Intermède

Théories des ensembles III

Relations

Georg CANTOR (1845 – 1918)

Cantor

La théorie des ensembles telle qu'on la pratique aujourd'hui est principalement l'œuvre de Georg Cantor, mathématicien allemand. Ses idées sur l'infini, qui sont aujourd'hui complètement admises, lui valurent l'hostilité de beaucoup de ses contemporains.

C'est le premier à avoir compris (et démontré) que :

- *deux ensembles infinis n'ont pas forcément « la même taille » ;*
- *il y a une infinité de « tailles » possibles pour les ensemble infinis ;*
- $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{N}^2$ *« ont la même taille » ;*
- $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{R}$ *« n'ont pas la même taille ».*

C'est le premier à avoir énoncé l'hypothèse du continu : « $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ *».*

Relations

Dans cet intermède, E, F, G sont des ensembles

I Relations

1) déf°:

Déf°: Une relation (binaire) sur E est une partie de E^2

Notation f°ab: si $\mathcal{R}$ est une relation sur E et si $(x, y) \in R$, on note $x R y$ et on dit que x et y sont en relation (via R)

2) Exemples

On prend $E := \{\text{Pierre}, \text{Paul}, \text{Jacques}\}$

et on considère "x est l'ami de y" sur E

Ici, on considère $R := \{(\text{Pierre}, \text{Paul}), (\text{Paul}, \text{Pierre}), (\text{Paul}, \text{Jacques}), (\text{Jacques}, \text{Paul})\}$

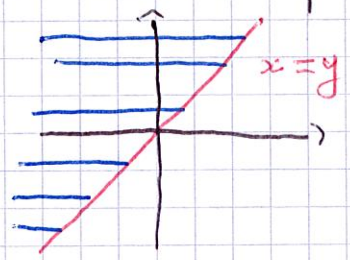
Ici, on a : Pierre et Paul sont amis

Paul et Jacques sont amis

Mais Pierre n'est pas son propre ami

- Sur $\mathbb{R}$, on a la relation "$x \leq y$"

Il s'agit de la partie de $\mathbb{R}^2$:



• Sur $\mathbb{Z}$: Fixons $n \in \mathbb{N}^*$

On a une relation "être congru modulo n", qu'on note $\cdot \equiv \cdot \; [n]$ ou $\equiv_n$

• Sur $\mathbb{Z}$, on a aussi "$n \mid m$"

• Sur $\mathcal{P}(E)$, on a la relation "$A \subset B$"

qui correspond à $\{(a,a) \, ; \, a \in E\}$

ie à $\{(x,y) \in E^2 \mid y = x\}$

• La relation "$E \approx F$", être équipotent sur la classe tout les ensembles

3) Vocabulaire

Soit E un ensemble et soit R une relation sur E

On dit que : R est réflexive $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in E, \; x R x$

R est symétrique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E, \; xRy \Rightarrow yRx$

R est transitive $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y, z \in E, \; (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$

R est antisymétrique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E, \; (xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow x = y$

II Relations d'ordre

1) Def^{o}

Def^{o} : Une relation d'ordre E est une relation sur E qui est reflexive, transitive et antisymétrique

On note souvent $\leqslant$, $\preccurlyeq$ une telle relation

Un couple $(E, \leqslant)$ où E est un ensemble et où $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E est appelé ensemble ordonné

2) Exemples

- $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble ordonné
  En effet, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x \leqslant x$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow x = y$$

De m̂, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ est un ens. ordonné

Soit E un ens.

Alors $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné

car ⓣ

$$A \subset A$$

$$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Rightarrow A = B$$

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

Soit X un ens. On munit $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$
de la relation $\leq$
définie par

$$f \leq g \overset{\Delta}{\underset{ssi}{}} \forall x \in X,\ f(x) \leq g(x)$$

Alors : $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

3) Vocabulaire

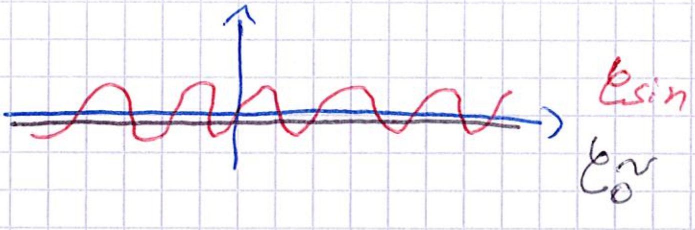
Def : Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné
On dit que $\leq$ est total et que $(E, \leq)$ est totalement ordonné

$$\overset{\Delta}{\underset{ssi}{}} \forall x, y \in E,\ (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$$

Exemples

- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné
- En général $(\mathcal{P}(E), \subset)$ n'est pas totalement ordonné
  (p.e.x dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a $\{0,1\} \not\subset \{2\}$
  et $\{2\} \not\subset \{0,1\}$
- $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), \leq)$ n'est pas total^{nt} ordonné en général

(Ex :



<u>Déf :</u>

Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés

Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est croissante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x, y \in E, \quad x \leq y \implies f(x) \preccurlyeq f(y)$$

Ex*

On considère $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subset)$ et $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \leq)$

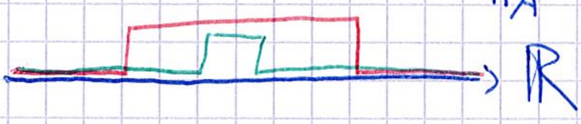
et $\underline{\Phi} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$A \longmapsto \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Phi(A)\ x \longrightarrow$ 1 si $x \in A$, 0 sinon

$= \mathbb{1}_A$

d^n



Ex$^{\textcircled{T}}$: On considère

$$I : (\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \leq) \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$$

$$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt$$

Alors I est croissante

Ie$^{\textcircled{T}}$ $\quad f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$

i.e. $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Rq : un préordre est une relation réflexive et transitive

Ex : voir DM, subpotent

4) Un dernier exemple

La relation de divisibilité, notée " | ", est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

en effet (T)

$$n \mid n$$

$$(n \mid m \text{ et } m \mid p) \Rightarrow n \mid p$$

$$(n \mid m \text{ et } m \mid n) \Rightarrow n = \pm m$$

$$\Downarrow$$

$$n = m \quad \text{car } n, m \in \mathbb{N}$$

Ex :

(1) Est-ce que $\begin{array}{ccc}(\mathbb{N}, \mid) & \longrightarrow & (\mathbb{N}, \leq) \\ n & \longmapsto & n\end{array}$ (i_1)

est croissante ?

et $(\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mid)$? (i_2)

On a i_2 n'est pas croissante ($5 \leq 7$ mais $5 \nmid 7$)

et i_1 non plus car $3 \mid 0$ mais $3 \not\leq 0$

En revanche

$$i_3 \ (\mathbb{N}^*, |) \longrightarrow (\mathbb{N}^*, \leqslant) \text{ est croissante}$$

En g^{al} $\forall a,b \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} a|b \\ b \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow |a| \leqslant |b|$

D/ Ⓣ On ecrit $b = k \cdot a$ On a $|b| = |k| \cdot |a|$

comme $b \neq 0$, $k \neq 0$ Donc $|k| \geqslant 1$ donc

$|b| \geqslant |a|$ ■

III Relation d'equivalence

1) Définition

<u>Déf°</u> : Soit R une relation sur E

On dit que R est une relation d'équivalence (sur E) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

- $\forall x \in E$, xRx
- $\forall x, y \in E$ $xRy \Longrightarrow yRx$
- $\forall x, y, z \in E$, $(xRy$ et $yRz) \Longrightarrow xRz$

Ⓣ

- Si xRy on dit que x et y sont égaux modulo R et on notera $x \equiv_R y$

2) Exemples

- La relation d'égalité sur E est une relation d'équivalence

- La relation $\equiv_n$ est une relation d'équiv.

  En effet (T) :
  - $a \equiv a\ [n]$
  - $a \equiv b\ [n] \Rightarrow b \equiv a\ [n]$
  - $(a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]) \Rightarrow a \equiv c\ [n]$

- La relation d'équipotence

- Sur $MPSI_3$ on définit $x R y \overset{\Delta}{\text{ssi}}$ x et y sont dans le m̂ groupe de colle

- Sur $\mathbb{R}$, on définit R par $x R y \overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $x = \pm y$

  On a $\cdot Z \equiv_R -Z$ C'est une relat° d'équivalence

3 Classes d'equivalence

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence R

déf : Soit $x \in E$ La classe d'equivalence de x est la partie de E, notée $Cl_R(x)$, definie par

$$Cl_R(x) := \{ y \in E \mid y \equiv_R x \}$$

Ex :

On se place sur $\mathbb{Z}$ avec $\equiv_2$

Alors $c\ell_{\equiv_2}(0) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 [2]\}$

$= \{\text{nbs pairs}\} = 2\mathbb{Z}$

et $c\ell_{\equiv_2}(1) = \{\text{nbs impairs}\}$

· Dans $MPSI_3$: avec R, on a

$c\ell_R(\text{Charles}) = \{x \in MPSI_3 \mid x \equiv_R \text{Charles}\}$

$= \{\text{Charles, Nowar, Nils}\}$

et $c\ell_R(\text{Nowar}) = c\ell_R(\text{charles})$

Dans $\mathbb{Z}$ avec $\equiv_n$, on a

$c\ell_{\equiv_n}(0) = n\mathbb{Z} = \{0, n, 2n, \dots, -n, -2n, -3n, \dots\}$

En effet ⊕ : $x \equiv 0 [n] \iff n \mid x$

$\iff x \in \{0, n, 2n, \dots, -n, \dots\}$

et $c\ell_{\equiv_n}(n) = c\ell_{\equiv_n}(0)$ car ⊕ $x \equiv n [n]$

$\iff x \equiv 0 [n]$

et $c\ell_{\equiv_n}(1) = \{1, n+1, 2n+1, \dots, -n+1, -2n+1, \dots\}$

$= \{kn+1 \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$

b) Propriétés

Prop : Soient $x, y \in E$

1) $x \in cl_R(x)$

2) $x \equiv_R y \Leftrightarrow cl_R(x) = cl_R(y)$

3) $\left(cl_R(x) \cap cl_R(y) \neq \emptyset\right) \Leftrightarrow cl_R(x) = cl_R(y)$

D/ ①

1) $x \equiv x$ car R est reflexive

2) Osq $x \equiv_R y$ Mq $cl_R(x) \subset cl_R(y)$

Soit $z \in cl_R(x)$ On a $z \equiv_R x$ or

$x \equiv_R y$ donc $z \equiv_R y$ ie $z \in cl_R(y)$

De m̂, $cl_R(y) \subset cl_R(x)$

Osq $cl_R(x) = cl_R(y)$ On a $x \in cl_R(x)$

donc $x \in cl_R(y)$ ie $x \equiv y$

3) AF ∎

c) Ensemble quotient

<u>Déf°</u> : E ens ; R relat° d'équiv.

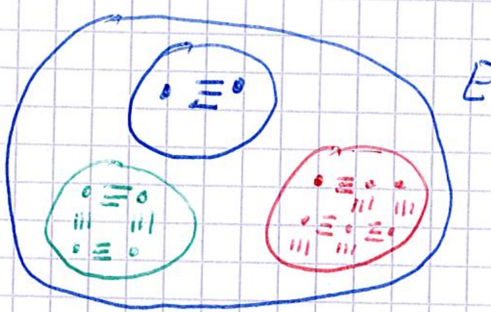
- Soit $A \subset E$ on dit que A est une classe d'équivalence de E pour R $\overset{\Delta}{\text{si}}$:

  $\exists\, x_0 \in E : A = \mathcal{C}\ell_R(x_0)$

- L'ensemble quotient de E par R noté E/R est l'ensemble des classes d'équivalences de E

ie on pose $E/_R := \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, x_0 \in E : A = \mathcal{C}\ell_R(x_0)\}$

d°



Ici, $E/R = \{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc\}$

<u>Exemples</u> :

On a $|\text{MPSI}_3/R| = 16$

Considérons Ω la classe de tout les ensembles

Alors, $\Omega/\approx$ la classe des cardinaux finis ou infinis

On pose $0 := cl_{\approx}(\emptyset)$

$1 := cl_{\approx}(\{\text{Paul}\})$

$2 := cl_{\approx}(\{\text{Timothy}, \text{Malo}\})$

Aleph (mal écrit) $\left(\aleph := cl_{\approx}(\mathbb{N})\right.$ c'est le 1er cardinal infini

On montrera que $cl_{\approx}(\mathbb{N}) \neq cl_{\approx}(\mathbb{R})$ $\quad (\mathbb{N} \prec \mathbb{R})$

h) $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ $\quad (n \geq 1$, entier$)$

Déf° : On note $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z} := \mathbb{Z}/_{\equiv_n}$

Notation :

Si $x \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{x}^{[n]}$ (ou $\overline{x}$ si le contexte est clair) la classe de x modulo n ; ie on pose

$$\overline{x}^{[n]} := cl_{\equiv_n}(x)$$

Thm : $$\left|\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}\right| = n$$

D/