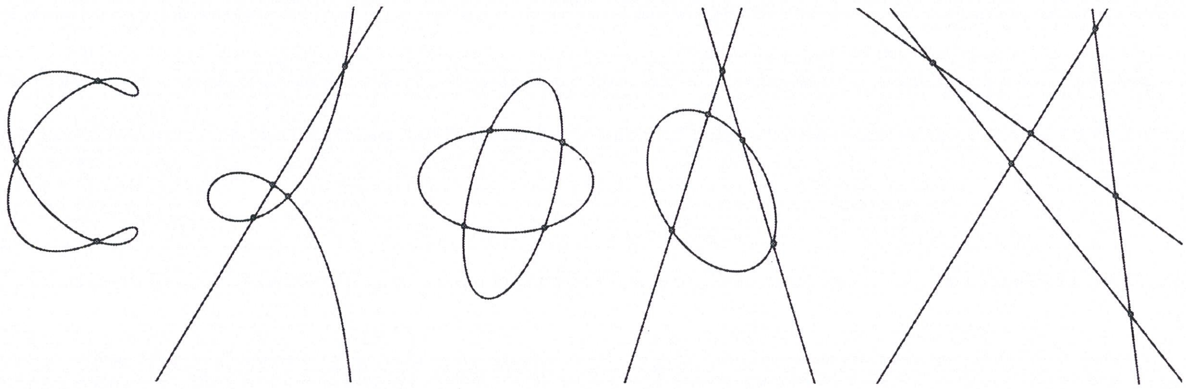
Lycée Chateaubriand
Colas Bardavid

Chapitre 12

Polynômes I



Exemples de courbes algébriques, définies par des polynômes

Polynômes

Les fonctions polynomiales sont les fonctions les plus simples qu'on puisse imaginer.

Dans l'ordre, on a d'abord les fonctions constantes, puis les fonctions affines, puis les fonctions polynomiales de degré 2 : ils correspondent aux expressions « a », « $aX + b$ » puis « $aX^2 + bX + c$ ».
Ensuite, on a les fonctions polynomiales de degré 3, etc.

En général, on va étudier les expressions du type

$$\boxed{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.}$$

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

12
Polynômes I
plan de cours et principaux résultats

I. Présentation et définition

1) Exemples

2) Notations

3) Exemples de calcul

a) additions
b) multiplications
c) scalairisation
d) exemple-bilan

Fait 12.1 Ⓣ
On a

$$(X-1)(1+X+\cdots+X^n) = X^n - 1.$$

4) L'ensemble des polynômes

Notation 12.2
On pose

$$\mathbb{R}[X] := \Big\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \ ; \ n \in \mathbb{N} \text{ et } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

De même, on pose

$$\mathbb{C}[X] := \Big\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \ ; \ n \in \mathbb{N} \text{ et } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\Big\}.$$

5) L'indéterminée

6) Premières propriétés

a) propriétés
b) bilan

Proposition 12.3
Le 5-uplet $\Big(\mathbb{K}[X], +, \times, 0, 1\Big)$ *est un anneau commutatif.*

7) Écriture canonique d'un polynôme

a) écriture canonique d'un polynôme

Théorème-Définition 12.4
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul.

- *Alors, P s'écrit de manière unique*

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$, avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\boxed{a_n \neq 0.}$

- *On dit que :*
  - ▷ *n est* le degré de P, *noté* $\deg(P)$;
  - ▷ *les a_k sont* les coefficients de P, *notés* $\mathsf{coeff}_k(P)$;
  - ▷ *a_0 est* le coefficient constant de P ;
  - ▷ *a_n est* le coefficient dominant de P, *noté* $\mathsf{coeff}_{\mathsf{dom}}(P)$;
  - ▷ *$a_n X^n$ est* le terme dominant de P.

b) exemples

c) quelques propriétés

d) définitions

8) Exemples d'identités algébriques classiques

Proposition 12.5 Ⓣ

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

Proposition 12.6 Ⓣ

$$P^n - Q^n = \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

9) Une expression du produit

II. Degré

1) Cas du polynôme nul

Convention 12.7
On pose

$$\boxed{\deg 0_{\mathbb{K}[X]} := -\infty.}$$

2) Degré de la somme

Proposition 12.8
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1) *En général, on a*

$$\deg(P+Q) \leqslant \max\Big(\deg(P), \deg(Q)\Big).$$

2) *Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, on a*

$$\deg(P+Q) = \max\Big(\deg(P), \deg(Q)\Big).$$

3) Espace $\mathbb{K}_n[X]$

Définition 12.9 Ⓣ

$$\mathbb{K}_n[X] := \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant n \right\}$$

Fait 12.10 Ⓣ

1) *$\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire.*
2) *Autrement dit,*

$$\left.\begin{array}{l} P, Q \in \mathbb{K}_n[X] \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \implies P + \lambda Q \in \mathbb{K}_n[X].$$

4) Degré du produit

Proposition 12.11 Ⓣ

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q).$$

5) Intégrité de $\mathbb{K}[X]$

Proposition 12.12 Ⓣ

1) *$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.*
2) *Autrement dit,*
$$PQ = 0 \implies (P = 0 \quad ou \quad Q = 0).$$
3) *Dit de façon contraposée,*
$$(P \neq 0 \quad et \quad Q \neq 0) \implies PQ \neq 0.$$

Corollaire 12.13 Ⓣ

$PQ = PR \implies Q = R.$

III. Évaluation des polynômes

18.4
18.13
18.15

1) Définition

a) évaluation
b) fonction associée à un polynôme
c) évaluation en une matrice

2) Propriétés fausses

Fait 12.14 Ⓣ

En général, on a :

1) $P(\alpha + \beta) \neq P(\alpha) + P(\beta)$;
2) $P(\alpha\beta) \neq P(\alpha)P(\beta)$.

3) Propriétés vraies

Proposition 12.15 Ⓣ

On a :

1) $(P + Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\beta)$;
2) $(PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\beta)$.

4) Interpolation de Lagrange

> **Théorème 12.16** Ⓣ
> *Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts. Alors*
> $$\forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \ \exists! P \in \underset{n-1}{\mathbb{K}[X]} : \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \ P(x_i) = y_i.$$

IV. Racines

18.6
18.10
18.21

1) Racines

2) Caractérisation des racines

> **Proposition 12.17**
> *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors,*
> $$P(\alpha) = 0 \quad \iff \quad \exists Q \in \mathbb{K}[X] : \ P = (X - \alpha)Q.$$

3) Factorisation simultanée

4) Le degré majore le nombre de racines

> **Théorème 12.18**
> *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul.*
> 1) *Alors, P admet au plus $\deg(P)$ racines.*
> 2) *Plus formellement,*
> $$\left|\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P)\right| \leqslant \deg(P).$$

5) Critère radical de nullité

a) énoncé

> **Théorème 12.19** Ⓣ
> 1) *Un polynôme de degré au plus n qui a au moins $n+1$ racines est nul.*
> 2) *Plus formellement,*
> $$\left.\begin{array}{l} \left|\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P)\right| \geqslant n+1 \\ \deg(P) \leqslant n \end{array}\right\} \implies P = 0.$$

> **Corollaire 12.20** Ⓣ
> $$\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P) \text{ infini} \implies P = 0.$$

b) corollaires

> **Corollaire 12.21** Ⓣ
> *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré $\leqslant n$.*
> $$P \text{ et } Q \text{ coïncident en } (n+1) \text{ points} \quad \implies \quad P = Q.$$

c) une belle application

> **Fait 12.22**
> $$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}\right)$$

d) reformulation

6) Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 12.23 Ⓣ

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. *Alors,*

$$\mathrm{Deg}(P) \geq 1 \implies \exists \alpha \in \mathbb{C} : P(\alpha) = 0.$$

Corollaire-Réflexe 12.24 Ⓣ

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ *non nul de degré* n. *Alors, on peut écrire*

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *et* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

V. Composition

18.26 18

1) Définition

2) Propriétés

3) Degré

VI. Dérivation formelle

1) Définition

2) Propriétés

3) Degré

ch. 12

Polynômes

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

(De façon générale, ce qui suit fonctionne pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque)

I Présentation et définition

1) Exemples

Sont des polynômes :

- $3X + 1$ ⚠ c'est X et non x
- $9X^2 + 14X - 3$ ⚠ X ne doit pas être défini
- 2 est un polynôme
- $\sum_{k=0}^{n} kX^k$ où $n \in \mathbb{N}$
- $5X^3 - 3X + 2$
- 0 est un polynôme
- $iX^3 + (3i-2)X^2 \quad (5i-7)X + (8i-3)$

  est un polynôme à coeff complexes
- $\frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{5}X + \frac{13}{8}$
- $\pi X^2 - eX + \sqrt{2}$

2) Notations

On les note $P, Q, R, S, \dots W$ etc

On pourra écrire "Posons $P := X^2 - 8$"

⚠ On n'écrit pas : "Posons $P(X) = X^2 - 8$"

Un polynôme n'est pas une fonction, c'est une somme formelle de puissances de X

3) Exemples de calcul

a) addition

On a $(2X^3 + 3X^2 + X + 1) + (4X^2 + 2X + 3)$

$$= 2X^3 + 7X^2 + 3X + 4$$

b) multiplication

Notons $P := X^2 - X + 2$ et $Q := X^2 - X - 1$

On a : $P \times Q = (X^2 - X + 2)(X^2 - X - 1)$

$$= X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X - 2$$

J'ordonne mon calcul en calculant
1) le terme en X^4
2) le terme en X^3

....

Et : $Q \times P = (\dots) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X - 2$

c) scalairisation

On multiplie un polynôme par un scalaire (ie un élément de $\mathbb{K}$)

On a $3(2X^2-8X+2) = 6X^2-24X+6$

d) Exemple-bilan

Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$(X-1)(1+X+X^2+\cdots+X^n)$

$= X(1+X+X^2+\cdots+X^n) - (1+X+\cdots+X^n)$

$= X+X^2+X^3+\cdots+X^n+X^{n+1} - (1+X+\cdots+X^n)$

$= X^{n+1}-1$

Fait :

$$(X-1)(1+X+\cdots+X^n) = X^{n+1}-1$$

Rq : c'est Bernoulli pour "$a := X$" et "$b := 1$"

e) pas de division

Pour l'instant, l'écriture $\dfrac{X+2}{X^2-8}$ est interdite

4) L'ensemble des polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ens des polynômes à coeff réels

De m̂ : $\mathbb{C}[X]$, plus gén$^{\text{alt}}$: $\mathbb{K}[X]$ ou $K[X]$

Ex : $e^{i\frac{\pi}{8}} X^{17} - 9X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors

$$(x-1)\left[\sum_{k=0}^{n} (X^k + X^2 - 1)^k\right]^n \in \mathbb{R}[X]$$

Fait : On a $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$

D/ cf polycopié ■

5) L'indéterminée

En mathématiques, un certain nombre d'objets bien déterminés sont désignés par un symbole (ou une suite de symboles) connu de tous : c'est leur "nom propre"

Ex :

- i • $\ln$ • $\arccos$ • Im • 0 • $\mathbb{N}$
- $\mathbb{R}$ • π • e • 1 • 3 • $\sqrt{}$
- $\mathbb{Q}$ • $\operatorname{pgcd} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$

X est le nom propre donné à un objet mathématique précis appelé indéterminé

⚠ Pas de " Soit X l'indéterminé "

Déf° : (à oublier car on ne s'en sert jamais)

On pose $X := (0, 1, 0, 0, 0 \dots)$

6) Premières propriétés

Fait : $\oplus$

1) a) $(P+Q)+R = P+(Q+R)$

b) $(P+Q) = (Q+P)$

c) $P+0 = 0+P = P$

d) $(-P)+P = P+(-P) = 0$

2)

2) a) $R\times(P\times Q) = (R\times P)\times Q$

b) $P\times Q = Q\times P$

c) $1\times P = P\times 1 = P$

3) a) $P\times(Q+R) = P\times Q + P\times R$

b) $(P+Q)\times R = P\times R + Q\times R$

D/ cf poly

Corollaire :

$(\mathbb{K}[X], +, \times, 0, 1)$ est un anneau commutatif

(lu $\mathbb{K}$ crochet X)

7) Écriture canonique d'un polynôme

a) l'écriture canonique

Th - def° :

Soit P un polynôme non nul.

1) Alors P s'écrit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$
avec $n\in\mathbb{N}$, $\forall i$, $a_i\in\mathbb{K}$ et $a_n\neq 0$

2) On dit alors que : • n est le degré de P, noté $\deg(P)$

• les a_k sont les coefficients de P notés $\mathrm{coeff}_k(P)$

• a_0 : coeff constant

• a_n : coeff dominant noté $\mathrm{coeff}_{dom}(P)$

$a_n X^n$: terme dominant de P

b) exemples

- $\deg(4X^2+2X-1) = 2$
- $\deg(X) = 1$
- Notons $P = 4X^2 + 2X - 1$
- $\deg(1) = 0$
- On a $\text{coeff}_4(P) = 0$

c) qq propriétés

Fait : Les coeff de la somme sont les sommes des coeff

- Ie ⊕ : $\text{coeff}_k(P+Q) = \text{coeff}_k(P) + \text{coeff}_k(Q)$
- De ⊛ : $\text{coeff}_k(\lambda P) = \lambda\, \text{coeff}_k(P)$

⚠ Faux : $\text{coeff}_k(PQ) \neq \text{coeff}_k(P) \times \text{coeff}_k(Q)$

Fait : C'est vrai pour les coeff constants et dominants

- Ie : $\begin{cases} \text{coeff}_0(PQ) = \text{coeff}_0(P) \times \text{coeff}_0(Q) \\ \text{coeff}_{dom}(PQ) = \text{coeff}_{dom}(P) \times \text{coeff}_{dom}(Q) \end{cases}$

d) déf°

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

Déf : • On dit que P est unitaire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\text{coeff}_{dom}(P) = 1$

• On dit que P est constant $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists a \in \mathbb{K} : P = a$

8) qq identités (T)

$$(X+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k a^{n-k}$$

$$(X^n - 1) = (X-1)(1 + X + \dots + X^{n-1})$$

$$(X^n - a^n) = (X-a) \sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}$$

Prop (T) : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

1) $(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$

2) $P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$

D/ ĉ $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif,

c'est ok ■

9) Une expression du produit

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ qu'on écrit

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$$

On considère le polynôme PQ

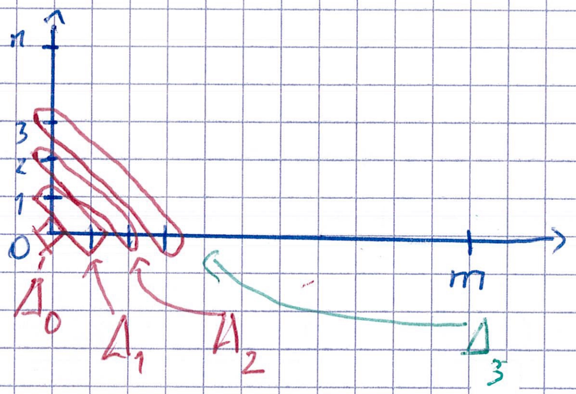
On a

$$PQ = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} a_j X^j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i X^i \, b_j X^j$$

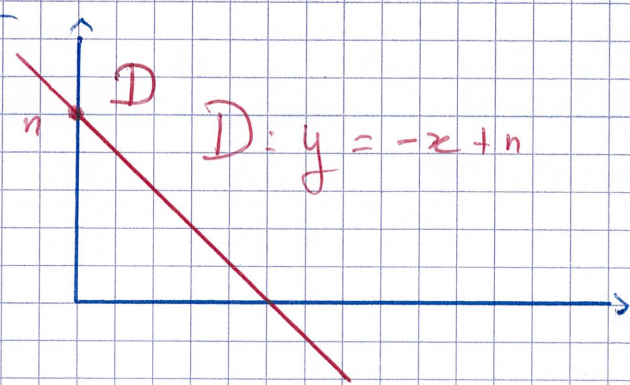
$$= \sum_{(i,j)\in R} a_i b_i X^{i+j} \qquad \text{où } R \underset{AC}{:=} [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]$$

d^n



$(\mathbb{N}^2$

Astuce jolie ! Je fais l'analogie avec la géométrie dans $\mathbb{R}^2$



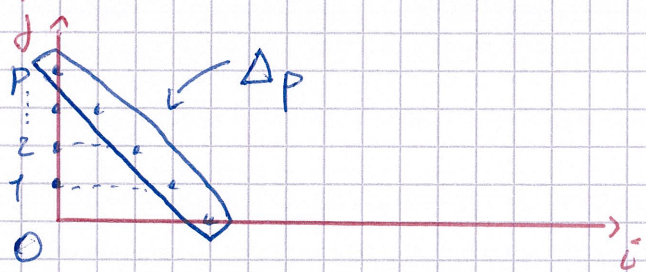
$D : y = -x + n$ $\qquad \mathbb{R}^2$ ou $x + y = n$

Bilan

1) Si $p \in \mathbb{N}$, je note $\Delta_p :=$

$$\left\{ (i,j) \in R \mid i+j = p \right\}$$

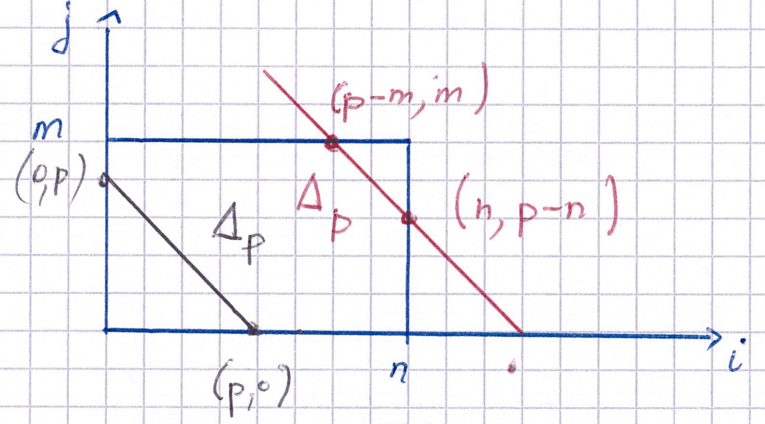
2) On a



" $y = p - n$ "

Rq : On a $\mathrm{card}\,\Delta_p = p+1$ si $p \leq n$ et $p \leq m$

d^n si $p > n$ ou $p > m$



Fait : 1) " $\Delta_p \xrightarrow[p \to \infty]{} \emptyset$ "

2) $\Delta_{n+m} \neq \emptyset$

3) Mieux, on a $\Delta_{n+m} = \{(n, m)\}$

4) et : $\forall p > n+m$, $\Delta_p = \emptyset$

D/ 1) est une version intuitive qui découle de 4)

3) Déjà, $(n,m) \in R$ et $(n,m) \in \Delta_{n+m}$

Soit $(i,j) \in R$ tq $i+j = m+n$

On a donc $(n-i)+(m-j)=0$

avec $\begin{cases}(m-j)\geq 0\\(n-i)\geq 0\end{cases}$

(car $i\in[\![0,n]\!]$ et $j\in[\![0,m]\!]$)

Donc $i=n$ et $j=m$

ccl : $\Delta_{n+m}=\{(n,m)\}$

4) Soit $p>n+m$ Mq $\Delta_p=\emptyset$

ORPA, osq $\Delta_p\neq\emptyset$ et on fixe $(i_0,j_0)\in\Delta_p$

On a $i_0\leq n$ et $j_0\leq m$; donc $i_0+j_0\leq n+m$

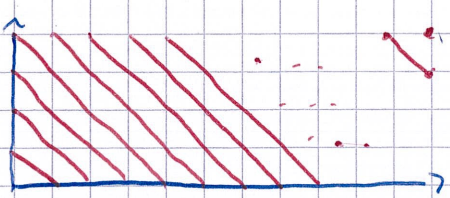
donc $p\leq n+m$ abs

■

Fait : On a $R=\bigsqcup_{p=0}^{n+m}\Delta_p$

Démo / exo-AF ■

d^n



Revenons aux polynômes

On a écrit $P=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ et $Q=\sum_{j=0}^{m}b_jX^j$

avec $n,m\in\mathbb{N}$ et $\forall i,j$, $a_i\in\mathbb{K}$ et $b_j\in\mathbb{K}$

On a :

$$PQ = \sum_{(i,j)\in R} a_i b_j X^{i+j} = \sum_{p=0}^{n+m} \sum_{(i,j)\in\Delta_p} a_i b_j X^{i+j}$$

$$= \sum_{p=0}^{n+m} \sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq m \\ \text{tq } i+j=p}} a_i b_j X^{i+j}$$

$$= \sum_{p=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq m \\ \text{tq } i+j=p}} a_i b_j \right)}_{\text{c'est le } \mathrm{coeff}_p \text{ de } PQ} X^p$$

Fait* :

1) On a (+) $\mathrm{coeff}_p(PQ) = \sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq m \\ \text{tq } i+j=p}} a_i b_j$

2) On a $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{coeff}_p(PQ) = \sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq m \\ \text{tq } i+j=p}} \mathrm{coeff}_i(P) \times \mathrm{coeff}_j(Q)$

II Degré

1) Cas du polynôme nul

On pose $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$

⚠ $\deg(P+Q) = \deg(P) + \deg(Q)$: c'est F+++

__Ctrex :__ $\deg(2x) = \deg(x+x) \overset{?}{=} \deg(x) + \deg(x)$: __Non__

__Prop :__ Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ Alors :

1) $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

2) On a mieux :

$$\deg P < \deg Q \Rightarrow \deg(P+Q) = \deg Q$$

3) Ie

$$\deg P \neq \deg Q \Rightarrow \deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$$

__D/__ c'évident, on suppose P non nul et Q non nul

1) Soit $K > \max(\deg P, \deg Q)$

On a $K > \deg(P)$; donc $\mathrm{coeff}_K(P) = 0$

De m̂, $\mathrm{coeff}_K(Q) = 0$

Rappel : $\mathrm{coeff}_K(P+Q) = \mathrm{coeff}_K(P) + \mathrm{coeff}_K(Q)$

donc $\mathrm{coeff}_K(P+Q) = 0$

· Notons $d := \deg(P+Q)$

On a $\mathrm{coeff}_d(P+Q) \neq 0$ par déf°

donc $d \leq \max(\deg P, \deg Q)$

2) Notons $p := \deg(P)$ et $q := \deg(Q)$ Osq $p < q$

On a $\max(\deg(P), \deg(Q)) = q$

On a mq $\forall k > q$, $\mathrm{coeff}_k(P+Q) = 0$

$\square$

et : $\text{coeff}_{lt}(P+Q) = \underbrace{\text{coeff}_{lt_q}(P)}_{\substack{=0 \\ \text{car } q > \deg(P)}} + \text{coeff}_{lt_q}(Q)$

$= \text{coeff}_{lt_q}(Q) = \text{coeff}_{l_{dom}}(Q) \neq 0$

CCl : $\deg(P+Q) = q = \deg(Q)$ ■ cas gen^{al}!

• Si $P = 0$

On a $P+Q = Q$ et donc $(P+Q) = \deg(Q)$

Mais $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \max(-\infty, n) = n$

Mieux!! $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \quad \max(-\infty, n) = n$

Donc $\max(\deg(P), \deg(Q)) = \deg Q$ ■

Rq : La rcpq de 3) est fausse :

$\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q) \not\Rightarrow \deg P \neq \deg Q$

en gén^{al}

D/$^{\text{contrex}}$ $P = Q = X^2$

On a $\deg(P) = \deg Q$ et $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$

■

3) Degré du produit

Prop (T) : $\deg(P \underset{\times}{\cancel{*}} Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

D/ si $P = 0$, On a $PQ = 0$ donc $\deg(PQ) = -\infty$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\infty + n = -\infty$

Mieux : $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, $-\infty + n = -\infty$

De $\hat{m}$ si $Q = 0$ ■

• Osq $P, Q \neq 0$ et on écrit

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$, avec $\forall i, j$, $\begin{cases} a_i \in \mathbb{K} \\ b_j \in \mathbb{K} \end{cases}$ et $\begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_m \neq 0 \end{cases}$

On a $n = \deg(P)$ et $m = \deg(Q)$

On a $PQ = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j P$

et : si $j_0 \in \mathbb{N}$, on a $X^{j_0} P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{i+j_0}$

et donc $\deg(X^{j_0} P) = j_0 + n$

On a

$$PQ = \underbrace{b_m X^m P}_{\deg(\cdot) = m+n} + \boxed{\sum_{j=0}^{m-1} \boxed{b_j \boxed{X^j P}}}$$

$\deg(\cdot) = j + n$

$\deg(\cdot) \leq j + n \leq m - 1 + n < n + m$

$\deg(\cdot) = m+n$ car $b_m \neq 0$ (*)

$\deg(\cdot) \leq n + m - 1$

• Donc : $\deg(PQ) = m + n = \deg(P) + \deg(Q)$

Rq*: Dans la D/, on a utilisé le fait que :

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \deg(\lambda P) = \deg(P) \text{ à l'endroit } (*)$$

- C'est vrai dans $\mathbb{K}[X]$, dans $K[X]$ mais en général, c'est faux dans $A[X]$

- Ex : On se place dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[X]$ et on considère :

$P := \overline{3}X + \overline{1} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$\lambda := \overline{2} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

On a $\lambda \neq 0_{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$ et $\lambda P = \overline{2} \cdot \overline{3} X + \overline{2}$

$= \overline{6} X + \overline{2} = \overline{0} X + \overline{2} = \overline{2}$

car $\overline{6} = \overline{0}$

- En revanche, c'est vrai si A est intègre

Prop : Soit A intègre et soient $P, Q \in A[X]$

Alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

4) Intégrité de $\mathbb{K}[X]$

Prop : 1) $K[X]$ est intègre

2) $PQ = 0 \Rightarrow (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$

$PQ \neq 0 \Rightarrow (P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0)$

$P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0 \Rightarrow PQ \neq 0$

D/ 3) Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $\begin{cases} P \neq 0 \\ Q = 0 \end{cases}$

Je passe par $\deg(\cdot)$. On a donc $\deg(P) \in \mathbb{N}$
$\deg(Q) \in \mathbb{N}$

Or $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

donc $\deg(PQ) \in \mathbb{N}$

donc $PQ \neq 0$ ■

Rq*: On a (+) génalt

A intègre $\Rightarrow$ A [X] intègre

Corollaire (+)

$$\left.\begin{array}{l} PQ = PR \\ P \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = R$$

D/ cf chap 11 ■

5) Espace $\mathbb{K}_n[X]$!!

Def°: (+)

$$\mathbb{K}_n[X] := \{ P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n \}$$

Prop°: $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaisons linéaires

ie (+)

$$\left.\begin{array}{l} P, Q \in \mathbb{K}_n[X] \\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

D/ ⊕

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\underbrace{\deg(\lambda P)}_{\leqslant n}, \overbrace{\deg(\mu Q)}^{\leqslant n})$$

III Evaluation des Polynômes

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}[X]$

1) Définition

Def° : L'évaluation de P en α, notée $P(\alpha)$ est l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$

Rq: Il faudrait vérifier que si P s'écrit

$$P = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$$

avec $m \in \mathbb{N}$ et $\forall i, b_i \in \mathbb{K}$, alors on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = \sum_{p=0}^{m} b_p \beta^p$$

(cf ORAL)

Exemples :

- Si $P := 3X^2 - 2X + 8$ alors

$P(i) = -3 - 2i + 8 = 5 - 2i$

$P(1) = 3 - 2 + 8 = 9$

Fait :

1) $P(1)$ est la somme des coeff. de P

2) ie $P(1) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \text{coeff}_k(P)$

3) $P(0) = \text{coeff}_0(P)$

D/ ok ■

b) fonction associée à un polynôme

Déf° : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

La fonction associée à P, notée $\widetilde{P}$, est la fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto P(x)$$ l'évaluation de P en x

Rq : on a donc $\forall x \in \mathbb{K}$, $\widetilde{P}(x) = P(x)$

la valeur que la f° $\widetilde{P}$ prend en x

L'évaluation du polynôme P en x

Fait : Soit $P \in \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{R}[X]$ Alors :

1) $\tilde{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2) on a $\tilde{P} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

c) évaluation en une matrice

L'interêt des polynômes c'est qu'on peut les évaluer dans plein d'endroits $\neq^{ts}$!!!

Pour évaluer un polynôme, j'ai besoin

(i) • de calculer α^k donc j'ai besoin d'un produit

(ii) • de calculer $a_k \cdot {}^k$; j'ai besoin de pouvoir "scalairiser"

(iii) • de faire $a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n$: j'ai besoin d'une somme

Exemples d'ensembles qui verifient ces conditions

- Déjà, (i) + (iii) : on veut des anneaux
- Si R est un anneau, on veut en plus la possibilité d'écrire λx quand $\begin{cases} x \in R \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$
- $M_2(\mathbb{R})$ • $\mathbb{R}[X]$ • $M_n(\mathbb{R})$ • $\mathbb{C}$
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et + généralement : $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et + généralement $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$

Bilan

① $\tilde{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mange seulement des réels

② Mais : P mange $\mathbb{R}$, $M_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}$

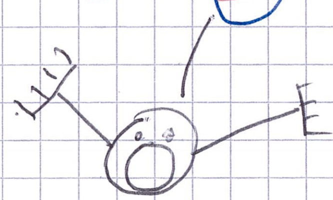
$\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

Ex :

On pose $P := 5X^3 - 2X^2 + 8X - 5$

Alors, si $A \in M_2(\mathbb{R})$, on a

$P(A) = 5A^3 - 2A^2 + 8A - 5$ F^{++}



On écrit $P = 5X^3 - 2X^2 + 8X^1 - 5X^0$

donc $P(A) = 5A^3 - 2A^2 + 8A - 5I_2$ ⚠

(AF) Avec $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Propriétés fausses

Prop : Sont fausses en g^al :

1) $P(\alpha + \beta) = P(\alpha) + P(\beta)$

$P(\alpha\beta) = P(\alpha)P(\beta)$

D/ (AF)$^{++}$ rech de contre-exemples

3) Propriétés Vraies

Prop : 1) $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$

$(P \times Q)(\alpha) = P(\alpha) \times Q(\alpha)$

D/ 1) ok

2) On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{p=0}^{m} b_p X^p$

avec $n, m \in \mathbb{N}$ et $\forall k, p \quad a_k \in \mathbb{K}, b_p \in \mathbb{K}$

On a alors :

$$PQ = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\left(\sum_{p=0}^{m} a_p X^p\right)$$

$$= \sum_{(k,p) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]} a_k b_p X^{k+p}$$

Donc $(PQ)(\alpha) = \left(\sum_{(k,p) \ldots} a_k b_p X^{k+p}\right)(\alpha)$

$$= \sum_{(k,p) \in \ldots} a_k b_p \alpha^{k+p}$$

grâce à 1)

et $P(\alpha) \times Q(\alpha) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k\right) \times \left(\sum_{p=0}^{m} b_p \alpha^p\right)$

$$= \sum_{(k,p) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]} a_k b_p \alpha^k \alpha^p \quad = \alpha^{k+p}$$

Rq : $(\lambda P)(\alpha) = \lambda P(\alpha)$ quand $\lambda \in \mathbb{K}$

Reformulation

Notons $\text{év}_\alpha : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$
$$P \longmapsto P(\alpha)$$

Rq : ① génér^{alt}, si B est une structure avec $(+, \times, \cdot)$ et si $\beta \in B$, on dispose de

$$\text{év}_\beta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow B$$
$$P \longmapsto P(\beta)$$

Prop : 1) $\text{év}_\alpha(P+Q) = \text{év}_\alpha(P) + \text{év}_\alpha(Q)$

2) $\text{év}_\alpha(P \times Q) = \text{év}_\alpha(P) \times \text{év}_\alpha(Q)$

3) $\text{év}_\alpha(1) = 1$

ie $\text{év}_\alpha : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ est un morphisme d'anneaux.

Rq : ② $\text{év}_\beta(\lambda P) = \lambda\, \text{év}_\beta(P)$

on dit que $\text{év}_\beta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow B$ est un morphisme de $(+, \times, \cdot)$-structure

4) Interpolation de Lagrange $\longrightarrow$ cf ④ loin

IV Racines

1) Racines

Déf : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$

On dit que α est une racine de P $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $P(\alpha) = 0$

Rq : On note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble de ces racines dans $\mathbb{K}$

Exemples :

Soit $P := X^2 + 1$

- On a $Z_{\mathbb{R}}(P) = \emptyset$
- On a $Z_{\mathbb{C}}(P) = \{i, -i\}$
- On a $Z_{\mathbb{C}}(X^n - 1) = \mathbb{U}_n$ si $n \geqslant$
- et $Z_{\mathbb{R}}(X^n) = \{0\}$ si $n \geqslant 1$
- Et $Z_{\mathbb{C}}(X^2 + X + 1) = \{j, \bar{j}\}$

Fait ⊕ 1) $Z_{\mathbb{K}}(PQ) = Z_{\mathbb{K}}(P) \cup Z_{\mathbb{K}}(Q)$

(c'est l'intégrité)

2) $Z_{\mathbb{K}}(PQ) = Z_{\mathbb{K}}(P) \times Z_{\mathbb{K}}(Q)$ est faux

2) Caractérisation des racines

On va mq $P(\alpha)=0$ ssi je peux factoriser P par $X-\alpha$

Prop Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on a

$$P(\alpha)=0 \iff \exists\, Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha)\cdot Q$$

D/ $\Leftarrow$ Osq $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P=(X-\alpha)\cdot Q$

Fixons un tel Q

On a alors $P(\alpha) = \big((X-\alpha)Q\big)(\alpha)$

$= (\alpha-\alpha)\,Q(\alpha)$

$=0$

$\Rightarrow$ Osq $P(\alpha)=0$

On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$

et $\forall k,\ a_k \in \mathbb{K}$

Astuce On a $P = P - P(\alpha)$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k X^k - \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha^k \quad \text{car } a_0 X^0 = a_0\alpha^0 = a_0$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(X^k - \alpha^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (X-\alpha) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \alpha^{k-i-1}$$

$$= (X-\alpha)\left[\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{k-1-i} X^i\right)\right] \leftarrow Q$$

CCl : $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha) Q$

3) Factorisation simultanée

Prop : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ des racines de P 2 à 2 distinctes

Alors : $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_N) \cdot Q$

D/ rec finie ascendante

On note $P(k)$: " $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$:
$$P = \left(\prod_{i=1}^{k} X - \alpha_i\right) Q \text{ "}$$

$k=1$: OK car d'après 2), c $P(\alpha_1) = 0$, on sait que
$\exists Q : P = (X-\alpha_1) Q$

Hérédité : Mq $\forall k \in [\![1, N-1]\!], P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$ tel que $P(k)$

Fixons donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P = \left[\prod_{i=1}^{k} (X-\alpha_i)\right] Q$

On évalue en α_{k+1}. On a :

$$\underbrace{P(\alpha_{k+1})}_{=0} = \underbrace{\left[\prod_{i=1}^{k} \overbrace{(\alpha_{k+1} - \alpha_i)}^{\neq 0}\right]}_{\neq 0 \text{ car les } \alpha_i \text{ sont 2 à 2 distincts et par intégrité}} Q(\alpha_{k+1})$$

Donc $Q(\alpha_{k+1}) = 0$

D'après 2), on écrit $Q = (X - \alpha_{k+1}) S$

avec $S \in \mathbb{K}[X]$

Bilan : on a $P = \left[\prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)\right] (X - \alpha_{k+1}) S$

Donc $P(k+1)$ est V ■

4) Le degré majore le nb de racines

Thm Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul Alors

- P possède au plus $\deg(P)$ racines
- Ie $|Z_{\mathbb{K}}(P)| \leq \deg(P)$

Rq : • encore vrai dans $K[X]$

• ——————— $A[X]$ si A intègre

• faux si A non intègre

D/ On pose $n := \deg(P)$

On écrit $Z_{\mathbb{K}}(P) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ où

$N := |Z_{\mathbb{K}}(P)|$

Les α_k sont 2 à 2 distincts

• Fixons $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P = \left[\prod_{k=1}^{N} (X - \alpha_k)\right] Q$

d'après 3)

- On a $Q \neq 0$ car $P \neq 0$
- On passe $(*)$ à $\deg(\cdot)$: on a

$$\deg(P) = \deg\left(\prod_{k=1}^{N} (X - \alpha_k)\right) + \deg Q$$

Ĉ $Q \neq 0$, on a $\deg(Q) \geqslant 0$

<u>CCl</u> : $\deg(P) \geqslant \deg\left(\prod_{i=1}^{N} X - \alpha_i\right)$

Or $\deg\left(\prod_{i=1}^{N} X - \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\deg(X - \alpha_i)}_{=1} = N$

D'où $n \geqslant N$ ■

5) Critère radical de nullité

radical : relatif au racines

a) énoncé

<u>Thm</u> 1) Un polynôme de degré au plus n possédant au moins $(n+1)$ racines est nul

2) Plus formell^{nt} :

$$\left.\begin{array}{l} \deg(P) \leqslant n \\ |Z_{\mathbb{K}}(P)| \geqslant n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow P = 0$$

<u>D/</u> Osq $P \neq 0$, osq $\deg(P) \leqslant n$ et $|Z_{\mathbb{K}}(P)| \geqslant n+1$

c'est absurde car $|Z_{\mathbb{K}}(P)| \leqslant \deg(P) \leqslant n$ ■

Corollaire :

1) Si P a une ∞ té de racines, alors $P = 0$

2) $Z_{\mathbb{K}}(P)$ infini $\Rightarrow P = 0$

D/ ok

b) Corollaires

Corollaire Soit $n \in \mathbb{N}$

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré au plus n

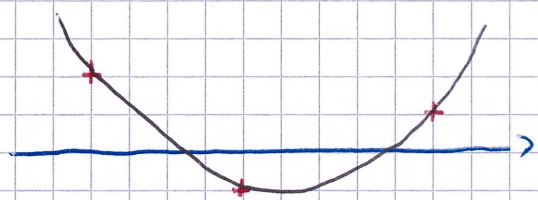
Alors

1) Si P et Q ~~coïci~~ coïncident en (au moins) $n+1$ pts, alors $P = Q$

2) ie $\left(\left| \{ a \in \mathbb{K} \mid P(a) = Q(a) \} \right| \geq n+1 \right) \Rightarrow P = Q$

Rq : C'est un résultat de rigidité

d^n



D/ On pose $S = P - Q$

On a $S \in \mathbb{K}_n[X]$ car $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$

On a $|Z_{\mathbb{K}}(S)| \geq 1$

Donc, d'après le CRN, on a $S = 0$, $P = Q$

c) Une belle application

Fait (R) : $X^n - 1 = \prod_{w \in \mathbb{U}_n} (X - w) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right)$

D/ Notons $P := \prod_{w \in \mathbb{U}_n} (X - w)$

Mq $P = X^n - 1$

On pose $S := (X^n - 1) - P$

On a $\forall w_0 \in \mathbb{U}_n,\ (X^n - 1)(w_0) = w_0^n - 1 = 1 - 1 = 0$

et aussi : $\forall w_0 \in \mathbb{U}_n,\ P(w_0) = \prod_{w \in \mathbb{U}_n} (w_0 - w) = 0$

Donc $\forall w_0 \in \mathbb{U}_n,\ S(w_0) = 0 - 0 = 0$

Donc $\mathbb{U}_n \subset Z_{\mathbb{C}}(S)$

donc $|Z_{\mathbb{C}}(S)| \geq n$

- Or $\deg(S) \leq n - 1$!! En effet, $\deg P = \deg(X^n - 1) = n$

et $\mathrm{coeff}_{dom}(X^n - 1) = 1$ et $\mathrm{coeff}_{dom}(P) = 1$

Il y a chute de degré

Donc : $S = 0$ i.e. $X^n - 1 = \prod_{w \in \mathbb{U}_n} (X - w)$ $\blacksquare$

d) Reformulation

(on suppose ici $\mathbb{K}$ corps infini)

(c'est faux pour les corps fini)(*)

On considère

$$\tilde{\cdot} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$$
$$P \longmapsto \tilde{P}$$

On a ①
$$\widetilde{P+Q} = \tilde{P} + \tilde{Q}$$
$$\widetilde{PQ} = \tilde{P} \cdot \tilde{Q}$$

$$\tilde{1} = \tilde{1} \longrightarrow \text{la fct}^{\circ}\ \tilde{1}$$

polynôme 1

C'est un morphisme d'anneaux injectif

(D/ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\tilde{P} = \tilde{0}$

On a donc $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = 0$)

Donc P possède une infinité de racines

Donc $P = 0$

Donc $\operatorname{Ker}(\tilde{\cdot}) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$

Donc  $\tilde{\cdot}$ est injective

6) Théorème fondamental de l'algèbre

appelé égal^{nt} : $\boxed{\text{Thm de d'Alembert - Gauss}}$

énoncé en 1629

démontré en 1806.

Thm : Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ ~~non~~ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$

Th corrigé :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tq $\deg P \geq 1$

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{C} : P(\alpha) = 0$ ie $Z_{\mathbb{C}}(P) \neq \emptyset$

Corollaire - $R^{\times}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non-nul de degré $n \in \mathbb{N}$

Alors P s'écrit P

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\forall k, \alpha_k \in \mathbb{C}$

D/ thm ⊕ tard $\blacksquare$

D/ Corollaire

Idée : 1) rec

2) Grâce au thm, on fixe α une racine de P

3) On ecrit $P = (X - \alpha) Q$

4) On mq $\deg Q = n-1$

5) On applique rec à Q

7) interpolation de Lagrange !!

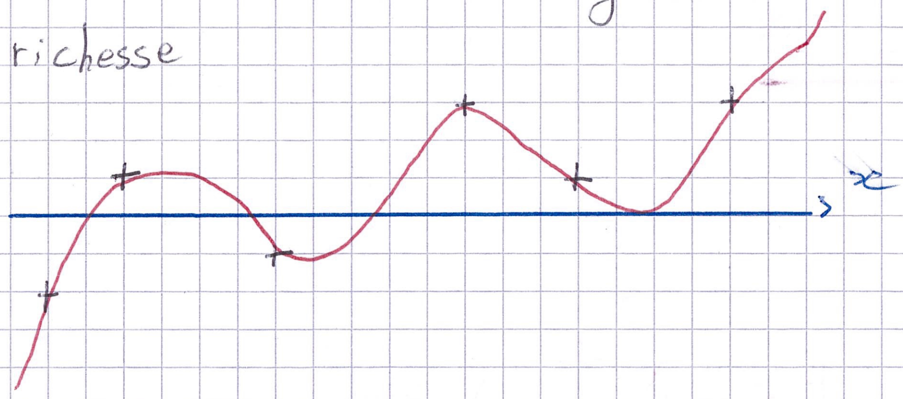
C'est un résultat un peu fin, très intéressant

Idée : Je place dans $\mathbb{R}^2$ n points d'abscisses 2 à 2 $\neq$

Alors : il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ passant par ces points

C'est un resultat de rigidité mais aussi de richesse

d^n



Thm : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ 2 à 2 $\neq$ ts

Alors :

$\forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \exists ! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] : \forall i \in [\![1,n]\!],$

$P(x_i) = y_i$

- On introduit les polynômes $L_1, L_2, \dots, L_n$
- Pour $i_0 \in [\![1,n]\!]$, on pose :

$$\widetilde{L_{i_0}} := \prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq i_0}} (X - x_i)$$

On a : 1°) Si $i \neq i_0$, on a $\widetilde{L_{i_0}}(x_i) = 0$

2°) On a $\widetilde{L_{i_0}}(x_{i_0}) = \prod_{i \neq i_0} (x_{i_0} - x_i)$

• Je renormalise en posant, qd $i_0 \in [\![1,n]\!]$

$$L_{i_0} := \frac{\widetilde{L_{i_0}}}{\widetilde{L_{i_0}}(x_{i_0})}$$

ie on pose $$L_{i_0} := \frac{\prod\limits_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq i_0}} (X - x_i)}{\prod\limits_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i = i_0}} (x_{i_0} - x_i)}$$

• Symbole de Kronecker :

Si $i,j \in \mathbb{Z}$, on pose $\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

La def° s'~~étend~~ s'étend à $\mathbb{R}$, etc

Ex : $\delta_{2,3} = 0$

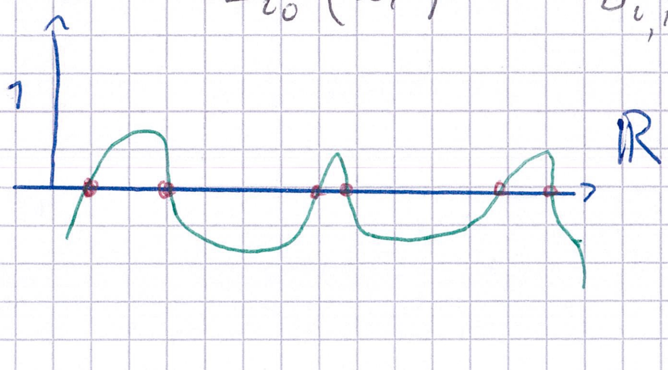
* $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

• Grande Idée

Si $i_0 \in [\![1,n]\!]$, alors (T) $L_{i_0}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \quad \text{AC} \\ 0 & \text{si } i \neq i_0 \quad \text{AC} \end{cases}$

ie $L_{i_0}(x_i) = \delta_{i,i_0}$

dn



- À l'aide des L_i, on va démontrer le thm.

- Soit $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$

Unicité

Soient $P, Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tq $\begin{cases} \forall i, P(x_i) = y_i \\ \forall i, Q(x_i) = y_i \end{cases}$

Mq $P = Q$

C'est le CRN

On pose $S = P - Q$ On a $S \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$

On a $\forall i \in [\![1,n]\!], S(x_i) = 0$

Comme les x_i sont 2 à 2 $\neq$, on a $|Z_{\mathbb{K}}(S)| \geq n$

D'après le CRN, $S = 0$ ie $P = Q$ ■ unicité

Existence

On pose $P := \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$, on a $P(x_{i_0}) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x_{i_0})$

$$\overset{\text{(!)}}{=} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} y_i \underbrace{\delta_{i,i_0}}_{=0} + y_{i_0} \underbrace{\delta_{i_0,i_0}}_{=1} = y_{i_0}$$

CCl : $\forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = y_i$ ■

V Composition

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$

1) Définition

Déf° : Le polynôme composé de P par Q, noté $P \circ Q$ est le polynôme défini par :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Si on a écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k,\ a_k \in \mathbb{K}$

Exemple :

Si $P := X^2 + X + 1$ et $Q = X - 1$

On a 1°) $P \circ Q = (X-1)^2 + (X-1) + 1$

$= X^2 - X + 1$

2°) $Q \circ P = P - 1 = X^2 + X$

Ainsi, la loi "$\circ$" n'est pas commutative

Rq*

- On a vu que si $P \in \mathbb{K}[X]$, si B est une $(+, \times, \cdot)$-structure, et si $\beta \in B$, on peut évaluer P en β
-

- On définit donc

$$\acute{e}v_\beta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow B$$
$$P \longmapsto P(\beta)$$

- C'est une application morphique.

ie ⓣ $\begin{cases} \acute{e}v_\beta(P+Q) = \acute{e}v_\beta(P) + \acute{e}v_\beta(Q) \\ \acute{e}v_\beta(PQ) = \acute{e}v_\beta(P) \times \acute{e}v_\beta(Q) \end{cases}$

- On ⓐ $\mathbb{K}[X]$ est une "$(+, \times, \cdot)$ -structure"

- Fixons $Q_0 \in \mathbb{K}[X]$: je peux considérer

$$\acute{e}v_{Q_0} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$

Si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a

$$\acute{e}v_{Q_0}(P) = \acute{e}v_{Q_0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k Q_0^k = P \circ Q_0$$

peut être noté : $P(Q_0)$

<u>Rq</u> : La notation $P(Q_0)$ $(:= P \circ Q_0)$ est ambigue et rarement utilisée.

En effet, qu'est ce que $P(X-1)$?

a) Est-ce $P \times (X-1)$?

b) Ou est-ce $P \circ (X-1)$?

Fait ⓣ : $P(X) = P$

D/ Q^d je remplace X par X dans $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

ça ne change rien.

2) Propriétés

Comme $\text{év}_{Q_0} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ est "morphique"

on a ⓣ $\text{év}_{Q_0}(P+Q) = \text{év}_{Q_0}(P) + \text{év}_{Q_0}(Q)$

ie $(P+Q) \circ Q_0 = P \circ Q_0 + Q \circ Q_0$

De même : ç $\text{év}_{Q_0}(PQ) = \text{év}_{Q_0}(P) \times \text{év}_{Q_0}(Q)$,

on a $(PQ) \circ Q_0 = (P \circ Q_0) \times (Q \circ Q_0)$

Prop ⓣ 1) $(P+Q) \circ R = P \circ R + Q \circ R$

2) $(PQ) \circ R = (P \circ R) \times (Q \circ R)$

D/ ok ∎

3) associativité

$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

Lemme ⓣ $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$

: $\mathbb{K}[X]$

composition de polynômes

composition d'applications (ch 7)

D/ • Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

• Soit $a \in \mathbb{K}$. On calcule :

$$\widetilde{P \circ Q}(a) = (P \circ Q)(a) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k\right)(a)$$

$$= \overline{ev}_a\left(\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, \overline{ev}_a(Q^k)$$

car $\overline{ev}_a(\cdot)$ est morphique

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\overline{ev}_a(Q)\right)^k$$

• et $(\widetilde{P} \circ \widetilde{Q})(a) = \widetilde{P}(\widetilde{Q}(a))$

$\widetilde{Q}(a) = Q(a)$

Or, par déf°, $\widetilde{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$

Donc $\widetilde{P}(Q(a)) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q(a)^k$

CCl : on a mq

$$\forall a \in \mathbb{K}, \quad \widetilde{P \circ Q}(a) = (\widetilde{P} \circ \widetilde{Q})(a)$$

Donc $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$

Prop° : $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$

D/ Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$

Alors on a :

idée : je passe par les f° associées

• En effet, je sais que la composition est associative

J'utilise l'injectivité de $\sim$

On a

$$\widetilde{(P\circ Q)\circ R} = \widetilde{(P\circ Q)} \circ \widetilde{R}$$

d'après le lemme

$$= \left(\widetilde{P} \circ \widetilde{Q}\right) \circ \widetilde{R}$$

car $\circ$ des app° est associatif

$$= \widetilde{P} \circ \left(\widetilde{Q} \circ \widetilde{R}\right)$$

$$= \widetilde{P} \circ \widetilde{(Q\circ R)}$$

Lemme

$$= \widetilde{P\circ(Q\circ R)}$$

ccl : $\widetilde{(P\circ Q)\circ R} = \widetilde{P\circ(Q\circ R)}$

or $\widetilde{\cdot}$ est injective donc $(P\circ Q)\circ R = P\circ(Q\circ R)$ ∎

Rq : C'est vrai dans $A[X]$

3) Degré (⚠)

Prop : (T)

$$\deg(P\circ Q) = \begin{cases} \deg P \times \deg Q & \text{si } \deg Q \geq 1 \\ 0 \text{ ou } -\infty & \text{si } \deg Q \leq 0 \end{cases}$$

D/ • ctrex :

a) (T) $P := X-1$; $Q := 1$

$P\circ Q = 0$ donc $\deg(P\circ Q) = -\infty$

$\deg(P) \times \deg(Q) = 0 \neq -\infty$

b) (T) $P := X+1$ $Q = 0$ $\deg(P\circ Q) = 0$ et $\deg(P)\times\deg(Q$

$= -\infty$

Cas g^{al} : On suppose $\deg Q \geq 1$

Lemme : $\deg(Q^k) = k \cdot \deg(Q)$

D/ $\deg(Q^k) = \deg(Q \times Q \times \dots \times Q)$

$= \deg(Q) + \deg(Q) + \dots + \deg(Q)$ ■

a) si $P = 0$: OK car on a alors $P \circ Q = 0$

donc $\deg(P \circ Q) = -\infty$

et $\deg(P) = -\infty$ et $\deg(Q) \geq 1$ donc $\deg(P) \times$

$\times \deg(Q) = -\infty$

b) Osq $P \neq 0$ On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$

avec $\forall k,\ a_k \in \mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$

On a $P \circ Q = \underbrace{a_n Q^n}_{\text{car } a_n \neq 0,\ n \deg(Q)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \underbrace{Q^k}_{k \deg(Q)}}_{\leq k \deg(Q)}$ note R

$\in \mathbb{K}_{n \deg(Q) - 1}[X]$

$\leq n \times \deg(Q) - 1$

$k < n$
$\deg(Q) > 0$
$\Downarrow$
$k \deg(Q) < n \deg(Q)$

$\in \mathbb{K}_{n \deg(Q) - 1}[X]$

On a $P \circ Q = a_n Q^n + R$

On a $\deg(a_n Q^n) \neq \deg(R)$ car $\deg(R) < \deg(a_n Q^n)$

Donc $\deg(P \circ Q) = \deg(a_n Q^n) = n \deg(Q) = \deg(P) \cdot \deg(Q)$

VI Dérivation formelle

1) Définition

- On sait dériver les fonctions (dérivable) $f : I \to \mathbb{R}$
- Mieux, on sait dériver les f° (dérivables) $f : I \to \mathbb{C}$
- La dérivation des polynomes marche partout :
  - $\mathbb{R}[X]$
  - $\mathbb{F}_2[X]$
  - $\mathbb{C}[X]$
  - $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}\,[X]$

Def : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k$, $a_k \in \mathbb{K}$

Le polynôme dérivé de P, noté P', est défini par

$$P' := \sum_{k=1}^{n} k\, a_k X^{k-1}$$

Exemples

- $(2X^2 - 8X + 2)' = 4X - 8$
- ⚠ Si vous écrivez $(4x^2)' = 8x$ c'est faux

2) Propriétés

Prop 1 : 1) a) $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$

b) $(P + Q)' = P' + Q'$

c) $(\lambda P)' = \lambda P'$

2) $(PQ)' = P'Q + PQ'$

3) $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$

D/ exo

Prop 2 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors, on a

1) $\tilde{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable

2) On a $(\tilde{P})' = \widetilde{P'}$

" ' " f° réelles   " ' " des polynômes

D/ AF

Rq : • À l'aide de Prop 2, on peut montrer Prop 1 pour $\mathbb{R}[X]$ (grâce à l'inégalité de $\tilde{\ }$)

• On peut passer de $\mathbb{R}[X]$ à $\mathbb{C}[X]$: exo

3) Degré

Prop ⚠ : $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \deg P \leq 0 \end{cases}$

D/ ok