Lycée CHATEAUBRIAND
Colas Bardavid

Chapitre 13

Calcul intégral

$$\int_a^b U(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[U(t)V(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)V(t)\,\mathrm{d}t$$

La formule d'intégration par parties

Ce chapitre est consacré à la pratique du calcul d'intégrales. On présentera plusieurs techniques, dont deux sont particulièrement importantes :

- *l'intégration par parties, dont la formule est donnée ci-dessus ;*
- *le changement de variables.*

Lycée Chateaubriand
MPSI 3

Colas Bardavid

13
Calcul intégral
plan de cours et principaux résultats

I. Intégrales et primitives

19.1
19.16

1) Primitives

a) définition
b) premiers exemples remarquables
c) primitivation et parties réelle/imaginaire
d) primitives usuelles
e) primitive de f'/f
f) les primitives diffèrent d'une constante

2) Théorème fondamental de l'analyse

a) le théorème

Théorème 13.1
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $a \in I$.
On considère

$$F : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Alors,

1) *F est une primitive de f ;*
2) *mieux, F est l'unique primitive de f s'annulant en a.*

b) un corollaire important

Corollaire 13.2
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors, f admet une primitive.

c) calcul des intégrales à l'aide de primitives
d) intégrales à bornes variables

II. Intégration par parties

19.3
19.4
19.17

1) Énoncé

2) Exemples

3) Primitive de $\ln(\cdot)$

a) une notation
b) le calcul

III. Changements de variable

19.5
19.6

1) **Énoncé**

2) **En pratique**

3) **Exemple**

IV. Calculs classiques à connaître

19.2
19.18

1) **Calcul de** $\displaystyle\int^{x} \frac{1}{at^2+bt+c}\,\mathrm{d}t$

a) cas où $\Delta > 0$
b) cas où $\Delta = 0$
c) cas où $\Delta < 0$

2) **Calcul de** $\displaystyle\int^{x} \frac{Q(t)}{at^2+bt+c}\,\mathrm{d}t$

3) **Fonctions polynomiales en** $\cos(t)$ **et** $\sin(t)$

Primitives usuelles

Expression de la fonction	Expression de la primitive	Intervalle de validité
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$; $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$)
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$ (où $\alpha \in \mathbb{C}^*$)	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$-\ln\|\cos x\|$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

Forme de la fonction	Primitive
$u' \exp(u)$	$\exp(u)$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u'f(u)$	$F(u)$ où $F' = f$
$t \longmapsto f(at+b)$	$t \longmapsto \dfrac{1}{a}F(at+b)$ où $F' = f$

Ch 13
Calcul intégral

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\ell(I) > 0$

$\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

(I) Intégrale et primitives

1) Primitives

a) Déf°

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ tq :

1) F est dérivable
2) $F' = f$

b) Premiers exemples remarquables

- Une primitive de $t \longmapsto t^n$ est $t \longmapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$

⚠ On parle de primitive pour des fonctions. Donc, on n'écrit pas "une primitive de t^n est $\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$"

À la limite, on tolèrera : une primitive de l'expression t^n est l'expression $\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$

⚠ On ne dit pas : "la dérivée de e^t est e^t"

Une primitive de $\dfrac{t^n}{n!}$ est $\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$

Mieux : Une primitive de $(t-a)^n$ est $\dfrac{(t-a)^{n+1}}{n+1}$

☺ $\dfrac{(t-a)^n}{n!}$ est $\dfrac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

- Une primitive de e^{it} est $\dfrac{e^{it}}{i}$
- Une primitive de $e^{\alpha t}$ est $\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$ si $\alpha \in \mathbb{C}^*$

- Fait : la fonction $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x^2}\end{array}$ n'admet pas de primitive pouvant s'exprimer à l'aide des "f^o usuelles"

D/ niveau M2 (prédoctorant)

c) primitivation

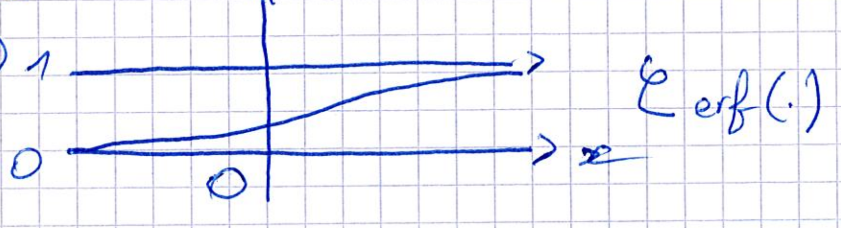
Rq : une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ est notée $erf(x)$

- On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $erf'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} > 0$

donc $erf(\cdot) \nearrow$ et $erf''(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}(-2x)\, e^{-x^2}$

Donc $erf(\cdot)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$ et convexe sur $\mathbb{R}_-$

d^n



c)^{bis} Primitivation et parties réelles / imaginaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$

Osq f est la partie réelle d'une fonction $w : I \to \mathbb{C}$

Ex : $f = \cos$ et $w : t \mapsto e^{it}$

On a $\forall t$, $Re(e^{it}) = \cos(t)$

Soit $W(\cdot)$ une primitive de $w(\cdot)$

Prop : $Re(W)$ est une primitive de f

(D/ On écrit $W = F + iG$ avec $F, G : I \to \mathbb{R}$

et $w = f + ig$ avec $g : I \to \mathbb{R}$

On a $W' = F' + iG' = w = f + ig$

règle de dérivation

W primitive de w

Ie : $F' + iG' = f + ig$

Donc $Re(F' + iG') = Re(f + ig)$

Donc $F' = f$ ■

Rq : De m̂ avec $Im(\cdot)$

Application : primitive de $\cos(at)e^{bt}$

Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$

Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto \cos(at)e^{bt}$

On passe dans $\mathbb{C}$ C'est + simple

Notons $W : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \mapsto e^{iat}e^{bt} = e^{(ia+b)t}$

Une primitive de $w(t)$ est $W : t \longmapsto \frac{e^{(ia+b)t}}{ia+b}$

Ainsi, une primitive de "$\cos(at)e^{bt}$" est "$Re\left(\frac{e^{(ia+b)t}}{ia+b}\right)$"

On a

$\boxed{!}$ Je multiplie en haut et en bas par la qtité conjuguée, ĉ pr chasser les $\sqrt{\ }$!!

Soit $t \in \mathbb{R}$, On a

$$W(t) = \frac{e^{(ia+b)t}(b-ia)}{(ia+b)(b-ia)} = \frac{be^{bt}e^{iat} - iae^{bt}e^{iat}}{a^2+b^2}$$

$\frac{be^{bt}}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$

$z\overline{z} = |z|^2$

Donc $Re(w(t)) = \frac{be^{bt}}{a^2+b^2} Re(e^{iat}) - \frac{ae^{bt}}{a^2+b^2} Re(ie^{iat})$

$Re(e^{iat}) = \cos(at)$, $Re(ie^{iat}) = \sin(at)$

$Re(\lambda z) = \lambda Re(z)$ si $\lambda \in \mathbb{R}$

Conclusion : Une primitive de "$\cos(at)e^{bt}$" est

$$\text{"}\frac{e^{bt}}{a^2+b^2}\left(b\cos(at) + a\sin(at)\right)\text{"}$$

Rq : On peut aussi procéder par double IPP

d) Primitives usuelles $\longrightarrow$ voir poly

e) Primitive de $\frac{f'}{f}$

Prop - R* : Une primitive de $\frac{f'}{f}$ est $\ln(|f|)$

On va expliquer pourquoi cette valeur absolue est faussement compliquée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$

- Pour considérer $\frac{f'}{f}$, on doit se placer sur un intervalle où f est non nulle.

- Soit $J \subset I$ un intervalle tq $\forall x \in J, f(x) \neq 0$

On a donc : $f > 0$ sur J ou $f < 0$ sur J

D/ TVI + le fait que f est continue (car dérivable)

- <u>1er cas</u> : on suppose que $f > 0$ sur J

On pose $g := \ln \circ f$. On a $g' = \ln' \circ f \times f'$

$= \frac{1}{(\cdot)} \circ f \times f' = \frac{f'}{f}$

<u>2e cas</u> : Osq $f < 0$ sur J

Je pose $g := \ln \circ (-f)$

<u>Astuce</u> : on a $-f > 0$ sur J

D'après le 1er cas, on a $g' = \frac{(-f)'}{-f} = \frac{f'}{f}$ ∎

f) Les primitives diffèrent d'une constante

<u>Fait</u> : Si F primitive de $f \Rightarrow F + C$ primitive de f

D/ ok ∎

<u>Prop</u> : Soit $f : I \to \mathbb{R}$

Soient $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitives de f

Alors : $\exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$

D/ ⚠ Il est essentiel de bosser sur un intervalle sinon c'est faux

Cntrex : Sur $\mathbb{R}^*$, on considère

$$F : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 1$$: c'est une primitive de $\tilde{0}$

On considère $G : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a $G' = \tilde{0}$ ■

On considère $\varphi := F - G$

On a $\varphi' := F' - G' = f - f = \tilde{0}$

$\hat{C}$ I intervalle, φ est cnte. On écrit $\varphi = c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Donc $F - G = \tilde{c}$ ie $F = G + \tilde{c}$ ■

Rq : c'est encore vrai dans $\mathbb{C}$

2) Théorème fondamental de l'analyse

a) Le Théorème

Th : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ C^0

Soit $a \in I$.

On considère la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Alors : 1) F est une primitive de f

2) Mieux : F est l'unique primitive de f s'annulant en a

D/ ⊕ tarol

D/ à la physiscienne

1) R^x prosopagnosique : Je veux mq $F' = f$

Je retourne à la déf° de la dérivée

2) Je regarde le taux d'accroissement ie

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

3) Je cherche $\lim_{h \to 0} \left(\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \right)$

4) Je calcule d'abord $F(x_0+h) - F(x_0)$

Coeur de la preuve

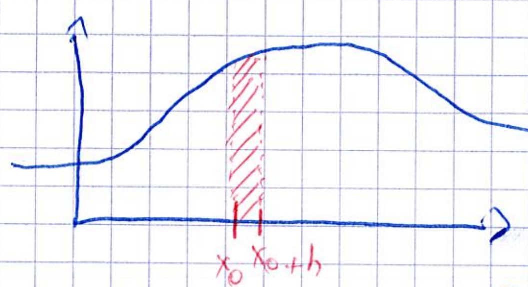
$$= \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt$$

$$= \int_{x_0}^{a} f(t)dt + \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt \underset{=}{\text{Chasles}}$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

5) À la physiscienne, on suppose que $h \approx 0$, ie $h \ll 1$

d^n



On voit bien que $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \approx f(x_0)h$

6) Ainsi, $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \simeq \frac{f(x_0)h}{h} = f(x_0)$ ∎

b) Calcul des intégrales à l'aide des primitives

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue

et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f

Soient $a, b \in I$ Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b$$

D/ Je note $G : I \to \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

On sait que G est une primitive de f, et aussi F

Fixons donc une cste $c \in \mathbb{R}$ tq $G = F + c$

Donc, en a, on a $G(a) = F(a) + c$, donc

$c = -F(a)$

Ccl : On a $\int_a^b f(t)\,dt \overset{\boxed{n}}{=} G(b) = F(b) + c$

$= F(b) - F(a)$

$= \left[F(t)\right]_a^b$

c) Intégrales à bornes variables

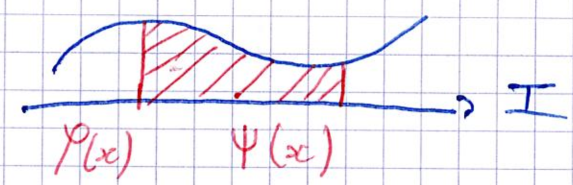
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ C^0

Soit J un intervalle, soit $\varphi, \psi : J \to I$ dérivables

Je pose $A : J \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

dⁿ



Prop (Technique facile à connaître)

1) $A(\cdot)$ est dérivable

2) Si $x \in J$, on a

$$A'(x) = A \circ \psi - A \circ \varphi$$

D/ Astuce

① R^x J'introduis une primitive F de f

② J'exprime $A(x)$ à l'aide de $F(\cdot)$

Si $x \in J$, on a $A(x) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \boxed{F(t)}_{\varphi(x)}^{\psi(x)}$

$$= F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$

ccl : $A = F \circ \psi - F \circ \varphi$

1) Donc A est dérivable en tant que composée de f° dérivables

2) Donc $A' = F' \circ \psi \times \psi' - F' \circ \varphi \times \varphi'$ ■

Ex : Dériver $\int_x^{x^2} e^{-t} dt$

II Integration par parties (IPP)

II.1) Enoncé

Th : Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

Soient $a, b \in I$

Alors :

$$\int_a^b f(t) \times g'(t)\, dt = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t)\, dt$$

$$\int_a^b \underset{g'(t)}{f(t) \times} dt = \Big[f(x) g(x) \Big]_a^b - \int_a^b \underset{f'(t)}{g(t)} dt$$

D/ On pose $\varphi_i = (fg)'$; une primitive de φ est fg. En effet, $(fg)' = \varphi$

Donc $\int_a^b \varphi(t)\, dt = [f(t)g(t)]_a^b$

or $\varphi = (fg)' = f'g + fg'$

Donc $\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$

CCl : $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt =$

oubli : Corollaire :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue
Alors f admet des primitives

Rq : encore vrai si $f : I \to \mathbb{C}$

D/ On prend $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Corollaire

La f° $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{x^2} \end{array}$ admet des primitives

II.2) Exemples

- Notons $I := \int_0^{\pi/2} t\sin(t)\,dt$

On a $I = \left[-t\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1\cos(t)\,dt$

$= 0$ car $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$= \left[\sin t\right]_0^{\pi/2} = 1$

Notons $J := \int_0^1 t^3 e^t\,dt$

17 +++ Mq Notation : On note 3 IPP successives

si $n \in \mathbb{N}$ $J_n := \int_0^1 t^n e^t dt$

On a $J_n = \int_0^1 t^n e^t dt = \left[t^n e^t\right]_0^1 - \int n t^{n-1} e^t dt$

car $n \geq 1$

$= e - n J_{n-1}$

et $J_0 = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t\right]_0^1 = e - 1$

Donc on a $J = J_3 = e - 3J_2 = e - 3(e - 2J_1)$

$= -2e + 6J_1 = -2e + 6(e - J_0) = -2e + 6(e - (e-1))$

$= -2e + 6(e - (e-1)) = -2e + 6$

II. 3) Une primitive de $\ln(\cdot)$

a) Une notation

Si $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une f°, on pourra noter $\int^x f(t) dt$ si $x \in I$. Cette expression définit une primitive de f.

b) le calcul

Soit $x > 0$, On calcule

$$\int^x \ln(t)\, dt = \int^x 1 \times \ln(t)\, dt$$

OFAA IPP

$$\underset{IPP}{=} \left[t \ln(t) \right]^x - \int^x t \frac{1}{t} dt = x\ln(x) - \int^x 1 dt$$

$$= x\ln(x) - x$$

Rq : On voit sur cet exe. qu'on peut trouver des primitives par IPP

> **Fait** : Une primitive de $\ln(\cdot)$ est $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
> $x \longmapsto x\ln(x) - x$

(AF) Trouver de m̂ une primitive de $\arctan(\cdot)$

!!∞

III Changements de Variable

III.1) Enoncé

Th : Soient I, J intervalles

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue

$\boxed{\text{Soit } \varphi : J \to I \text{ de classe } \mathcal{C}^1}$

Soient $\alpha, \beta \in J$

Alors $$\int_\alpha^\beta f((\varphi(t)))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx$$

Rq : l'hypothèse $\varphi \in \mathcal{C}^1$ est ici pour assurer que l'expression $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ soit suffisamment régulière pour être intégrée

D/ Notons $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto F \circ \varphi(t)$ où $F(\cdot)$ est une primitive de f

On a

- $$\int_\alpha^\beta g'(t)\,dt = \Big[g(t)\Big]_\alpha^\beta = g(\beta) - g(\alpha) =$$

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

- $$\int_\alpha^\beta g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

- (B) <u>Astuce</u> : $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \Big[F(x)\Big]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}$

$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

2) En pratique

On part d'une expression $\cancel{\int_a^b f(x)\,dx}$

- $$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt$$

On repère dans $g(t)$ une sous-expression $\varphi(t)$ qui nous paraît remarquable

- On dit qu'on fait le changement de variable "$x = \varphi(t)$"
- On continue en disant que "on a alors "$dx = \varphi'(t)\,dt$"
- On calcule au brouillon, si nécessaire, un retournement de cette égalité en "$dt = \frac{dx}{\varphi'(t)}$"
- Au brouillon, on transforme l'expression $g(t)\,dt$ pour n'y faire figurer que des x, qu'on note $f(x)\,dx$
- On écrit $\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = \int f(x)\,dx$
- Enfin, on se pose la question : "quand t vaut α, combien vaut x ?" On y répond

Exemple - Modèle de rédaction (M^r)

- Notons $I := \int_0^1 \frac{1}{e^t+1}\,dt$
- On fait le chgnt de variable (cdv) "$x = e^t$" pour lequel on a "$dx = e^t\,dt$"
- (B°) $\frac{1}{e^t+1}\,dt = \frac{1}{x+1}\frac{dx}{e^t} = \frac{1}{x+1}\frac{dx}{x}$

• On a alors
$$\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}\,dt = \int_1^e \frac{1}{x+1}\frac{dx}{x}$$

Or $\boxed{\text{n}}$ Astuce $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Donc $I = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx - \int_1^e \frac{1}{x+1}\,dx$

$$= \underbrace{\left[\ln(x)\right]_1^e}_{1} - \underbrace{\left[\ln(x+1)\right]_1^e}_{\ln(e+1) - \ln(2)} = 1 + \ln(2) - \ln(e+1)$$

CCl : $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\,dt = 1 + \ln(2) - \ln(1+e)$

3) Exemple

Calculons $\int_1^2 \ln(t)^2\,dt$

On fait le cdv " $x = \ln(t)$ " pour lequel on

a " $dx = \frac{dt}{t}$ " Ac i.e " $dt = e^x dx$ "

i.e $dt = e^x dx$

On a alors $I = \int_0^{\ln 2} x^2 e^x\,dx$

On note $I_n = \int_0^{\ln 2} x^n e^x\,dx$ si $n \geq 0$

Si $n \geq 1$, on a $I_n = \left[x^n e^x\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} n x^{n-1} e^x\,dx$

$= 2(\ln 2)^n - n\, I_{n-1}$ et $I_0 = \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = 2-1 = 1$

Donc on a :

$$I = I_2 = 2(\ln 2)^2 - 2 I_1$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 2(2\ln 2 - I_0)$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 4\ln(2) + 2$$

IV Calculs classiques à connaîtres

1) Calcul de $\int^x \frac{1}{at^2+bt+c}\,dt$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Osq $a \neq 0$

On pose $\Delta := b^2 - 4ac$ et $P := aX^2 + bX + c$

et $f : t \longmapsto \frac{1}{at^2+bt+c}$

a) Cas où $\Delta > 0$

On traite un exemple, on regarde $\frac{1}{t^2-3t+2}$

Méthode : On cherche les racines, on factorise, on fait une DES (décomposition en éléments simples)

- Déjà, on a $Z_{\mathbb{R}}(P) = \{1, 2\}$
- Donc $P = (X-1)(X-2)$
- DES : Je cherche $a, b \in \mathbb{R}$ (Th : ils existent toujours)

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{a}{(X-1)} + \frac{b}{(X-2)}$$

B°
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(a+b)(x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$$

On veut $a+b=0$ et $-2a-b=1$ ie $-a=1$ ie $a=-1$

donc $-b=a$

et donc $b=1$

On a $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$

(ou : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, $f(t) = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}$)

CCl : $\int^x \frac{1}{t^2-3t+2}\,dt = \int^x \frac{1}{t-2}\,dt - \int^x \frac{1}{t-1}\,dt$

$= \ln(|x-2|) - \ln(|x-1|)$

$= \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)$

Fait : Soit I un intervalle tq $\begin{cases} 1 \notin I \\ 2 \notin I \end{cases}$

$\left(\text{ie (AC) tq } \begin{array}{l} I \subset]-\infty, 1[\\ I \subset]1, 2[\\ I \subset]2, +\infty[\end{array} \right)$

Alors une primitive de f sur I est $x \longmapsto \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)$

exo Trouver la formule générale si $\Delta > 0$

b) Cas où $\Delta = 0$

Fixons donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $P = a(X-\alpha)^2$

On a alors, si $x \neq \alpha$

$$\int^x f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int^x \frac{1}{(t-\alpha)^2}\,dt = \frac{1}{a} \times \frac{-1}{(x-\alpha)} = \boxed{\frac{-1}{(x-\alpha)a}}$$

$$= \frac{-1}{a(x-\alpha)}$$

c) Cas si $\Delta < 0$

On traite l'exemple où $f(t) = \frac{1}{t^2+t+1}$

Idée : 1) forme canonique
2) cdv affines
3) arctan

On a $X^2+X+1 = \left(X+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$

$$= \left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, On calcule

⚠ Technique de la 9°

$$\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \int^x \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \underset{\text{cdv}}{=} \int^{x+\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2+\frac{3}{4}}\,d\theta$$

"$\theta = t+\frac{1}{2}$" ("$d\theta = dt$")

Lemme : $(a>0)$

Une primitive de " $\frac{1}{x^2+a^2}$ " est " $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ "

D/1 On dérive $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ AF ■

D/2 Soit $x\in\mathbb{R}$, on calcule :

$$\int^{x}\frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \int^{x}\frac{1}{a^2\left(\frac{t}{a}+1\right)}\,a\,dt$$

cdv " $u=\frac{t}{a}$ "

$dt = a\,du$

$$= \int^{\frac{x}{a}}\frac{1}{a^2(u^2+1)}\,du$$

$$= \frac{1}{a}\int^{\frac{x}{a}}\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{a}\Big[\qquad\Big]^{x/a}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad ■$$

CC1 :
$$\int^{x}\frac{1}{1+t+t^2}\,dt = \int^{x+\frac{1}{2}}\frac{1}{\theta^2+\frac{3}{4}}\,d\theta = \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\right]^{x+\frac{1}{2}}$$

CCl : une primitive de f est $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)$$

Application : Calculer $\int_0^1\frac{1}{1+t+t^2}\,dt$

Cpt : ex de cdv

On pose $I := \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$

On ~~pose~~ fait le cdv " $u = x^2$ " pour lequel

on a $du = 2x\, dx$

On a " $x = \sqrt{u}$ " donc $dx = \frac{du}{2x} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

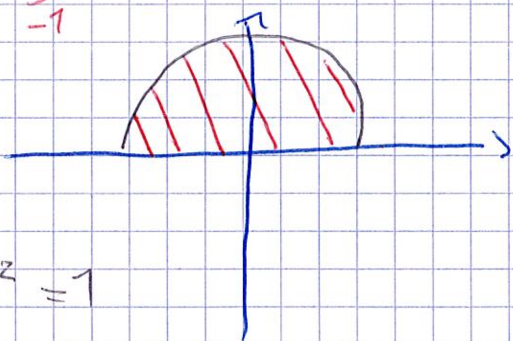
F

ccl : $I = \int_{(-1)^2}^{1^2} \frac{\sqrt{1-u}}{2\sqrt{u}} \, du$ Donc $I = 0$

C'est absurde car : $\forall x \in]-1, 1[, \sqrt{1-x^2} > 0$

donc $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx > 0$

Rq !! :



$\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2 = 1$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{trigo}$

Correction de l'erreur :

On a $I = \int_0^1 (\dots) + \int_{-1}^{0} (\dots) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u}}{2\sqrt{u}} du$

$+ \int_{(-1)^2}^{0} \frac{\sqrt{1-u}}{-2\sqrt{u}} du = 2 \cdot \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u}}{2\sqrt{u}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{u}}\, du$

Rq : Interdit d'utiliser cela car $u \mapsto \sqrt{\frac{1-u}{u}}$ n'est pas définie en 0

Sol°

On pose " $x = \sin\theta$ " ⚠ c'est un chgt de variable à l'envers

La q° finale sera à trouver

On a " $dx = \cos\theta \, d\theta$ "

inutile
On fera varier θ dans $[-\pi/2, \pi/2]$ où on a
$\cos\theta \geq 0$ donc $\cos\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$
On a donc " $dx = \sqrt{1-x^2} \, d\theta$ "

Donc $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta} \cdot \cos\theta \, d\theta$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$

$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1) \, d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$+ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi/2} 1 \, d\theta$.

Cà $\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$, on a $I = \pi/2$

" Pour quel θ, $\sin\theta$ vaut 1

Rq : On aurait pu faire le cdv : " $\theta = \arcsin x$ "
qui donne $d\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2) Calcul de $\int^x \frac{Q(t)}{at^2+bt+c} dt$

Démarche :

1) Je fait la démarche de Q par P

2) J'obtiens une nouvelle intégrale

$$\int^x \frac{\alpha t + \beta}{at^2+bt+c}$$

3) OFHA " $2at+b$ "

(car $\int^x \frac{2at+b}{at^2+bt+c} dt = \ln(|ax^2+bx+c|)$)

4) Il reste $\int^x \frac{\gamma}{at^2+bt+c} dt$

cf 1)

Exemple : On cherche une primitive de

Soit $t \longmapsto \frac{t^3}{1+t+t^2}$

1) X ·

1)

$$\begin{array}{r|l} X^3 & X^2+X+1 \\ \hline -X^3-X^2-X & X-1 \\ -X^2-X & \\ +X^2+X+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

ie $X^3 = (X^2+X+1)(X-1)+1$

2) Donc, Soit $x \in \mathbb{R}$, On a

$$\int^x \frac{t^3}{x^2+x+1}\,dt = \int^x t-1\,dt + \int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - t\right] = \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)$$

3) Fonction polynomiales en cos et en sin

Ex : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\int^x \sin(t)^3 + 2\cos(t)\sin(t)\,dt$$

R^x On linéarise

AF