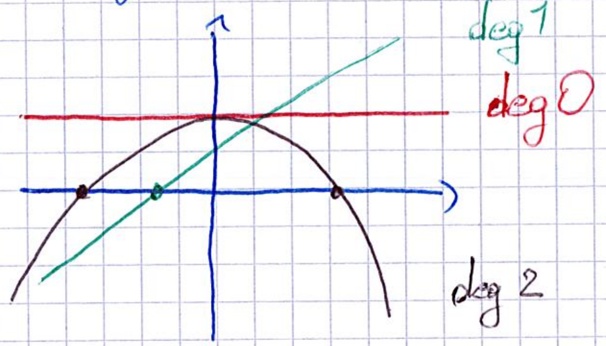
- $\cos, \sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow$ toujours $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ⚠ $\exp(x)$ n'est pas une fonction
- $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^2+1} \end{array} \in \mathcal{C}^\infty$

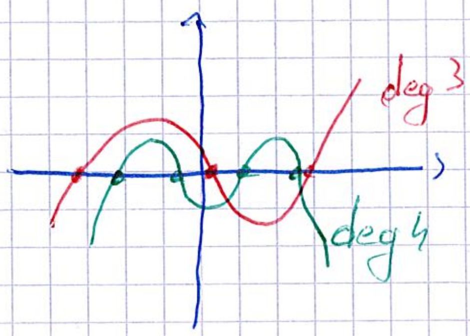


continuons le dessin

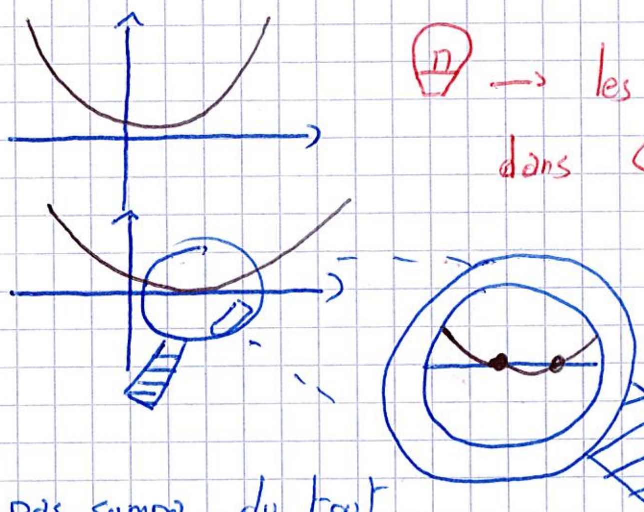


Dessin typique d'un polynôme :





Mais



(!) → les 2 racines existent dans $\mathbb{C}$

- Fonction pas sympa du tout

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

On a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \notin \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

4) Fonctions réciproques

a) Monotonie

Prop : Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Alors

1) $f \nearrow\nearrow \Rightarrow f^{-1} \nearrow\nearrow$

2) $f \searrow\searrow \Rightarrow f^{-1} \searrow\searrow$

D/ : On supp que $f \nearrow\nearrow$

Mq $f^{-1} : J \longrightarrow I \nearrow\nearrow$ ($\mathbb{R}^{*}$ $\forall$-assertion)

Mq $\forall y_1, y_2 \in J,\ y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Soit $y_1, y_2 \in J$ tq $y_1 < y_2$

Mq $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

$\boxed{B}$ $\hat{c}$ f surj et $\hat{c}$ $y_1, y_2 \in J$ fixons $x_1, x_2 \in I$
tq $y_1 = f(x_1)$
$y_2 = f(x_2)$ $\boxed{B}$ $\underline{\underline{R^x}}$ AC

$$\begin{cases} x_1 = f^{-1}(y_1) \\ x_2 = f^{-1}(y_2) \end{cases}$$ AC

~~On~~ Ainsi, Mq $x_1 < x_2$ (on sait que $y_1 < y_2$ ie $f(x_1) < f(x_2)$)

ORPA et osq $x_1 \geq x_2$

$\hat{c}$ f $\nearrow\nearrow$, on a $f \nearrow$

donc, $\hat{c}$ $x_1 \geq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$

Ie : $y_1 \geq y_2$: c'est absurde

Donc $x_1 < x_2$

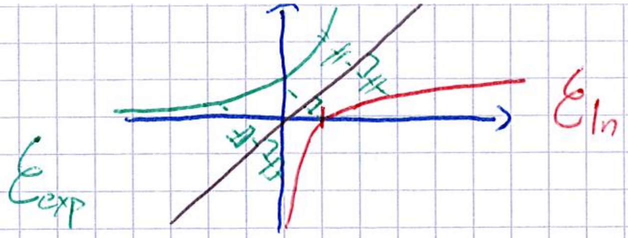
Ie on a $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Donc $f^{-1} \nearrow\nearrow$ 1)

2) De même

b) graphes

Prop (T) Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection
Alors le graphe de f^{-1} est le symmetrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'eq° $(y = x)$



Lemme : (T) Soit $f : E \longrightarrow F$ bijection

Soit $x \in E$ et soit $y \in F$

Alors $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

D/ $\boxed{\Rightarrow}$ Osq $y = f(x)$. Donc $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$

Ie $f^{-1}(y) = x$

$\boxed{\Leftarrow}$ De m̂

Lemme 2 : Notons $S_\Delta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la symétrie du plan par rapport à la droite $\Delta : (y = x)$

Alors, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^2$, $S_\Delta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

D/ Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Écrivons $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

On sait que $\overrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et on sait que le milieu de $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right]$ est sur Δ

Donc on a $\begin{pmatrix} \alpha - x \\ \beta - y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ie $\begin{pmatrix} \alpha - x \\ \beta - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} := AC + BD$ ie $\alpha - x + \beta - y = 0$

et $\dfrac{x + \alpha}{2} = \dfrac{y + \beta}{2}$

CCl J'imagine que j'ai un système à resoudre d'inconnues α et β

J'ai $\begin{cases} \alpha + \beta = x + y \\ \alpha - \beta = y - x \end{cases}$

Donc $2\alpha = 2y$ ie $\alpha = y$, De m̂, $\beta = x$

CCl : $S_\Delta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ ■

D/prop Mq $\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_\Delta[\mathcal{C}_f]$

Astuce : $S_\Delta : \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$ est une bijection

Astuce : S_Δ est une involution !!

En effet, $S_\Delta \circ S_\Delta = Id_{\mathbb{R}^2}$

Donc $S_\Delta^{-1} = S_\Delta$

Ainsi, mq $\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_\Delta^{-1}[\mathcal{C}_f]$

or, ĉ S_Δ est une bij, on a $S_\Delta^{-1}[\mathcal{C}_f] = S_\Delta^{\langle -1 \rangle}[\mathcal{C}_f]$

Mq $\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_\Delta^{\langle -1 \rangle}[\mathcal{C}_f]$

Soit $x \in I$ et soit $y \in J$

On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{f^{-1}} &\iff x = f^{-1}(x) \\ &\iff y = f(x) \\ &\underset{\text{Lemme 1}}{\iff} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f \\ &\iff S_\Delta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{C}_f \end{aligned}$$

Lemme 2

$\mathbb{R}^{\times}$

$f(x) \in A \iff x \in f^{(-1)}[A]$

$\iff \binom{y}{x} \in S_\Delta^{(-1)}[\mathcal{C}_f]$

c) dérivée

Théorème (!) : Soit $f : I \to J$ bijection dérivable

Soit $y \in J$. Alors :

1) $f^{-1} (: J \to I)$ est dérivable en y

$\iff f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

2) Dans ce cas, on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

D/ On admet (cf (!) loin) 1) $\Leftarrow$

Mq 1) $\Rightarrow$ et 2)

On suppose $f^{-1} : J \to I$ dérivable en y

Comme f est dérivable sur I, en particulier f est dérivable en $f^{-1}(y)$

Or $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable en } a \in I \\ g \text{ dérivable en } f(a) \in J \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ est dérivable en a et

$g \circ f'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$

Ici, on a $J \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{R}$ (modulo abus de notation)
$y \quad f^{-1} \quad f^{-1}(y) \quad f$

Donc : $f \circ f^{-1}$ est dérivable en y et

$$(f \circ f^{-1})'(y) = (f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y))$$

Or $f \circ f^{-1} = Id.$

Ie : $\forall t \in J, (f \circ f^{-1})(t) = t$

Donc $(f \circ f^{-1})'(y) = 1$

CCl $\quad 1 = (f^{-1})'(y) \cdot f'(f^{-1}(y))$

Donc $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

et en plus, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Application : exo

Déduire :

Déf : $\forall x > 0, \ \ln'(x) = \frac{1}{x}$

$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ bij

$\exp := \ln^{-1}$

On a $\forall x > 0, \frac{1}{x} \neq 0$. Donc exp est dérivable sur $\mathbb{R}$

et si $y \in \mathbb{R}$: $\exp'(y) = \dfrac{1}{(\exp^{-1})'(\exp(y))}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\exp(y)}} = \exp(y)$$

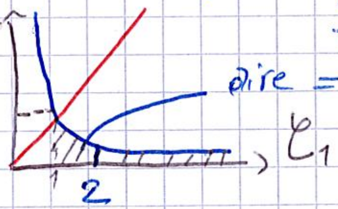
<u>CCl</u> : $\exp' = \exp$ ∎

Rq : Dire que $\ln(\cdot)$ est la primitive de $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t} \end{array}$

c'est exactement dire que

$$\forall x > 0 \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

dⁿ



5) Théorème de la bijection monotone

<u>Thm</u> : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, stct monotone

Alors :

1) l'ensemble $f[I]$ est un intervalle, qu'on note J

2) La ~~bijection~~ fonction f établit une bijection entre I et J

3) La bijection reciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue, strictement monotone, de même monotonie que f.

Idée : $f\ C^0 \Rightarrow f^{-1}\ C^0 \longrightarrow$ continue

Dans des espaces de dimension ≥ 2, ($f\ C^0 \Rightarrow f^{-1}\ C^0$) est faux en gal

D/ Ⓕ tard ∎

6) Dérivation des fonctions complexe

1) Idée : $\emptyset$ difficulté

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\ell(I) > 0$

a) def°

<u>Def</u> : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ On dit que

f est dérivable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$Re(f) : I \to \mathbb{R}$ et $Im(f) : I \to \mathbb{R}$ le sont.

On pose alors :

$$f' := (Re(f))' + i(Im(f))'$$

<u>Ex</u> : Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto 5t^2 + i\cos(t) \end{array}$$

On a f dérivable et

$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 10t - i\sin(t)$

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des f° de I dans $\mathbb{C}$

Rq ! Il est aisé de dériver dans $\mathbb{C}$, ie

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mais il est difficile et hors programme de dériver $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

" C'est facile de danser "

b) Exemple $f^{\underline{el}}$

Considerons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$$t \longmapsto e^{it}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Prop: } f \text{ est dérivable et } \forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = i e^{it} \\ \qquad \text{On écrit } \forall\, t \in \mathbb{R},\ \dfrac{d\, e^{it}}{dt} = i e^{it} \end{array}}$$

Rappel: (T) $\dfrac{d \exp(2t)}{dt} = 2e^{2t}$

$$\frac{d\, e^{-t}}{dt} = -e^{-t}$$

D/ On a $Re(f) = \cos(\cdot)$ et

$$Im(f) = \sin(\cdot)$$

qui sont dérivables

donc f est dérivable et

$$f' = -\cos' + i\sin' = \sin + i\cos$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ On a

$$i e^{it} = i(\cos(t) + i\sin(t)) = -\sin(t) + i\cos(t)$$

<u>CCL</u> : On a mq $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{d\, e^{it}}{dt} = i e^{it}$ ■

c) propriétés de la dérivation

On a les m̂ propriétés que la dérivation de f° réelles

<u>Prop</u> ⊕ :

1) $(f+g)' = f' + g'$

2) $(fg)' = f'g + fg'$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (si $\forall t \in I, g(t) \neq 0$)

4) $(\lambda f)' = \lambda f'$ si $\lambda \in \mathbb{C}$

5) Composition

$I \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ problème !

On considère $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

Alors $\left.\begin{array}{l} u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \\ f \in \mathcal{D}(J, \mathbb{C}) \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$

et $(f \circ u)' = (f' \circ u) \times u'$

D/ ⚓

4) soit $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$

On écrit $\lambda = a + ib$ et $f = g + ih$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $g, h \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

On a alors $\lambda f = (a+ib)(g+ih)$

$= ag - bh + i(bg + ah)$

or $ag \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $bh \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, donc

$ag - bh \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

et $(ag - bh)' = ag' - bh'$

De m̂, $bg + ah \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et

$(bg + ah)' = bg' + ah'$

<u>CCl</u> : $(ag - bh) + i(bg + ah) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$

i.e $\lambda f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $\lambda f' = ag' - bh' + i(bg' + ah')$

Or $(ag' - bh') + i(bg' + ah') = \lambda f'$

■

d) Dérivation avec $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

On imagine qu'on peut dériver $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Prop : 1) Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, alors

$\exp \circ (i\varphi)$ est dérivable

on a $\forall t \in I, \frac{d}{dt} e^{i\varphi(t)} = i\varphi'(t) e^{i\varphi(t)}$

Rq ⚠ : L'écriture $(e^{i\varphi(t)})' = i\varphi'(t) e^{i\varphi(t)}$

est interdite et est fausse

ie $(\exp \circ (i\varphi))' = i\varphi' \times \exp_{\mathbb{C}} \circ (i\varphi)$

2) Soit $\psi : I \to \mathbb{C}$ dérivable

Alors ~~$\forall t \in I$~~, $\exp_{\mathbb{C}} \circ \psi$ est dérivable et

$\forall t \in I, \frac{d e^{\psi(t)}}{dt} = \psi'(t) e^{\psi(t)}$

Rq : on est dans la situation

$$I \xrightarrow[\psi]{} \mathbb{C} \xrightarrow[\exp_{\mathbb{C}}]{} \mathbb{C}$$

D/ Déjà, 2) ⟹ 1)

Autre rq : Si on note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$;

on a alors $\exp_{\mathbb{C}} \circ (i\varphi) = f \circ \varphi$

On est dans le cas 5)

Mq 2) RAS

Idée : écrivons $\psi = \alpha + i\beta$ avec

~~$\alpha \in \mathbb{R}$~~ $\alpha, \beta \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

Soit $t \in I$

On a

$$(\exp_{\mathbb{C}} \circ \Psi)(t) = \underbrace{e^{\alpha(t)}}_{\in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})} \cdot e^{i\beta(t)} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$$

par thm de composition réelle

c'est $\exp \circ \alpha$

Donc par produit, on a : $\exp_{\mathbb{C}} \circ \Psi$ dérivable

et : $$(\exp \circ \Psi)'(t) = \frac{d e^{\alpha(t)}}{dt} \cdot e^{i\beta(t)} + e^{\alpha(t)} \frac{d e^{i\beta(t)}}{dt}$$

$$= \underbrace{\alpha'(t) e^{\alpha(t)} \cdot e^{i\beta t}} + \boxed{e^{\alpha(t)}}\, i\beta'(t) \boxed{e^{i\beta(t)}}$$

$$= \alpha'(t) (\exp \circ \Psi)(t) + i\beta'(t) (\exp \circ \Psi)(t)$$

$$= (\alpha'(t) + i\beta'(t)) \cdot (\exp_{\mathbb{C}} \circ \Psi)(t)$$

$$= \Psi'(t) \cdot (\exp_{\mathbb{C}} \circ \Psi)(t) \quad \blacksquare$$

D/ 1) Soit $t \in I$. On a

$$(\exp_{\mathbb{C}} \circ (i\varphi))(t) = e^{i \boxed{\varphi(t)}} \quad \in \mathbb{R}$$

$$= \cos(\varphi(t)) + i \sin(\varphi(t))$$

or $$\frac{d \cos(\varphi(t))}{dt} = -\varphi'(t) \sin(\varphi(t))$$

de même $$\frac{d \sin(\varphi(t))}{dt} = \varphi'(t) \cos(\varphi(t))$$

Donc : $\dfrac{d\, e^{i\varphi(t)}}{dt} = -\varphi'(t)\sin(\varphi(t)) + i\varphi'(t)\cos(\varphi(t))$

$$= \varphi'(t)\left(i\cos(\varphi(t)) - \sin(\varphi(t))\right)$$

$$= i\,\varphi'(t)\left(\cos(\varphi(t)) + i\sin(\varphi(t))\right)$$

$$= i\,\varphi'(t)\, e^{i\varphi(t)} \quad \blacksquare$$

Ex : (T) $\dfrac{d}{dt}\left(e^{it^2}\right) = i\,2t\, e^{it^2}$

II Convexité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\ell(I) > 0$

1) Paramétrisation des intervalles

Prop : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$

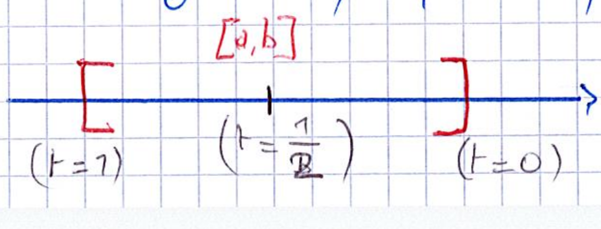
Alors $[a,b] = \{ ta + (1-t)b \; ; \; t \in [0,1] \}$

Rq cette proposition a une interprétation cinématique

Notons $x_t := ta + (1-t)b$ quand $t \in [0,1]$

On a $x_0 = b$, $x_1 = a$, $x_{\frac{1}{2}} = \dfrac{a+b}{2}$

d^n



Le point x_t se déplace à une vitesse constante $(a-b)$

On a donc $\forall t \in [0,1], \ x_t = x_0 - (b-a)t$

ie $x_t = b + (a-b)t$

D/ calcul : ok ■

D/ on procède par double-inclusion

17 notation Notos $E := \{ ta + (1-t)b \ ; \ t \in [0,1] \}$

Mq $E \subset [a,b]$

Soit $t \in [0,1]$, Mq $x_t \in [a,b]$

17 R^{x} prosopagnosique : on va mq $(a \leq x_t \leq b)$

Deux démos :

1) Cinématique

on a $0 \leq t \leq 1$ et $b-a \geqslant 0$

Donc $0 \leq t(b-a) \leq b-a$

Donc $0 \geqslant -t(b-a) \geqslant a-b$

Donc $b \geqslant b - t(b-a) \geqslant a$

ie $a \leq b - t(b-a) \leq b$

ie $a \leq x_t \leq b$

2°) Plus precisement, plus astucieusement

R° $\forall t \in [0,1],\ 1-t \in [0,1]$

(et $t \longmapsto 1-t$ est une endo-app° de $[0,1]$ qui est involutive)

On a $\quad a \leq a \leq b$

Donc $\quad ta \leq ta \leq tb$

et $\quad a \leq b \leq b$

Donc $\quad (1-t)a \leq (1-t)b \leq (1-t)b$

En sommant : $\quad \underbrace{ta + (1-t)a}_{=a} \leq ta + (1-t)b \leq \underbrace{tb + (1-t)b}_{=b}$

Donc $\quad a \leq x_t \leq b$ ■

Mq $[a,b] \subset E$

Soit $x \in [a,b]$

On cherche $t \in [0,1]$ tq $x = x_t$

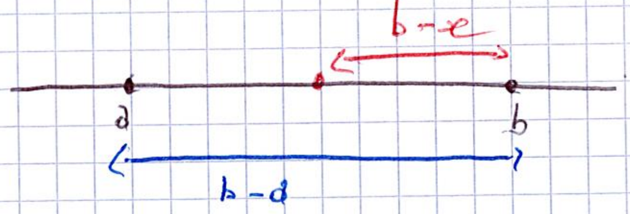
Idée : ORPAS

B° Soit $t \in [0,1]$ tq $x = b - (b-a)t$

Donc $\quad t = \dfrac{b-x}{b-a}$

Rq : t est le %age de distance par courue

d^n



Posons $t := \dfrac{b-x}{b-a}$

On a $x_t = b - t(b-a) = b - \dfrac{b-x}{b-a}(b-a)$
$= b - (b-x) = x$

Mq $t \in [0,1]$

Idée on transfère $\leq$s

$a \leq x \leq b \rightarrow 0 \leq t \leq 1$

On a $a \leq x \leq b$ donc $-a \geq -x \geq -b$

et donc $b-a \geq b-x \geq 0$. or $\frac{1}{b-a} > 0$

Donc $\dfrac{b-a}{b-a} \geq \dfrac{b-x}{b-a} \geq 0$ ie $0 \leq t \leq 1$

Donc $t \in [0,1]$

Ainsi, on a montré que

$\forall x \in [a,b], \exists t \in [0,1] : x = ta + (1-t)b$

Donc $[a,b] \subset \{ ta + (1-t)b \ ; \ t \in [0,1] \}$ ■

À maîtriser

2) Définition

Def : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que

f est convexe (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\forall a, b \in I, \ \forall t \in [0,1], \ f(ta + (1-t)b)$

$f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$

3) interpretation graphique

On veut comprendre le terme

" $t f(a) + (1-t) f(b)$ "

Fixons $a, b \in I$. Osq $a < b$

Notons $A := \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $B : \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$

Soit $t \in [0,1]$

On pose $M_t := tA + (1-t)B$

On a $M_t = \begin{pmatrix} ta + (1-t)b \\ tf(a) + (1-t)f(b) \end{pmatrix}$

Traitons un cas plus général

Considerons 2 points A, B du plan

qu'on écrit $A\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}$

Notons $M_t := tA + (1-t)B$

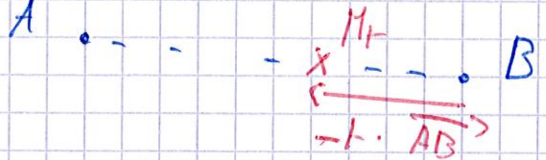
On a $M_t = \begin{pmatrix} ta + (1-t)b \\ t\alpha + (1-t)\beta \end{pmatrix}$

(1) écriture cinématique $= \begin{pmatrix} b - t(b-a) \\ \beta - t(\beta - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} b-a \\ \beta-\alpha \end{pmatrix}$

$= B - t\overrightarrow{AB}$

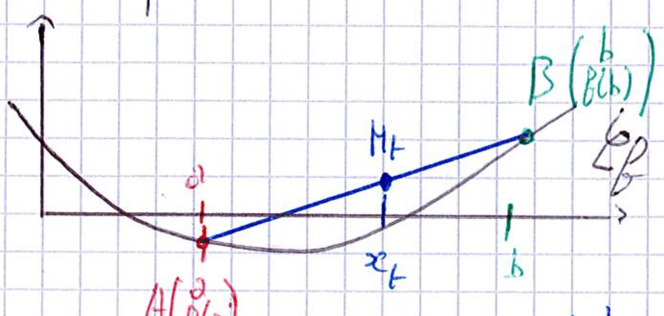
Ainsi, $\boxed{M_t = B - t\overrightarrow{AB}}$

Dessin :



Rq : $[A,B] = \{M_t \,;\, t \in [0,1]\}$

Revenons au cas particulier

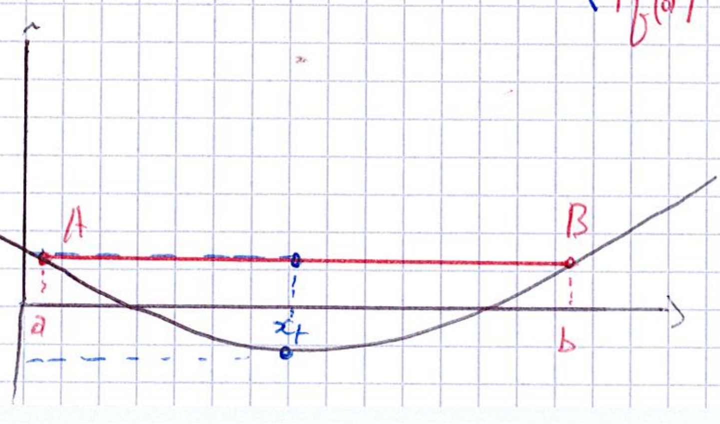


$M_t = \begin{pmatrix} ta + (1-t)b \\ tf(a) + (1-t)f(b) \end{pmatrix}$

Bilan :

$tf(a) + (1-t)f(b)$

$f(ta + (1-t)b) = f(x_t)$



CCL : Soit $a, b \in I$

Si $t \in [0,1]$, on a $\begin{cases} f(ta + (1-t)b) = Y_{P_t} \\ tf(a) + (1-t)f(b) = Y_{M_t} \end{cases}$

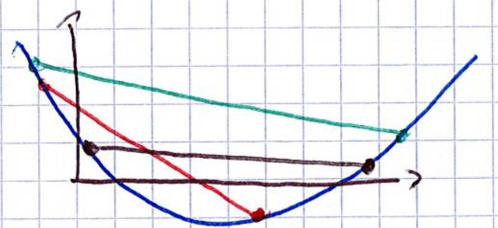
Donc $\forall t \in [0,1]$, $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$

$\Leftrightarrow \forall t \in [0,1]$, $Y_{P_t} \leq Y_{M_t}$

$\Leftrightarrow \forall t \in [0,1]$ "P_t en dessous de M_t"

CCL : f est convexe ssi

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes se cordes



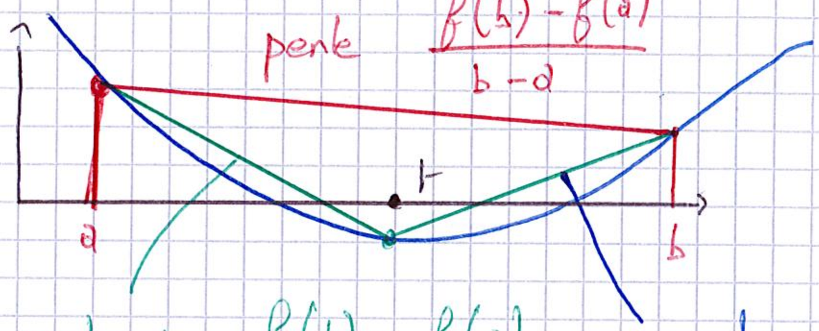
4) Lemme des pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe

Soient $a, b \in I$ tq $a < b$

a) dessin du lemme

On a



b) Le lemme

Prop : On a : $\forall x \in]a, b[$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

D/ (1) Idée : homogeneiser le lemme et la definition de f convexe

Soit $x \in]a, b[$

(1) Fixons $t \in [0,1]$ tq $x = ta + (1-t)b$

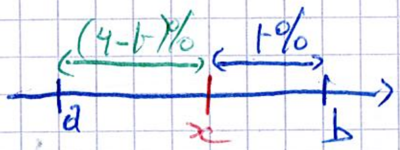
Comme $x \neq a$, on a $t \neq 1$ et ĉ $x \neq b$, on a $t \neq 0$

Donc $t \in]0, 1[$

$$\frac{f(t)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On a $x - a =$

d^n



$$ta + (1-t)b - a = a(t-1) + (1-t)b$$

$$= (1-t)(b-a)$$

Donc $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\iff \frac{b-a}{(1-t)(b-a)}\big(f(x)-f(a)\big) \leq \big(f(b)-f(a)\big)$$

$$\iff \big(f(x)-f(a)\big) \leq (1-t)\big(f(b)-f(a)\big)$$

$$\iff f(x) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$$

$$\iff f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$$

Cette dernière inegalité est vraie car f est convexe

Donc on a $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

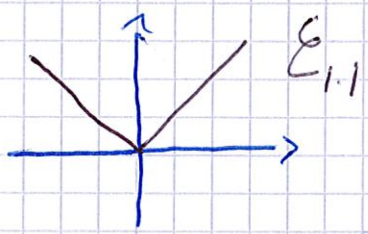
AF ++ montrer de même $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$ ■

5) Cas dérivable et cas $\mathcal{C}^2$

a) cas dérivable

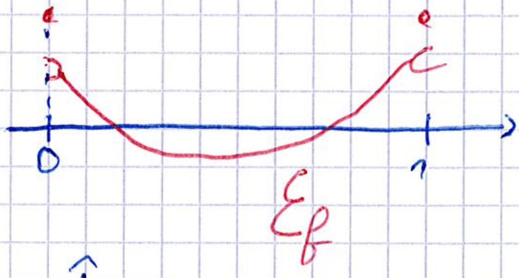
Rq : f convexe $\not\Rightarrow$ f dérivable

Contre-ex : $|\cdot|$

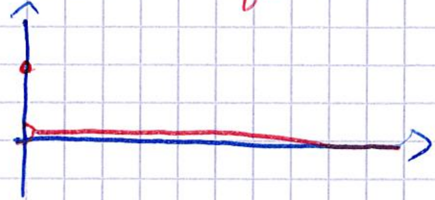


Rq : f convexe $\not\Rightarrow$ f continue en g^{al}

Ctrex :



ou $\mathbb{1}_{\{0\}}\big|_{\mathbb{R}_+}$



es convexe

Rq : les f° constantes sont convexe

exo  Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

Mq $\forall a \in]0,1[$, f continue en a

Rq : On dit que f concave $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\forall a, b \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$

On a f concave $\Longleftrightarrow$ $-f$ convexe

Prop : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable
Alors :
f convexe $\Longleftrightarrow$ f' croissante

D/ • ($\Longrightarrow$)

Osq f convexe,

Mq f' croit
Ie Mq $\forall a, b \in I$, $a \leq b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$

On utilise le lemme des pentes
$\forall x \in]a, b[$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

Or, $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \xrightarrow[x \to b^-]{} f'(b)$

ou $x \xrightarrow{<} b$ x tend vers b par valeurs inférieures

En passant à la limite par (*),

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in I,\ g(x) \geq A \\ g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l \end{array}\right\} \Rightarrow l \geq A$$

On obtient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$

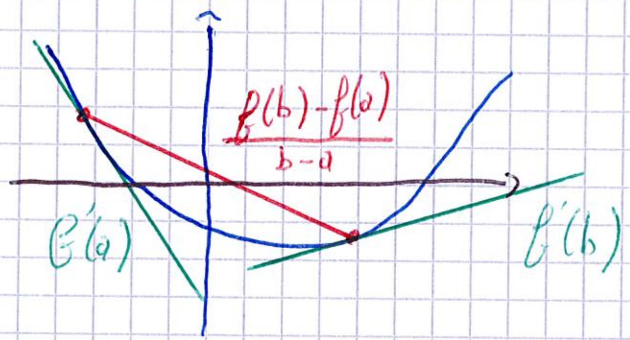
• De m̂ $$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>ccl</u> $$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$$

donc $f'(a) \leq f'(b)$

donc f' croissante

d^n



$\Leftarrow$ On suppose f' croissante

Mq f' convexe

(ie Mq $\forall a,b \in I$, $\forall t \in [0,1]$ $f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + 1-t f(b)$

$\boxed{!}$ <u>idée naturelle</u>, (qui ne marchera pas)

Soient $a,b \in I$

Je considère $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta+(1-t)b)$

But : Mq $\varphi \geq 0$

On a φ dérivable Soit $t \in [0,1]$

On a $\varphi'(t) = f(a) - f(b) + (b-a)f'(ta+(1-t)b)$

(B) Idée J'ai envie de faire apparaître $f'(\cdot)$ deux fois la dérivée de ma fonction auxiliaire

Soit $t \in [0,1]$, Soit $b \in I$

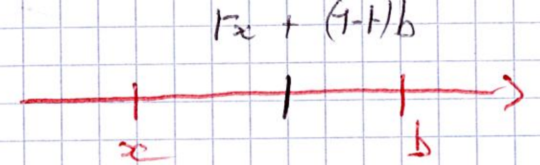
On considère

$$\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longmapsto t f(a) + (1-t) f(b) - f(at + (1-t) b)$$

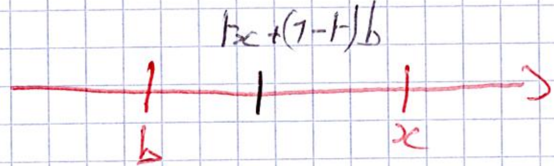
On a $\psi'(a) = t f'(a) - t f'(at + (1-t) b)$

$$\psi'(x) = t\left(f'(x) - f'(tx + (1-t) b\right)$$

1er cas



2e cas



On a $x \leq b \Rightarrow tx + (1-t) b \leq b$

$x \geq b \Longrightarrow tx + (1-t) b \geq b$

D/ Osq $x \leq b$

On a $(x \leq x \leq b)\, t \qquad t \geq 0$

$(x \leq b \leq b) \times (1-t) \qquad (1-t) \geq 0$

Donc $tx + (1-t) x \leq tx + (1-t) b \leq tb + (1-t) b$

Ie $x \leq tx + (1-t) b \leq b$

De m̂ pour l'autre ■

Ainsi si $x \leq b$, on a $f'(tx + (1-t)b) \leq f'(b)$

on a $f'(x) \leq f'(tx + (1-t)b)$

puisque f' croit,

donc $\psi'(x) \leq 0$

De m, si $x \geq b$, on a $x \geq tx + (1-t)b$

on a $\psi'(x) \geq 0$, on a $\psi'(b) = 0$

D'où :

x		b	
$\psi'(x)$	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\nearrow$

(où les signes et variations sont entendus au sens large.)

Or $\psi(b) = t f(b) + (1-t) f(b) - f(tb + (1-t)b)$

$= 0$

Ainsi on a $\psi \geq 0$

Et donc $\forall t \in [0,1]$, $\forall b \in I$, $\forall a \in I$,

$f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$ $\blacksquare$

b) Cas $\mathcal{D}^2$

Corollaire : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

Alors f convexe $\iff f'' \geq 0$

D/ ok car $f' \nearrow \iff (f')' \geq 0$ ■

Rq : On a démontré au a) qqchose de + général

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ convexe} \\ a < b \\ f \text{ dérivable en } a \text{ et en } b \end{array}\right\} \implies f'(a) \leq f'(b)$$

mieux $f'(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$

6) Une fonction convexe est au dessus de ses tangentes

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convex

Soit $x_0 \in I$ tq f est dérivable en x_0

Alors on a

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

d^n

$y = f'(x_0)$

D/ • Soit $x \in I$

• On distingue 2 cas

1er cas : osq $x > x_0$ On a alors

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0)$$

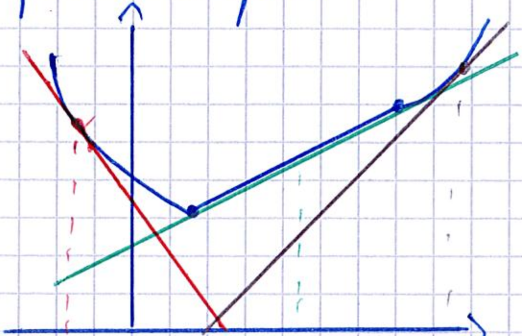
Or on a : $\left.\begin{array}{l} a < b \\ f \text{ dérivable en } a \end{array}\right\} \Rightarrow f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Donc en prenant "$b = x$" et "$a = x_0$", on obtient l'inégalité voulue

De m̂ si $x < x_0$ ∎

Rq : si f deux fois dérivable, on a une preuve plus simple.

d^n



7) Inégalité de Jensen

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe

Soit $n \geq 2$

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ Alors

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 = 1 \implies$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

(+) moche :

On a $\forall f : I \to \mathbb{R}, \Big(\forall a, b \in I, \forall t \in [0,1]$

$$f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b) \Big)$$

$$\implies \Big(\forall n \geq 1, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \implies$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \Big)$$

D/ rec

On pose, pour $n \geq 2$:

$P(n)$: $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right) \implies \left(f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \right)$$

- Déjà, $P(2)$ est vraie

En effet, soient $x_1, x_2 \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ tq $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

On a $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$

On a $f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2)$

Donc $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

Mq $\forall n \geq 2, \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \geq 2$ tq $P(n)$

Mq $P(n+1)$ R^x c'est une $\forall$-assertion

Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$

Soient $\lambda_1, \dots \lambda_{n+1} \in [0,1]$ tq $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

Mq $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$

On distingue 2 cas

- 1

1er cas : On suppose que $\lambda_1 = 0$

On a alors $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i x_i$

de plus on a $\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i = 1$

Donc je peux appliquer $P(n)$ à $(x_2, \dots, x_{n+1})$

et $(\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$

On a $f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$

$\lambda_1 x_1$ $\qquad$ $\lambda_1 f(x_1)$ car $\lambda_1 = 0$

D'où $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$ $\blacksquare$ 1er cas

- 2^e cas, on suppose que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_1 < 1$

B OFAA l'expression $ta + (1-t)b$

On a $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_1 = \lambda_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i x_i$

$$= \lambda_1 a_1 + (1-\lambda_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} x_i$$

Ĉ f est convexe, on a donc :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i\right)$$

Bonne surprise

On a $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} = \frac{1}{1-\lambda_1}\left(\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i\right)$

$$= \frac{1}{1-\lambda_1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i - \lambda_1\right) = \frac{1}{1-\lambda}(1-\lambda_1) = 1$$

OFAA

On applique alors $P(n)$ à

$x_2, \dots, x_{n+1}$ et $\displaystyle\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_{n+1}}{1-\lambda_1}$

On a $\displaystyle f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i\right) \leq \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} f(x_i)$

D'où $\displaystyle f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) \times$

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} f(x_i)$$

3^e cas Osq $\lambda_1 = 1$

Ĉ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et Ĉ $\forall i \ \lambda_i [0,1]$

on a $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$

donc $\displaystyle f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$

exo Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et convexe

mq f est cste

8) inégalités ~~d~~ classiques

a) avec $\ln(\cdot)$

<u>Fait</u> : $\ln(\cdot)$ est concave

<u>D/</u> Déjà, on a $\ln(\cdot)$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et

$$\forall x > 0, \quad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$$

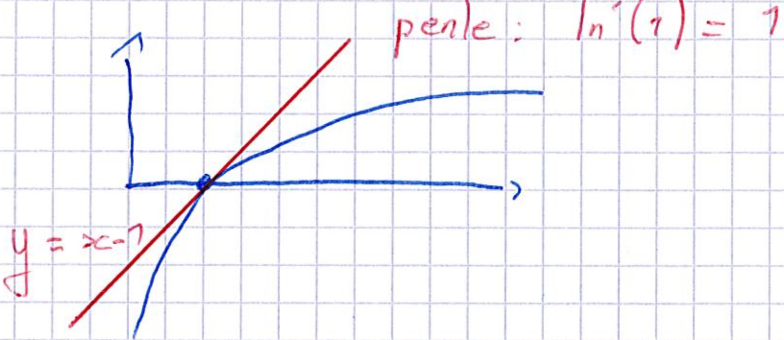
Donc $\ln(\cdot)$ concave

$\blacksquare$

<u>Prop</u> : On a

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$$

dⁿ



<u>D/</u> : On a $\forall t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$ par concavité

Soit $x > -1$, On pose $t := x+1$. On a $t > 0$

Donc $\ln t \leq t - 1$ i.e $\ln(1+x) \leq x$

<u>Rq</u> : On a mieux :

$$\forall x > -1, \quad x \neq 0 \Rightarrow \ln(1+x) < x$$

- $\forall x \in]-1;0[$, $\ln(1+x) < x$
- $\forall x > 0$, $\ln(1+x) < x$

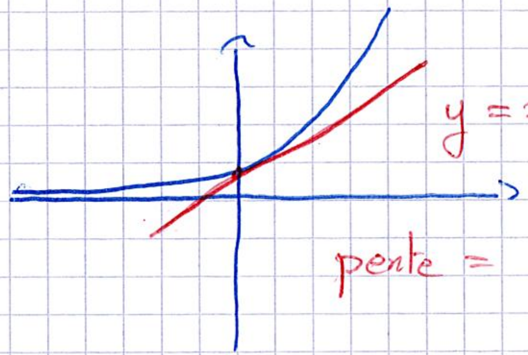
b) avec $\exp(\cdot)$

Fait : exp est convexe

D/ on a $\exp'' = \exp \geq 0$ ■

Prop : On a $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1+x$

dⁿ



Rq : On a mieux : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exp(x) > 1+x$

mieux encore : $\forall x \geq 0, \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$

mieux^{++} : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \exp(x) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

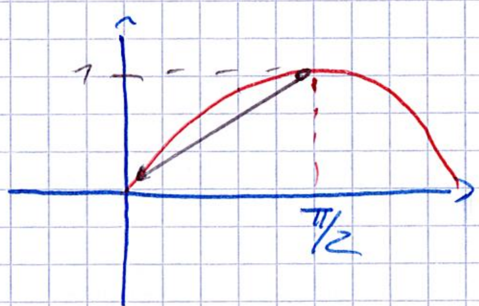
cf 12.23

c) avec $\sin(\cdot)$

On a $\sin(\cdot)$ concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car $\sin'' = -\sin$

et car $\sin \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

dⁿ



pente $\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$

$= \frac{1-0}{\frac{\pi}{2} - 0}$

$= \frac{2}{\pi}$

$$\boxed{\text{Prop}^{(T)} : \quad \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad \sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x}$$

III Fonctions usuelles

1) Symbole x^a

(Rq "$a = \frac{1}{2} \longrightarrow x \geq 0$
$a = -1 \longrightarrow x \neq 0$ "

Notation

Soit $x > 0$

Soit $a \in \mathbb{R}$

On note $x^a := e^{a \ln(x)}$

Prop (T) : Tout ce qu'on veut est vrai, ie

1) $x^a x^b = x^{a+b}$
2) $x^a > 0$
3) $(x^a)^b = x^{ab}$
4) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
5) Si $n \in \mathbb{N}$, on a $x^n = x \times x \times x \dots \times x$
6) $x^{-1} = \frac{1}{x}$
7) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
8) $x^0 = 1$
9) $(xy)^a = x^a y^a$

D/ 9) On a

$$(xy)^a = e^{a \ln xy}$$
$$= e^{a \ln x + a \ln y}$$
$$= e^{a \ln x} e^{a \ln y}$$
$$= x^a y^a$$

Lemme $\exp(\alpha + \beta) = \exp(\alpha) \cdot \exp(\beta)$

1) On calcule

$$x^{a+b} = e^{(a+b)\ln x} = e^{a\ln x + b\ln x}$$

$$= e^{a\ln x} e^{b\ln x} = x^a x^b$$

■

Lemme (T) $\exp(\alpha+\beta) = \exp(\alpha)\cdot\exp(\beta)$

D/ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ Posons

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \exp(\alpha+x) - \exp(\alpha)\exp(x)$$

On a φ dérivable
Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $\varphi'(x) = 1\cdot\exp(\alpha+x) - \exp(\alpha)\exp'(x)$

$$= \exp(\alpha+x) - \exp(\alpha)\exp(x)$$

$$= \varphi(x)$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ En effet,

č $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

on a gratuitement $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

On definit $\psi\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{\varphi(x)}{e^x}$$

Rq : Π^d Δ multiplicative

On a ψ dérivable

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)e^x - \varphi(x)\exp'(x)}{(e^x)^2} = 0$$

CCL : ψ est constante

or $\psi(0) = \frac{\varphi(0)}{e^0} = \varphi(0) = \exp(\alpha + 0) - \exp(\alpha)\exp(0)$

$= 0$

CCL $\psi = \tilde{0}$ Donc $\varphi = \tilde{0}$

ie, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(\alpha + x) = \exp(\alpha)\exp(x)$

■

2) Fonctions puissance

a) def°

Def° : Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction "puissance a" notée P_a est $P_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^a$

b) étude de P_a

Prop : Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

1) P_a est dérivable

2) $P_a' = a P_{a-1}$

3) $P_a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

D/ 1) On a $\forall x > 0$, $P_a(x) = x^a = e^{a\ln(x)}$

Donc P_a est une composée de f° dérivables

2) Soit $x > 0$, On a

$P_a' = \exp'(a\ln(x)) \cdot \frac{d}{dx} a\ln x$

$= \exp(a \ln x) \cdot \frac{a}{x} = x^{a} \frac{a}{x} = a x^{a} x^{-1}$

$= a x^{a-1}$

$= a P_{a-1}(x)$

CCL : $P_a' = a P_{a-1}$

3) rec On note pour $n \in \mathbb{N}$; $P(n)$: "$\forall a \in \mathbb{R}, P_a \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$"

Deja, $P(0)$ est vrai car P_a derivable quelquesoit a

Hérédité

Mq $\forall n \geq 0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \geq 0$ tq $P(n)$

Mq $P(n+1)$ Soit $a \in \mathbb{R}$

Deja P_a dérivable

On a $P_a' = a P_{a-1}$

Or d'après $P(n)$:

$\forall b \in \mathbb{R}, P_b \in \mathcal{C}^n(\dots)$

Donc : $P_a' \in \mathcal{C}^n(\dots)$ ie $P_a \in \mathcal{C}^{n+1}(\dots)$

$\blacksquare$ rec

Donc on a $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $P_a \in \mathcal{C}^n(\dots)$

ie $P_a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\dots)$

Soit $a \in \mathbb{R}$

Donc $P_a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

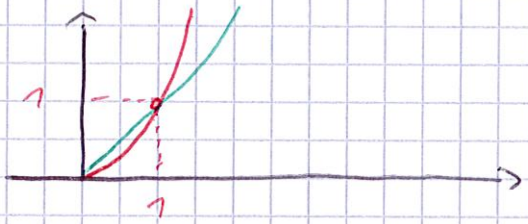
Rq ⚠ AC : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

ie $p_a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

■

c) Comparaison des p_a

Prop : Soit $b > a > 1$ On a



<u>Rq</u> : Dans ce dessin, on a

1) On a : $\forall x \in]0,1]$, $x^b \leq x^a$

ie $b > a \Rightarrow \forall x \in]0,1]$ $x^b \leq x^a$

2) On a $\forall x \in [1, +\infty[$ $x^b \geq x^a$

3) $a > 1 \Rightarrow p_a$ convexe

4) $a > 1 \Rightarrow p_a$ strictement croissante

ie (+) $x > y \Rightarrow x^a > y^a$

5) $a > 1 \Rightarrow x^a \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

D/ 3) Osq $a > 1$, $p_a'' = (p_a')' = (a p_{a-1})' = \overbrace{a}^{>0}\overbrace{(a-1)}^{>0}\underbrace{p_{a-2}}_{>0}$

donc $p_a'' \geq 0$

4) Soit $x \in]0,1[$ (!) $x^a = e^{a \ln x}$

On a $\ln x < 0$ et $a < b$

Donc $a \ln x > b \ln x$

Or $\exp(\cdot) \nearrow$

Donc $e^{a \ln x} > e^{b \ln x}$ ie $x^a > x^b$

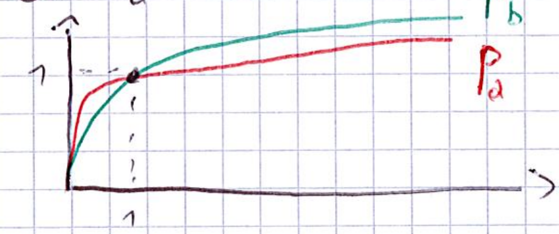
2) Do $\hat{m}$

Etc (AF) ■

Prop : Cas $0 < a < b < 1$

ex typique $a = \frac{1}{2}$ ie $\sqrt{\cdot}$

On a



ie :

1) $x \in]0,1[\Rightarrow x^a > x^b$

2) $x > 1 \Rightarrow x^b > x^a$

3) si $a \in]0,1[$ $x<y \Rightarrow x^a < y^a$

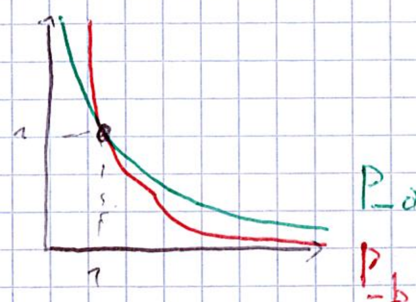
ie $P_a \nearrow$

4) concavité

5) limites

D/ ok

Prop : Soient $b > a > 0$ On a



ie : 1) $a>0 \Rightarrow P_{-a}$ convexe

2) Soient $b>a>0$ Alors

- $\forall x \in]0,1[$, $\frac{1}{x^b} > \frac{1}{x^a}$
- $\forall x \in]1,+\infty[$ $\frac{1}{x^a} > \frac{1}{x^b}$

3) $a>0 \Rightarrow P_{-a} \Downarrow$, ie$^{\text{T}}$ $x<y \Rightarrow \frac{1}{x^a} > \frac{1}{y^a}$

D/ ok ■

3) exponentielle de base a

a) Def$^{\circ}$

Def$^{\circ}$: Soit $a>0$ L'exponentielle de base a notée φ_a est définie par :

$$\varphi_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a^x$$

⚠ cf la difference entre x^2 et e^x

monde des P_a monde des φ_a

b) dérivée

Prop: Soit $a>0$ Alors

1) φ_a derivable

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_a'(x) = \ln(a)\,\varphi_a(x)$

Ie $\varphi_a' = \ln(a)\,\varphi_a$

3) Ainsi : $\varphi_a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

D/ 1) et 2) A

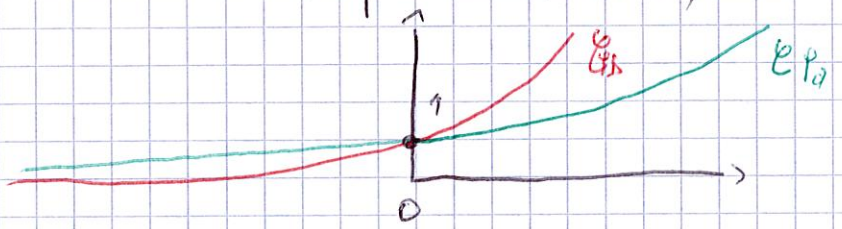
3) exo

Corollaire : $\frac{dx^a}{dx} = a x^{a-1}$ mais

$\frac{d \, a^x}{dx} = \ln(a) \cdot a^x$

c) Étude de $x \longmapsto a^x$

Prop Soient $b > a > 1$ On a



Rq On a $a^0 = b^0 = 1$

Ainsi : 1) $a > 1 \implies \varphi_a \nearrow$

ie $a > 1 \implies \forall x, y \in \mathbb{R}, \; x < y \implies a^x < a^y$

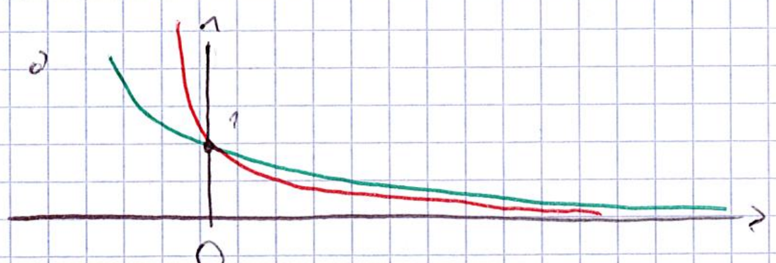
2) etc

Prop Soient $a, b \in]0,1[$ $\mathbb{R}^*$ On écrit $a = \frac{1}{\alpha}$ et $b = \frac{1}{\beta}$

avec $\alpha, \beta > 1$

Osq $\beta > \alpha$

On a



$\mathcal{C}\varphi_{\frac{1}{\alpha}}$ " $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ "

D/ OK

4) Croissance comparées !!

a) Comparaison en $+\infty$

<u>Déf$^{\circ}$</u> : Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de $+\infty$ et on note

$$\underset{x \to +\infty}{f(x) = o(g(x))}$$

« $f(x)$ est un petit "o" de $g(x)$ en $+\infty$ »

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

On dit alors aussi que g est prépondérante devant f en $+\infty$

<u>Exemples !</u>

- $\ln(x) = o(x)$ qd $x \longrightarrow +\infty$
- En $+\infty$, on a : $x = o(e^x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^n = o(e^x)$
- $x^2 = o(x^3)$
- $\sqrt{x} = o(x^2)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $b > a \Rightarrow x^a = o(x^b)$

On n'utilise pas trop la fonction nulle dans ce cadre

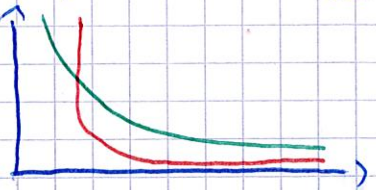
- $\sin(x) = o(x)$ quand $x \longrightarrow +\infty$

D/ ie !! R^ Mq $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

si $x>0$, on a
$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad |\sin x| \leq 1$$

Donc, par controle, on a $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Considerons $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ On a



$\mathcal{E}_{\frac{1}{x}}$ $\mathcal{C}_{\frac{1}{x^2}}$

A-t-on $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ qd $x \longrightarrow +\infty$

Astuce (secrète) $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\text{ie } \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \longrightarrow 0$$

Or, si $x>0$, on a $\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Donc $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ qd $x \longrightarrow +\infty$

Exo entre $\frac{x^2}{e^x}$ et $\frac{\ln x}{x^3}$ qui gagne en $+\infty$

On trouve $\frac{x^2}{e^x} = o\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)$ qd $x \longrightarrow +\infty$

Prop ① $\frac{1}{f(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{g(x)}\right) \Longleftrightarrow g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x))$

D/ On a $\frac{1}{f(x)} = o\left(\frac{1}{g(x)}\right) \Longleftrightarrow \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \Longleftrightarrow g(x) \underset{+\infty}{=} o((f(x)))$$

■

c) Comparaison en 0

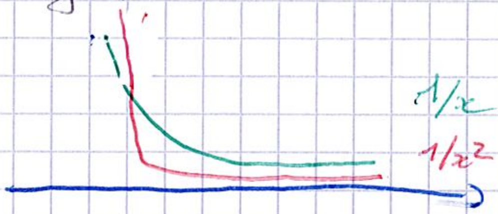
Def : Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de 0 (au $\mathcal{V}(0)$)

et on note $f(x) \underset{x \to 0}{=} o(g(x))$ $\triangle$ ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

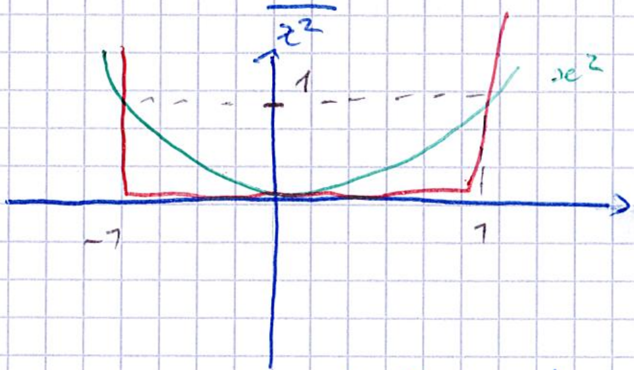
d^n



On a $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ q^d $x \to 0$

D/ On a si $x \neq 0$ $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^2}{x} = x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ ■

d^n



On a $x^{2000} = o(x^2)$ q^d $x \to 0$

D/ $\dfrac{x^{1000}}{x^2} = x^{998} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ ■

Au voisinage de 0, on a : $x^2 = o(x)$

$x^3 = o(x^2)$

$x^4 = o(x^3)$

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ b > a \Rightarrow x^b = o(x^a)$

IV Fonctions Trigonométriques réciproques

1) La fonction arcsin(·)

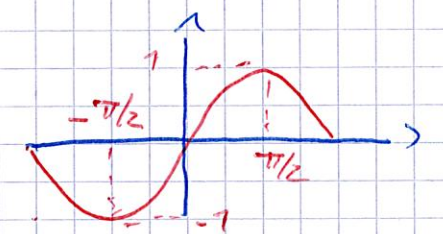
a) déf° et relation fondamentale

On sait que f bij $\Rightarrow f^{-1}$ existe

On veut le faire avec $\sin(\cdot)$, or $\sin(\cdot)$ n'est pas bijective.

On considère $\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$

d^n



Elle est bijective. (D/ cf ⊕ haut, C^0, ↗)

Déf : La fonctions arcsin est la bijection réciproque de $\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$

Déjà, c $\sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$

On a $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Prop (RF de arcsin) : On a

1) $\arcsin \circ \sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]} = Id_{[-\pi/2,\pi/2]}$

ie $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin\theta) = \theta$

⚠ seulement sur cet intervalle

2) $\sin|_{[-\pi/2;\frac{\pi}{2}]} \circ \arcsin = Id_{[-1,1]}$

I e $\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x}$

toujours vraie

D/ ok ∎

b) Etude de arcsin (.)

• Valeurs remarquables

On a θ 0 $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$

$\sin\theta$ 0 $1/2$ $\sqrt{2}/2$ $\sqrt{3}/2$ 1

D'où x 0 $1/2$ $\sqrt{2}/2$ $\sqrt{3}/2$ 1

arcsin 0 $\pi/6$ $\pi/4$ $\pi/3$ $\pi/2$

D/ Calculons $\arcsin(\frac{1}{2})$ On a $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

Astuce

Donc $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ or $\pi/6 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Donc RF_1 s'applique Donc $\arcsin(\sin\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{6}$

CCL $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Etc ∎

Prop : $\arcsin(.) : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

est strict^{nt} croissante

D/ On a vu $(f \nearrow$ et f bij$) \Rightarrow f^{-1} \nearrow$

or $\sin(\cdot)\Big|_{[-\pi/2,\, \pi/2]}$ $\nearrow\nearrow$ CCL : arcsin $\nearrow\nearrow$

Prop : La f° arcsin(·) est impaire

D/ Soit $x \in [-1, 1]$

Mq $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

Δ - Astuce - R* Notons $\theta := \arcsin(x)$

On a $\theta \in [-\pi/2, \frac{\pi}{2}]$

On a $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ $(*)$

De plus on a $-\theta \in [-\pi/2 ; \frac{\pi}{2}]$

Or je sais que $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin t) = t$

RF $(**)$

Appliquons à $(*)$ la f° arcsin(·), on obtient que $\underbrace{\arcsin(\sin(-\theta))}_{= -\theta} = \arcsin(-\sin\theta)$

CCl $(**)$ $\nearrow$ $-\theta = \arcsin(-\sin\theta)$

On a $\sin\theta = \sin(\arcsin(x)) = x$ RF 2

CCL : $-\theta = \arcsin(-x)$

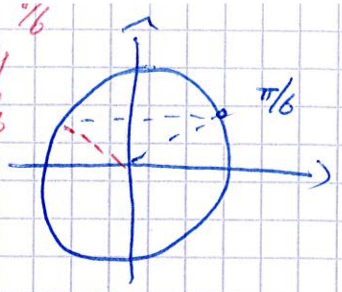
Or $\theta = \arcsin(x)$

D'où $-\arcsin(x) = \arcsin(-x)$ ■

Prop : arcsin(·) est C^0

D/ I ⑤, conséquence de $\sin(\cdot)$ est C^0 ■

c) Exemples de calculs



- On a $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)$

On a $\arcsin(5\pi/6) =$
$\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = \pi/6$

$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$

CCL : $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}$

CCL : $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \pi/6$

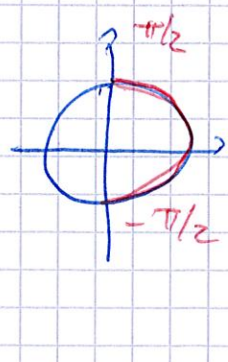
Fait !! : Soit $x \in [-1, 1]$. Alors on a
$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

D/ Idée on se ramène à $\sin(\cdot)$

On a $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x))$
$= 1 - x^2$ RF2

Signe ?

Or, $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \frac{\pi}{2}]$



et $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\theta) \geq 0$

Donc $\sqrt{\cos^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$

or (T) $\sqrt{a^2} = |a|$

Donc $|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1 - x^2}$

Comme $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$, on a

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

d) dérivée de arcsin(.)

Prop : 1) arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$

2) $\forall x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

D/ On utilise (I) 4) c)

1) On a vu que f^{-1} est dérivable en $y \Leftrightarrow f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

or, ici, $\sin' = \cos$

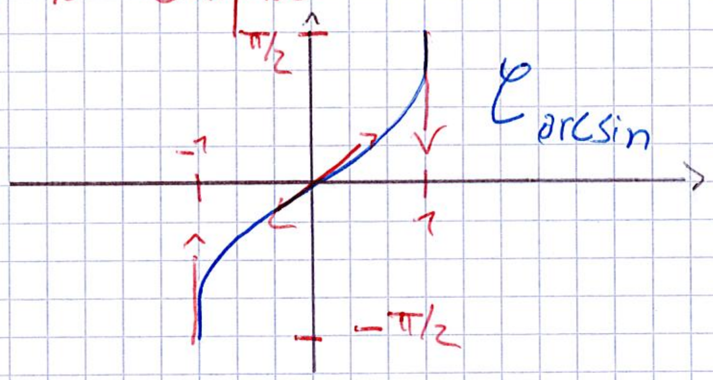
Donc arcsin est dérivable en x $\Leftrightarrow \cos(\arcsin(x)) \neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

2) On a alors $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Ici, on a $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

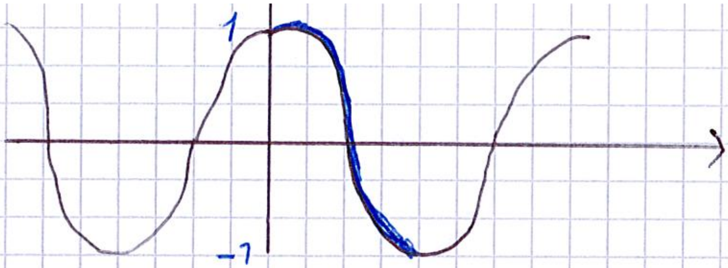
e) le Graphe :



2) La fonction arccos(.)

a) déf° et RF

On dessine



On a $\cos(\cdot)$ réalise une bij continue et ↘↘ entre $[0,\pi]$ et $[-1,1]$

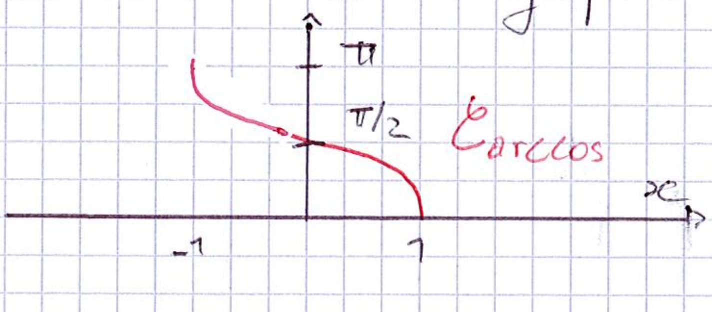
<u>Def^o</u> : La fonction arccos est la réciproque de

$$\cos\big|_{[0,\pi]} : [0;\pi] \longrightarrow [-1,1]$$

Ie on pose $\arccos := \left(\cos\big|_{[0;\pi]}\right)^{-1}$

quelques faits gratuits :

- $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$
- elle est C^0 d'après le thm de la bij rcpq
- elle est ↘↘
- On connait son graphe



On a

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

Idée : $\begin{cases} \cos(\theta) = x \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases} \iff \theta = \arccos(x)$

<u>Prop</u> :

1) $\forall \theta \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos \theta) = \theta$

2) $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$

<u>D/</u> ok car $\arccos \circ \cos|_{[0,\pi]} = Id_{[0,\pi]}$

$\cos|_{[0,\pi]} \circ \arccos = Id_{[-1,1]}$ ■

b) graphe

cf - ci dessous

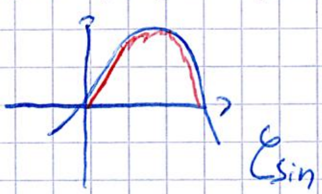
c) dérivée

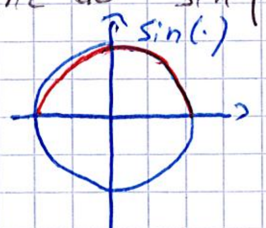
<u>Fait</u> (T) : $\sin(\arccos(x)) = x$

<u>D/</u> on a $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x))$

$= 1 - x^2$ RF 2)

- Donc $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ ou $-\sqrt{1-x^2}$
- Déterminons donc le signe de $\sin(\arccos(x))$

Or 

ou 

- C $\arccos(x) \in [0, \pi]$ par déf°, on a $\sin(\arccos(x)) \geq 0$

- <u>CCl</u> : $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ ■

Prop :

1) la f° arccos(.) est dérivable sur $]-1,1[$

2) On a : $\forall x \in]-1,1[, \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

D/ AF ■

d) une relation

Prop : $\arccos + \arcsin \overset{\sim}{=} \frac{\pi}{2}$

D/[1] Notons $f := \arccos + \arcsin$

la f° f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

Donc f est constante sur $]-1,1[$

Or, $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \pi/2 + 0 = \pi/2$

Puis, : ① on vérifie que $f(1) = f(-1) = \frac{\pi}{2}$

ou bien ② ĉ f est C^0 sur $[-1,1]$, elle est c^{te} sur $[-1,1]$

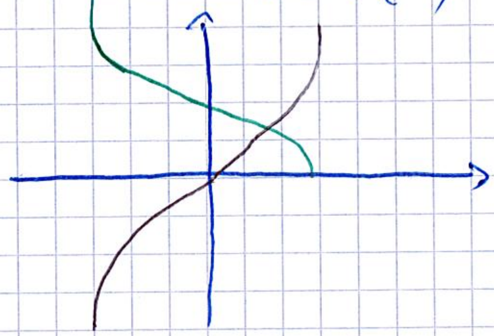
D²/ idée : cela fait penser à $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \end{cases}$

AF : Jeu de not° pour transformer (*) en relation sur les rcpq

- Soit $x \in [-1, 1]$
- On note $\theta := \arcsin(x)$
- On a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
- Ie $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$ d'après RF_2
- Donc $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$ $\arccos(x)$
- Or $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ donc $-\frac{\pi}{2} \leq -\theta \leq \frac{\pi}{2}$
  et $0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$ ie $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0, \pi]$
- D'après RF_1), $\arccos(\cdot)$: on a $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \theta$
- D'où : $\frac{\pi}{2} - \theta = \arccos(x)$ AC ■

C'est $\arcsin(x)$

Rq : D'où



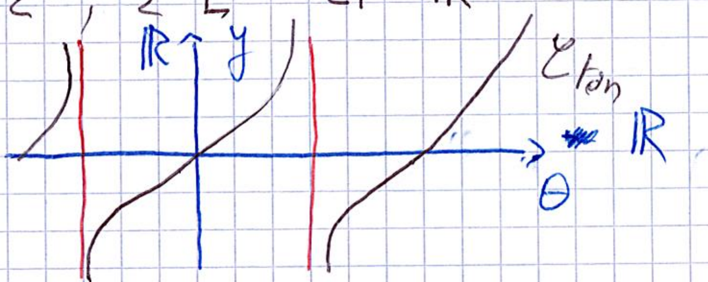
3) Pa f° arctan

a) déf° et RF

On sait déjà que tan réalise une bijection entre

$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathbb{R}$

d^n



Def° : on pose $\arctan := \left(\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}$

qq faits "gratuits" : AF

(entre autres $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$,
$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Prop ⓣ :

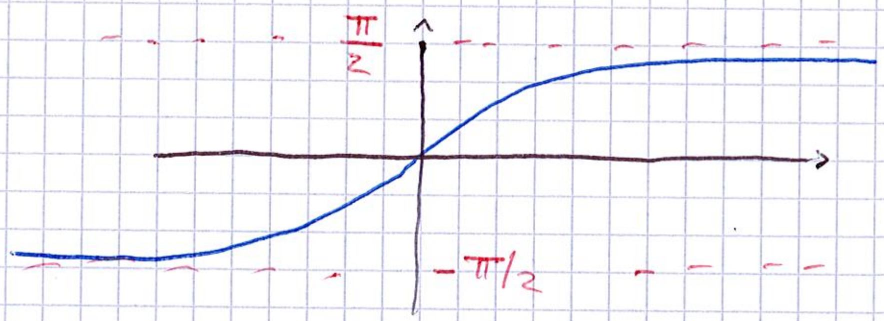
1) $\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan\theta) = \theta$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$

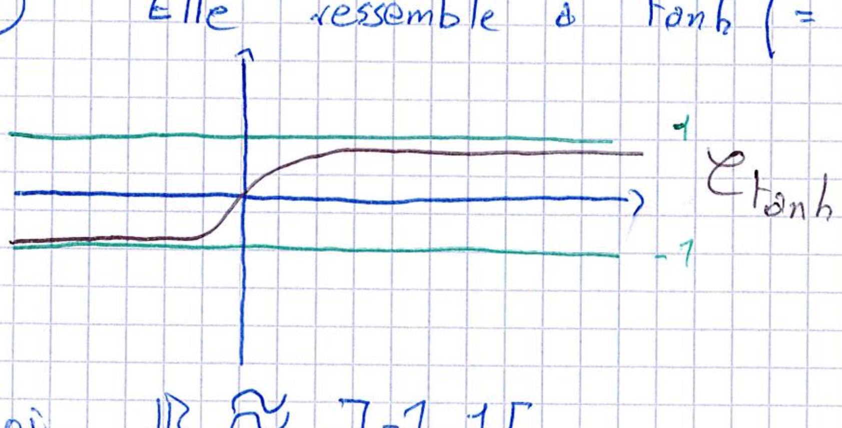
Rq : On a $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

D/ ok ∎

b) Graphe



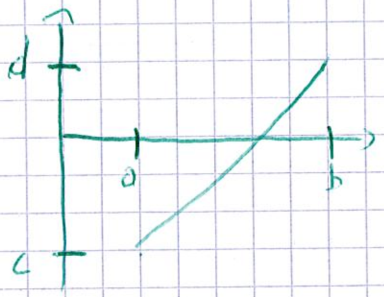
Rq ☹ Elle ressemble à $\tanh$ $\left(= \frac{\sinh}{\cosh}\right)$



D'où $\mathbb{R} \approx]-1, 1[$

Rq : $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$

f établit une bij entre $[a,b]$ et $[c,d]$



c) dérivée

Thm : 1) La f^o arctan $(\cdot)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

D/ Déjà, $\hat{c}$ $\tan(\cdot)$ est dérivable et $\hat{c}$ $\forall \theta$, $\tan'(\theta) \neq 0$

(Car, $\mathbb{R}^\times$, $\forall \theta$, $\tan'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) \geq 1$)

On a $\arctan(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

De ⊕, si $x \in \mathbb{R}$, on a :

(B^o $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} =$

$= \frac{1}{1+x^2}$

RF 2) ■ Corollaire : $\arctan(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$