Chapitre 14

Nombres réels

$$\left]-\infty, +\infty\right[$$

La droite réelle, notée $\mathbb{R}$, est aussi égale à $]-\infty, +\infty[$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Il s'agit d'un des objets les plus importants des mathématiques.

C'est l'ensemble de toutes les positions possibles d'un point sur une droite. C'est avec $\mathbb{R}$ qu'on modélise le temps et l'espace. Toutes les grandeurs que l'on mesure en physique sont également des nombres réels.

On sait additionner, soustraire, multiplier et diviser (sauf par 0) des nombres réels entre eux. On sait ordonner deux nombres réels entre eux, dire quel est le plus grand les deux. On sait aussi dire quelle est la distance entre deux nombres réels x et y : il s'agit simplement de $|x-y|$. Ces différentes opérations font de $\mathbb{R}$ un objet mathématique très riche.

On étudiera dans ce chapitre plusieurs concepts relatifs à $\mathbb{R}$: densité, bornes supérieure et inférieure, partie entière et parties convexes.

Colas Bardavid

14
Nombres réels

plan de cours et principaux résultats

I. Notion de proximité

1) Définition

2) Propriétés

3) Deux points infiniment proches sont égaux

Fait 14.1 Ⓣ
On a

$$\left(\forall \varepsilon > 0,\ |x-y| \leqslant \varepsilon\right) \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

4) Proximité dans un intervalle

Fait 14.2 Ⓣ
On a

$$x, y \in I \quad \Longrightarrow \quad |x-y| \leqslant \ell(I).$$

II. Maxima et minima

1) Majorants et minorants

a) définitions
b) exemples
c) parties bornées

2) Maxima et minima

a) définition
b) exemples

3) Théorèmes d'existence

a) cas fini

Théorème 14.3 Ⓣ

$$A \text{ fini non vide} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A \text{ admet un maximum} \\ A \text{ admet un minimum.} \end{cases}$$

b) cas de $\mathbb{N}$

Théorème 14.4
Soit $A \subset \mathbb{N}$ non vide. Alors,

$$A \text{ admet un minimum.}$$

c) cas de $\mathbb{Z}$

Théorème 14.5
Soit $A \subset \mathbb{Z}$ non vide. Alors,

1) *A minorée $\Longrightarrow$ A admet un minimum*
2) *A majorée $\Longrightarrow$ A admet un maximum*

4) Insuffisance du minimum et du maximum

III. Bornes supérieures et inférieures

20.24
20.23
20.40

1) Définitions

Définition 14.6 Ⓣ

1) *On dit que A* admet une borne supérieure $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\mathsf{Majo}(A)$ *possède un plus petit élément.*
2) *On note alors* $\sup(A)$ *le plus petit des majorants de A.*

2) Premières propriétés

3) Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Théorème 14.7
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

4) Adhérence de la borne supérieure

a) énoncé

Proposition 14.8
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_0 \in A : \ \sup A - \varepsilon < a_0 \leqslant \sup A.$$

b) application

5) Cas des familles

a) définition
b) il est facile de montrer qu'un $\sup(\cdot)$ est $\leqslant$

Proposition-Réflexe 14.9 Ⓣ
On a

$$\sup_{i \in I} a_i \leqslant C \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I, \ a_i \leqslant C.$$

c) croissance de $\sup(\cdot)$ et $\inf(\cdot)$

6) Cas des fonctions

IV. Partie entière

20.29
20.32
20.35

1) Définition

Définition 14.10 Ⓣ
La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x$.

2) Caractérisation

Proposition 14.11 Ⓣ
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \textit{et} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

3) Propriétés

4) Graphe

5) Partie fractionnaire

V. Densité

20.41

1) Définition

Définition 14.12 Ⓣ
Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : |a - x| \leqslant \varepsilon.$$

2) Une caractérisation

Proposition 14.13
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *A est dense dans $\mathbb{R}$*
(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies \exists a \in A : x \leqslant a \leqslant y$
(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies \exists a \in A : x < a < y$

3) Nombres décimaux

a) définition
b) approximation décimales
c) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$

4) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

5) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

VI. Parties convexes de $\mathbb{R}$

1) Définition

2) Classification des convexes de $\mathbb{R}$

Chapitre 14
$\mathbb{R}$, nombres réels

I Proximité

1) Définition

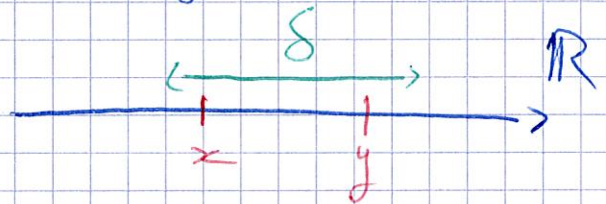
Déf : Soit $\delta \geq 0$ Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

On dit que x et y sont δ proches

$\underset{\text{ssi}}{\Leftrightarrow}$ $|x-y| \leq \delta$

Rappel : $|x-y|$ est la distance entre x et y

d^n



Prop - $(R^x)^\infty$: T

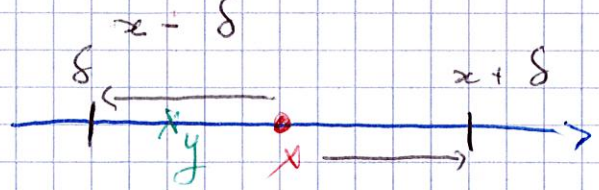
Sont équivalentes :

(i) $|x-y| \leq \delta$

(ii) $y - \delta \leq x \leq y + \delta$

(iii) $x - \delta \leq y \leq \cancel{x} + \delta$

d^n



D/ (i) ⇒ (ii) : Osq $|x-y| \leq \delta$

- On a $x - y \leq |x-y|$ car $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq |\alpha|$

donc $x - y \leq \delta$ donc $x \leq y + \delta$

- De plus $-(x-y) \leq |x-y|$ car $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $-\alpha \leq |-\alpha| = \alpha$

Donc $-x + y \leq \delta$ donc $x \geq y - \delta$

Rq : ① et ② donnent $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

(ii) ⇒ (iii) : Osq $y - \delta \overset{a}{\leq} x \overset{b}{\leq} y + \delta$

Ⓣ a $\longrightarrow$ $y - \delta \leq x$ $\longrightarrow$ $y \leq x + \delta$

b $\longrightarrow$ $x \leq y + \delta$ $\longrightarrow$ $y \geq x - \delta$

$\longrightarrow$ $x - \delta \leq y \leq x + \delta$

(iii) ⇒ (i) : Osq $x - \delta \leq y \leq x + \delta$

On a $-\delta \overset{c}{\leq} y - x \overset{d}{\leq} \delta$

Donc, deux cas : si $y - x \geq 0$, j'ai $|y-x| = y - x$

Donc, ⓓ donne $|y-x| \leq \delta$ ie $|x-y| \leq \delta$

2^e cas : Ⓣ $y - x \leq 0$, j'ai $|y-x| = x - y$

Ex : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|x-5| \le 2 \iff 5-2 \le x \le 5+2$$

pivot 5

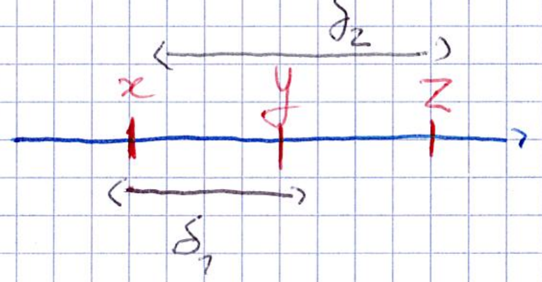
2) Propriétés

Fait : Soit $\delta \ge 0$. Alors la relation « est δ-proche

- est symétrique
- n'est pas transitive (sauf si $\delta = 0$)
- est reflexive

Fait ① : x est δ_1-proche de y, y est δ_2-proche de z $\Big\} \Rightarrow x$ est $(\delta_1+\delta_2)$-proche de z

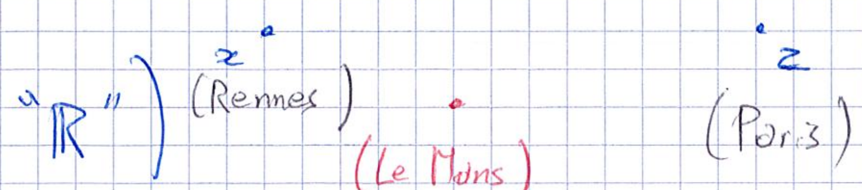
d^n



D/ 1) OFAA
2) Ineg. Triang.

(T) $|x-z| = |(x-y)+(y-z)| \le |x-y| + |y-z|$

Schema



3) Deux p^ts ∞^nt proches sont égaux

Lemme : Soit $a \in \mathbb{R}$ tq :

$$\forall \varepsilon > 0, \ |a| \leq \varepsilon$$

Alors $a = 0$

D/ ORPA ; Osq $a \neq 0$, on a $|a| > 0$

On pose $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$ On a $\varepsilon > 0$ Donc $|a| \leq \varepsilon$

(...) Donc $1 \geq 2$ Abs ∎

Prop : Soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\forall \delta > 0, \ x \text{ est } \delta\text{-proche de } y) \Rightarrow x = y$$

D/ ok ∎

4) Proximité dans un intervalle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$

Prop ① : $x, y \in [a, b] \Rightarrow x, y$ sont $(b-a)$ proches

D/ ① $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ donc $b - a \leq -y \leq -a$

donc $\boxed{-(b-a) \leq x - y \leq b - a}$ $R^\times$

Donc $R^\times$ $|x - y| \leq b - a$

Ie x et y sont $(b-a)$- proches

Reformulation

Soit I un intervalle

Alors ⊕ $x, y \in I \Rightarrow x$ et y sont $\ell(I)$-proches

ie $|x-y| \leq \ell(I)$

Rq : Si I ne contient pas une de ses bornes (ex : $I =]0,1[$) Alors :

$$|x-y| < \ell(I)$$

VI Maxima et Minima

On fixe $A \subset \mathbb{R}$

1) Majorants et Minorants

a) définitions

Def^{o} : Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M majore A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall a \in A, \ a \leq M$$

- On note Majo(A) l'ensemble des majorants de A
- On dit que A est majorée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ Majo$(A) \neq \emptyset$

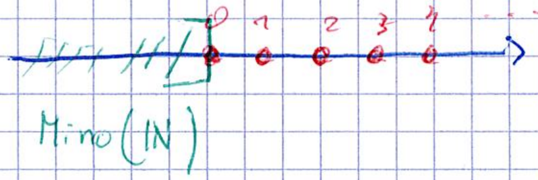
De même, on definit mino(A), etc ...

b) Exemples

- $\text{Majo}([0,1]) =]1,+\infty[\cup \{1\}$
- $\text{Mino}([0,1]) = \mathbb{R}_-$

d^1

- $\text{Majo}(\mathbb{N}) = \emptyset$



- $\text{Mino}(\mathbb{N}) = \mathbb{R}_-$
- $\text{Majo}(\emptyset) = \mathbb{R}$

D/ Soit $M \in \mathbb{R}$, on a $\forall a \in \emptyset,\ a \leq M$

en effet, c'est une assertion universellement quantifiée sur le vide.

$$\boxed{\text{Fait : } \text{Majo}([0,1[) = [1,+\infty[}$$

D/ Mq $[1,+\infty[\subset \text{Majo}([0,1[)$

Soit $M \geq 1$, mq $M \in \text{Majo}([0,1[$

ie Mq M majore $[0,1[$

Soit $x \in [0,1[$

On a $x<1$ donc $x \leq 1$

donc, on a bien M majore $[0,1[$

Mq $\text{Majo}([0,1[) \subset [1,+\infty[$

Soit $M \in \text{Majo}([0,1[)$ ie soit M un majorant de $[0,1[$

Mq $M \geq 1$

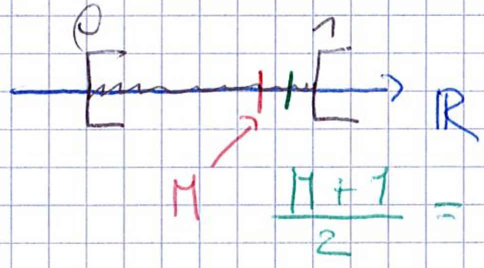
• Déjà, $M \geq 0$

en effet, $0 \in [0,1[$ et M majore $([0,1[)$

• ORPA et Osq $M < 1$

Donc on a $M \in [0,1[$

d^n



On pose $x_0 = \frac{M+1}{2}$, c'est le milieu de $[M,1]$

On a $x_0 \in [0,1[$

D/ On a $M \geq 0$ donc $M+1 \geq 1$

donc $\frac{M+1}{2} \geq \frac{1}{2}$ donc $x_0 \geq 0$

et on a $M < 1$ car $M < 1$ (hypothèse absu

Donc $M+1 < 2$ donc $\frac{M+1}{2} < 1$

donc $x_0 \in [0,1[$ ■

et $x_0 > M$

D/ $x_0 = \frac{M+1}{2}$

or $\frac{M}{2} < \frac{1}{2}$

donc $M < \frac{M}{2} + \frac{1}{2} = \frac{M+1}{2}$

C'est absurde car 1°) M majore $[0,1[$

2°) $x_0 \in [0,1[$ donc $M \geq x_0$

3°) On a mq $x_0 > M$

<u>CCl</u> : $\mathrm{Majo}([0,1[) = [1, +\infty[$

c) parties bornées

<u>Défⁿ</u> : On dit que <u>A est bornée</u> $\underset{ssi}{\Delta}$ $\begin{cases} A \text{ majorée} \\ A \text{ minorée} \end{cases}$

(ie $\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A, m \leq a \leq M$

<u>Proposition</u> !!

A bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall a \in A, |a| \leq M$

<u>D/</u> $\Leftarrow$ Osq $\exists m \geq 0 : \forall a \in A, |a| \leq m$

On fixe un tel m

On a $\forall a \in A, -m \leq a \leq m$

donc $m \in \mathrm{Majo}(A)$ et $-m \in \mathrm{Mino}(A)$

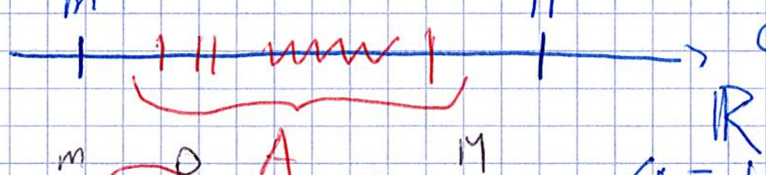
$\Rightarrow$ Osq A est bornée

Fixons donc $m, M \in \mathbb{R}$ tq $\forall a \in A, m \leq a \leq M$

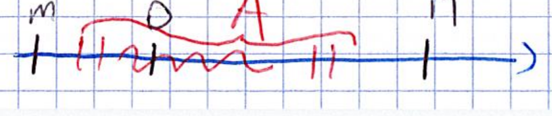
~~Osq $|M| \leq |m|$~~

~~On a~~

dⁿ



Je pose $C := -m$



$C :=$ le + loin de 0

ie $\mathrm{Max}(|m|, |M|)$

Posons $C := \max(|m|, |M|)$

Soit $a \in A$

On a $a \leq M \leq |M| \leq \max(|M|,|m|) = C$

Et, on a, $a \geq m \geq -|m| \geq - \max(|m|, |M|) = -C$

car $|m| \leq \max(|m|,|M|)$

CCl : On a

$\forall a \in A, -C \leq a \leq C$

Donc $\forall a \in A, \ |a| \leq C$

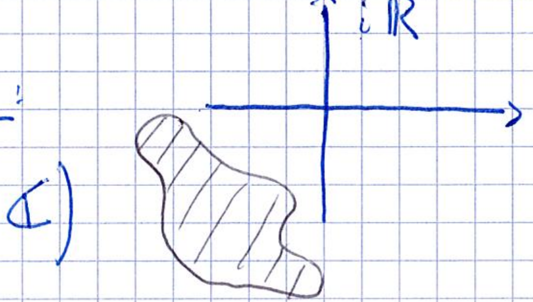
Donc $\exists C \geq 0 : \forall a \in A, |a| \leq C$ ■

<u>Rq :</u> Cette reformulation nous permet de définir les parties bornées de $\mathbb{C}$

Si $A \subset \mathbb{C}$, on dit que A est bornée $\overset{\Delta}{ssi}$

$\exists M \geq 0 : \forall z \in A, |z| \leq M$

<u>Ex :</u>



2) Maxima et Minima

<u>Prop° - Def° :</u> On dit que A possède un maximum ou que A possède un plus grand élément $\overset{\Delta}{ssi}$ $\exists a_0 \in A : \forall a \in A, a_0 \geq a$

- Dans ce cas, l'élément a_0 est unique et est appelé maximum de A
- Il est noté $\max(A)$

D/ Fixons $a_0, a_1 \in A$ tq $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq a_0 & (*) \\ \forall a \in A, a \leq a_1 & (**) \end{cases}$

Ĉ $a_1 \in A$, d'après $(*)$, on a $a_1 \leq a_0$

De même, $a_0 \leq a_1$

Par anti-symetrie $a_0 = a_1$ ■

Rq* :
- Cette définition reste encore valable dans un ensemble ordonné qcq $(E, \leq)$
- En g^{al}, si $(E, \leq)$ est un ensemble, on a une autre notion

Def^{o} : Soit $a_0 \in E$. On dit que a_0 est un élément maximal de $(E, \leq)$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in E$, $x \geq a_0 \Rightarrow x = a_0$

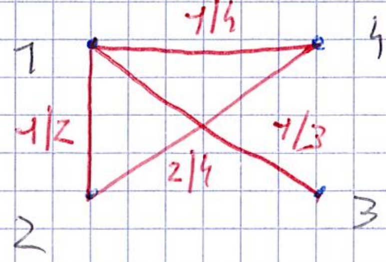
- Fait ⊕ : a_0 ⊕ g^{d} élément de $(E, \leq) \Rightarrow a_0$ est le seul él^{t} maximal de $(E, \leq)$

D/ exo ■

Prop : $(E, \leq)$ total^{nt} ordonné $\Rightarrow$ (a_0 élé^{nt} maximal $\Rightarrow a_0 =$ max E de $(E, \leq)$)

• On se place dans $(\{1,2,3,4\}, |)$

d^n



3 est un élément maximal
(4 aussi)
Il n'y a pas de $+$ grand élément. Mais 1 est le $-$ petit élément

• $\mathcal{P}(E)$, $\subset$ $\quad$ $\emptyset$ est le $-$ petit élᵗ
$\quad$ E ——— gd ———

• $(\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}, \subset)$: les élément minimaux de cet ensemble sont les singletons.

b) Exemples

• $[-2, 0]$ admet un $+$ grand élément : c'est 0
Ie on a $\max([-2,0]) = 0$

• Fait : $[0,1[$ n'admet pas de $+$ grd élément
D/ ORPA et on note $a_0 = \max([0,1[)$
On a donc 1) $a_0 \in [0,1[$

$\forall a \in [0,1[\quad a_0 \geq a$, ie $a_0 \in \mathrm{Majo}([0,1[)$

or, $\text{Majo}([0,1[) = [1,+\infty[$

Ainsi, on a 1) $a_0 \in [0,1[$

2) $a_0 \geq 1$ Abs

• $\mathbb{N}$ n'admet pas de + g^d élément
(En effet, $\text{Majo}(\mathbb{N}) = \emptyset$)

3) Théorème d'existence

a) Cas fini

Th : A fini non vide $\Rightarrow$ A admet un + grand él^{nt}

D/ rec sur $|A|$

1er cas : Osq $|A| = 1$. Alors on peut écrire

$A = \{a_0\}$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$

On a alors $a_0 = \max A$

• Hérédité : Soit $n \geq 1$. Osq thm est prouvé pour les ensembles de cardinal n.

Soit A un ens fini de cardinal $n+1$.

R* On écrit $A = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ avec

$\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $x_i \in \mathbb{R}$

On distingue 2 cas :

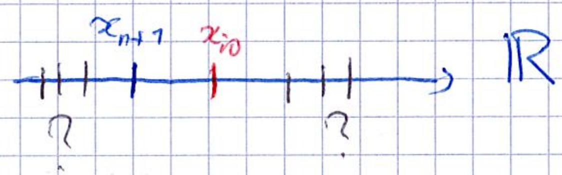
<u>1^{er} cas :</u> Osq $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \leq x_{n+1}$

alors, on a bien $x_{n+1} = \max(A)$

<u>2^e cas :</u> Osq $\exists\, i_0 \in [\![1, n]\!]$: $x_{i_0} > x_{n+1}$

On fixe un tel élément x_{i_0}

d^n



Posons $B := \{x_1, \dots, x_n\}$ On a $x_{i_0} \in B$

On a $|B| = n$ Donc B admet un + gd él^{nt}.

Fixons donc $i_1 \in [\![1, n]\!]$ tq $x_{i_1} = \max(B)$

ie tq $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x_j \leq x_{i_1}$

Alors, on a $x_{i_1} = \max(A)$. En effet, déjà,

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x_j \leq x_{i_1}$

Donc $x_{i_1} \geq x_{i_0}$

Or $x_{i_0} \geq x_{n+1}$

Donc $x_{i_1} \geq x_{n+1}$

<u>CCl :</u> $\forall j \in [\![1, n+1]\!]$, $x_{i_1} \geq x_j$

ie $x_{i_1} = \max(B)$ ■

<u>Rq :</u> De m̂ pour le $\min(\cdot)$

b) Cas de $\mathbb{N}$!!

Thm : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum

D/ cf c) ☒

c) Cas de $\mathbb{Z}$

Thm : Soit $A \subset \mathbb{Z}$ non vide ; Alors :

A minorée $\Longrightarrow$ A admet un minimum

A majorée $\Longrightarrow$ A admet un maximum

D/ cf ⊕ loin

4) Insuffisance de min(·) et max(·)

On a envie de dire que par $[0,1[$, 1 joue un rôle de "⊕ grand élément".

Mais, 1 n'est pas le ⊕ gd élément de $[0,1[$

VI bornes supérieures et inferieures

Soit $A \subset \mathbb{R}$

1) Définitions

Déf : On dit que A possède une borne supérieure $\overset{\Delta}{ssi}$ Majo(A) possède un plus petit élément.

On le note alors Sup(A)

· On dit alors que A possède une borne inférieure $\overset{\Delta}{ssi}$

Mino(A) possède un plus grand élément qu'on note alors inf(A)

Rq : Sup(A) (s'il existe) est donc le + petit majorant de A, ie " le majorant optimal de A"

Exemples

- $[0,1[$ ne possède pas de + gd élément
- On a $\text{Majo}([0,1[) = [1,+\infty[$
- Et, $[1,+\infty[$ admet un + petit élt, qui est 1
- Bilan : $[0,1[$ admet une borne supérieure et on a

$$\sup([0,1[) = 1$$

• **Rq** : $\boxed{\sup([0,1[) \notin [0,1[}$

• **Rq** : $\sup([0,1]) = 1$ et on a $\sup([0,1]) \in [0,1]$

Rq ⚠ : $]0,1[$ n'est pas fini, il est infini

D'ailleurs, $]0,1[\approx \mathbb{R}$

En revanche, il est de longueur finie

• $[0,1[\cap \mathbb{Q}$ admet une borne supérieure et on a

$$\sup\left([0,1[\cap \mathbb{Q}\right) = 1$$

D/ Exo

2) Premières propriétés

Prop : 1) A admet un $\oplus$ gd él^{nt} $\Rightarrow \begin{cases} A \text{ admet une borne sup.} \\ \sup(A) = \max(A) \end{cases}$

2) $\begin{cases} A \text{ admet une borne sup} \\ \sup(A) \in A \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A \text{ admet un } \oplus \text{ gd el}^{nt} \\ \max(A) = \sup(A) \end{cases}$

D/ 1) Osq A admet un + gd él^{nt}. On note
$a_0 = \max(A)$

Mq A admet une borne sup
ie Majo (A) admet un + petit él^{nt}
ici, mieux, mq a_0 est le + petit ~~é~~élément de Majo (A), $M \geq$

ie Mq : $\forall M \in Majo(A)$, $M \geq a_0$

Soit $M \in Majo(A)$. Ĉ $a_0 \in A$, on a $M \geq a_0$

Or $a_0 \in Majo(A)$

2) ~~Mq~~ Osq A admet une borne sup ; on note

$s := \sup(A)$

Osq $s \in A$

- D'une part, $s \in Majo(A)$: en effet s étant le + él^{nt} de Majo (A), on a $s \in Majo(A$
- D'autre part : $s \in A$

Donc $s = \max(A)$ ■

Fait : Si A admet une borne sup, alors :

$\sup(A) \in Majo(A)$

D/ ok

9

Ex : $\mathbb{R}$ n'admet pas de borne sup ; $\mathbb{N}$ non plus, $\mathbb{Z}$ non plus, $\mathbb{Q}$ non plus, $\mathbb{R}_+$ non plus, $[12; +\infty[$ de même.

(D/ Pour toutes ces parties, on a $\text{Majo}(\cdot) = \emptyset$)

Prop : Soit $A \subset \mathbb{R}$ admettant une borne supérieure. Alors

1) A majorée

2) $A \neq \emptyset$

D/ 1) ok

2) AC Il suffit de montrer que $\emptyset$ n'admet pas de borne supérieure

On a $\text{Majo}(\emptyset) = \mathbb{R}$ et $\text{Mino}(\text{Majo}(\mathbb{R})) = \emptyset$

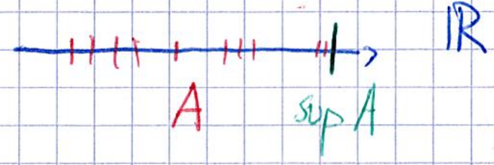
Donc, $\text{Majo}(\emptyset)$ ne possède pas de + petit él^{nt} ■

3) Propriété f^{ale} de $\mathbb{R}$

Thm ♛ :

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

d^n



D/ Elle découle de la définition de $\mathbb{R}$ qui est H.P.

On pourra considérer que c'est un axiome de $\mathbb{R}$ ■

Rq* : La borne sup peut être définie de m̂ dans n'importe quel ensemble ordonné

Ex* : • Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$

Soient $A, B \subset E$

On considère $\mathcal{A} := \{A, B\} \subset \mathcal{P}(E)$

$$\mathrm{Majo}(\mathcal{A}) = \left\{ X \in \mathcal{P}(E) \;\middle|\; \begin{cases} A \subset X \\ B \subset X \end{cases} \right\}$$

A-t-on que $\mathrm{Majo}(\mathcal{A})$ possède un ⊕ petit él^{nt} pour l'inclusion ?

Oui ! : C'est $A \cup B$

Bilan : $\sup_{\subset}(\{A, B\}) = A \cup B$

De m̂ : $\inf_{\subset}(\{A, B\}) = A \cap B$

• Plaçons-nous dans $(\mathbb{N}, |)$

On considère $A = \{12, 21\}$

Alors, on a $\text{Mino}_{\text{"|"}}(A) = \left\{ d \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{cases} d \mid 12 \\ d \mid 21 \end{cases} \right\}$

Et : $\text{Mino}_{\text{"|"}}(A)$ possède un + gd él^{nt} :

c'est le PGCD

Application très étonnante *

Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\alpha^2 = 2$

D/ Je considère $A := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 2 \}$

1) Mq $A \neq \emptyset$

2) Mq A est majoré (par qui ?)

3) On pose $\alpha := \sup A$

a) mq $\alpha^2 \leqslant 2$ (ie mq $\alpha \in A$)

b) mq $\alpha^2 \geqslant 2$

CCl : $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha^2 = 2$

4) Rq : Mieux, on a $\exists ! \alpha \geqslant 0 : \alpha^2 = 2$

On note $\sqrt{2}$ cet élé^{nt} ■

Rq* : Un corps ordonné est un couple $(K, \leq)$ où K est un corps où $\leq$ est une relation d'ordre totale tq :

$$\left.\begin{matrix} a \leq b \\ c \leq d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

$$\left.\begin{matrix} a \leq b \\ \lambda \geq 0_K \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda a \leq \lambda b$$

Fait : $\nexists \leq$ tq $(\mathbb{C}, \leq)$ corps ordonné

Thm : Soit $(K, \leq)$ un corps ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure (ie,

$$\left.\begin{matrix} X \subset K \\ X \neq \emptyset \\ X \text{ majorée} \end{matrix}\right\} \Rightarrow X \text{ admet une borne superieure}\Bigg)$$

Alors : $K \simeq \mathbb{R}$

exo Mq $(\mathbb{Q}, \leq)$ ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure

b) Adhérence de la borne supérieure

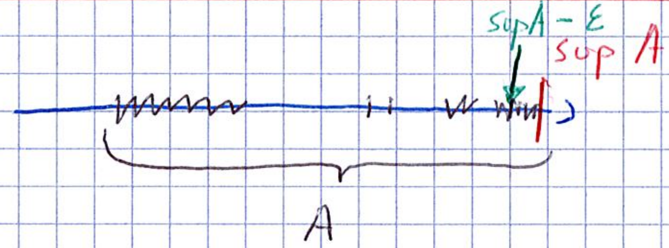
Idée : ⚠ En g^{al} $\sup(A) \notin A$

Néanmoins, on va montrer "$\sup(A)$ est collé à A"

a) Enoncé

> **Prop** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide, majorée. Alors :
>
> $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : \sup A - \varepsilon < a_0 \leq \sup A$

d^n



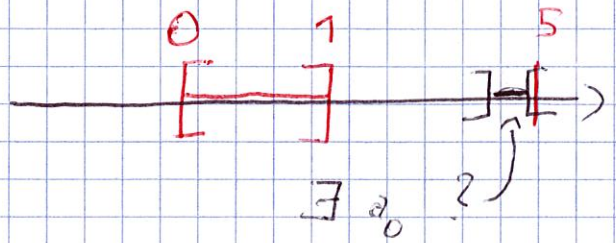
⚠ L'inégalité de droite n'est pas stricte en général.

Ctrex : On prend $A = [0,1] \cup \{5\}$

On a $\sup A = 5$

Mais $\exists\, a_0 \in A : 5 - 10^{-9} < a_0 < 5$

d^n



D/ Soit $\varepsilon > 0$

On a $\sup A - \varepsilon < \sup A$

Or $\sup A$ est le + petit des majorants de A

Donc AC $\boxed{\sup A - \varepsilon \text{ ne majore pas } A}$

Donc on a non $\left(\forall a \in A, \quad a \leq \sup A - \varepsilon\right)$

Donc $\exists\, a_0 \in A : a_0 > \sup A - \varepsilon$

Fixons un tel a_0

Comme $\sup A$ majore A, on a également

$a_0 \leq \sup A$

Bilan : On a $\sup A - \varepsilon < a_0 \leq \sup A$ ■

Rq : Si $\sup A \notin$ Alors on a :

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, a_0 \in A : \sup A - \varepsilon < a_0 < \sup A$

D/ AC Exo ■

Rq : Dualement, on a si $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, a_0 \in A : \inf A \leq a_0 < \inf A + \varepsilon$

exo   Soit A bornée non vide, Notons $B := \{-a \,;\, a \in A\}$

$$\inf A = -\sup B$$

b) Application

<u>Lemme</u> : Soit $A \subset \mathbb{Z}$, non vide, majorée. Alors

$$\sup A \in A$$

<u>D/</u> • Déjà, $\sup A$ existe.

• On prend $\varepsilon := \frac{1}{2}$

• Donc, comme "$\sup A$ est adhérent à A", fixons $a_0 \in A$

• ORPA et Osq $\sup A \notin A$

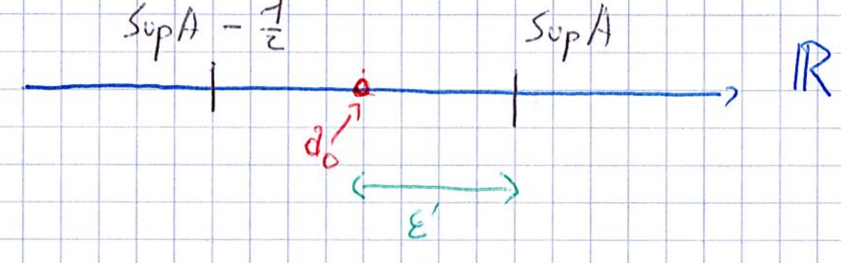
• Posons $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ĉ $\sup A$ est adhérent à A.

(ou : par caractérisation "à la ε" de $\sup A$)

Fixons $a_0 \in A$ tq $a_0 < \sup A$ et $a_0 > \sup A - \frac{1}{2}$

ie $\sup A - \frac{1}{2} < a_0 < \sup A$

dn



On pose $\varepsilon' := \sup A - a_0$. On a $\varepsilon' > 0$.

D'après la caractérisation "à la ε" de $\sup A$,

fixons $a_1 \in A$ tq $\sup A - \varepsilon' < a_1 < \sup A$

Or evidement, on a $\sup A - \varepsilon' = a_0$

Bilan, on a $\sup A - \varepsilon < a_0 < a_1 \leqslant \sup A$

Donc, $a_0, a_1 \in \left] \sup A - \frac{1}{2} ; \sup A \right[$

Donc (d'après la propriété de proximité dans les intervalles):

$$|a_0 - a_1| < P\left(\left] \sup A - \frac{1}{2} ; \sup A \right[\right) = \frac{1}{2}$$

Lemme ⓣ : $\left.\begin{array}{l} |a_0 - a_1| \leqslant \delta \\ \delta < 1 \\ a_0, a_1 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow a_0 = a_1$

D/ $\hat{c}$ $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$, on a $|a_0 - a_1| \in \mathbb{N}$

notons $n := |a_0 - a_1|$

on a $0 \leqslant n < 1$ Donc $n = 0$ ie $a_0 = a_1$ ■

$\hat{C}$ $A \subset \mathbb{Z}$, on a $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$

Donc $a_0 = a_1$ d'après le lemme

13 Comme $a_0 < a_1$, c'est absurde ■

Applications :

1) Soit $A \subset \mathbb{Z}$, non vide, majoré

$\hat{C}$ $\sup A \in A$, A admet un maximum, qui est $\sup A$.

2) Soit $B \subset \mathbb{Z}$, non vide, majoré

De $\hat{m}$, on a $\inf B \in B$ donc B admet un minimum.

3) Soit $C \subset \mathbb{N}$ non vide.

Alors, C minoré (par 0) et $C \subset \mathbb{Z}$

Donc C admet un plus petit élément.

5) Cas des familles

Soit I un ensemble non vide

Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$

On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est majorée, minorée, etc

$\underset{ssi}{\Delta}$ $\exists M \in \mathbb{R} : \forall i \in I,\ a_i \leq M$, ...

On peut aussi définir $\sup\limits_{i \in I} a_i$ et $\inf\limits_{i \in I} a_i$

(p. ex : $\sup\limits_{i \in I} a_i$ est le plus petit majorant de $(a_i)_{i \in I}$

Rq : On a $\sup_{i \in I} a_i = \sup(\{a_i ; i \in I\})$

Ex : $\begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = 1 = \max_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \\ \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$; elle n'est pas atteinte

Prop : $(a_i)_{i \in I}$ majorée $\Rightarrow \sup_{i \in I} a_i$ existe

Prop : Soient $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ bornées

tq $\forall i \in I, a_i \leq b_i$. Alors :

1) $\inf_{i \in I} a_i \leq \inf_{i \in I} b_i$

2) $\sup_{i \in I} a_i \leq \sup_{i \in I} b_i$

D/ (R*) Paradoxalement, ~~une~~ Il est aisé de mq une borne supérieure est + petite que qqch.

Notons $C := \sup_{i \in I} b_i$ Mq $\sup_{i \in I} a_i \leq C$

Idée : pour mq $\sup_{i \in I} a_i \leq C$, il suffit de montrer que C majore la famille des $(a_i)_{i \in I}$

Proposition ($\mathbb{R}^\times$) : Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille majorée. Soit $C \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sup_{i\in I} a_i \leq C \iff \forall i \in I,\ a_i \leq C$$

D/ Prop-$R^\times$

$\Rightarrow$ Osq $\sup_{i\in I} a_i \leq C$

Or $\sup_{i\in I} a_i$ majore la famille $(a_i)_{i\in I}$ ie

$\forall j \in I,\ a_j \leq \sup_{i\in I}(a_i)$

Ĉ $\sup_{i\in I} a_i \leq C$, on obtient que $\forall j \in I,\ a_j \leq C$

$\Leftarrow$ Osq $\forall i \in I,\ a_i \leq C$

Donc C majore $(a_i)_{i\in I}$. Or $\sup_{i\in I} a_i$ est le + petit des majorants de $(a_i)_{i\in I}$

Donc $\sup_{i\in I} a_i \leq C$

∎

Retour à la démo

On veut mq $\sup_{i \in I} a_i \leq C$ $\quad$ $(C = \sup_{i \in I} b_i)$

Mq $\forall i \in I$, $a_i \leq C$

Soit $i \in I$

Ĉ $C = \sup_{j \in I} b_j$, on a $b_i \leq C$. Ĉ $a_i \leq b_i$, on a

$a_i \leq C$ ∎

6) Cas des fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ majorée, no

Alors, on peut définir $\sup_{t \in I} f(t)$ noté également

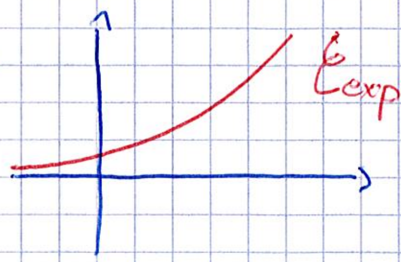
$\sup(f)$

$$\sup_{t \in I} f(t) := \sup(\{f(t) ; t \in I\})$$
$$= \sup f[I]$$

De m̂ : $\inf(f)$ ou $\inf_{t \in I} f(t)$ si f est minorée.

Ex : • Déjà, exp est minorée

On a $\inf(\exp) = 0$



• Notons $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \frac{1}{t}$

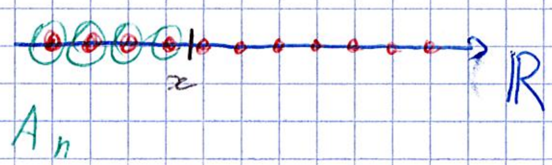
Alors $\inf(f) = 0$; il n'est pas atteint

IV Partie entière

1) Définition

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $A_x : \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$

d^n



Lemme : 1) A_x est majoré

2) $A_x \subset \mathbb{Z}$

3) $A_x \neq \emptyset$

D/ 1) On a $\forall x \in A_x$, $n \leq x$

Donc $x \in Majo(A_x)$

Donc $Majo(A_x) \neq \emptyset$

2) ok

3) ORPA et Osq $A_x \neq \emptyset$

On a donc $\forall n \in \mathbb{Z}, \; x \leq n$

Donc $\mathbb{Z}$ est minoré

Or, si $A \subset \mathbb{Z}$ et $A \neq \emptyset$ et A minorée,

Alors A admet un + petit élément (*)

On applique (*) avec $A = \mathbb{Z}$

Notons $n_0 := \min(\mathbb{Z})$

or $n_0 - 1 \in \mathbb{Z}$ et $n_0 - 1 < n_0$ → absurde

■

<u>Corollaire</u> : Si $x \in \mathbb{R}$, A_x admet un + grand élément.

<u>Def$^{\circ}$</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$

La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x

Ie, on pose $\lfloor x \rfloor := \max(A_x)$

Exemples :

- $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$ • $\lfloor 5 \rfloor = 5$ • $\lfloor -2,15 \rfloor = -3$
- $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$ • $\lfloor 0,13 \rfloor = 0$

Rq : De m̂, on définit $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de x ; c'est

$$\lceil x \rceil := \min \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant x \}$$

$\lceil 2,3 \rceil = 3$ et $\lceil -2,15 \rceil = -2$

Rq : On n'a pas $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - 1$

Ex : • $\lfloor 2,15 \rfloor = 2 = \lceil 2,15 \rceil - 1 = 3 - 1$

• $\underbrace{\lfloor 5 \rfloor}_{5} = \underbrace{\lceil 5 \rceil}_{5} - 1$

Faux

2) Caractérisation

Prop (T) :

1) $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

2) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

Mieux : 1) et 2) caractérisent $\lfloor x \rfloor$: la partie entière de x est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tq $n \leqslant x < n+1$ ou $x-1 < n \leqslant x$

Ie :

Prop : Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$

Sont équivalentes

(i) $n \leq x < n+1$

(ii) $x-1 < n \leq x$

(iii) n est la partie entière de x (ie $n = \lfloor x \rfloor$)

D/ (i) $\Rightarrow$ (ii) : Osq $\underbrace{n \leq x}_{a)} \underbrace{< n+1}_{b)}$

avec b), on a $x-1 < n$

avec a), cela donne $x-1 < n \leq x$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Osq $\underbrace{x-1 < n}_{c)} \leq x$

- Déjà, $n \in A_x$

Donc $n \leq \max(A_x)$ ie $n \leq \lfloor x \rfloor$

- Mq $n \geq \lfloor x \rfloor$ ORPA et osq $n < \lfloor x \rfloor$

Ĉ $n, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, on a donc : $n+1 \leq \lfloor x \rfloor$

or $\lfloor x \rfloor \leq x$ par def° (puisque $\lfloor x \rfloor \in A_x$)

Donc, on obtient : $n+1 \leq x$ donc $n \leq x-1$

C'est en contradiction avec c)

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Osq $n = \lfloor x \rfloor$

- Déjà, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$ (car $\lfloor x \rfloor = \max(A_x) \in A_x$)

Donc on a $n \leq x$

- Mq $x < n+1$

Version 1

ORPA et Osq $x \geq n+1$

On a donc $n+1 \in A_x$

Donc $n+1 \leq \max(A_x) = \lfloor x \rfloor = n$: absurde

Version 2

On a $n+1 > n = \max(A_n)$

Donc $n+1 \notin A_x$ ie non $(n+1 \leq x)$ ie $n+1 > x$

CCl. : On a $n \leq x < n-1$ ∎

3) Propriétés

Fait : $\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$

D/ $(\Rightarrow)$ Si $x = \lfloor x \rfloor$, on a $x \in \mathbb{Z}$ car $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$

$(\Leftarrow)$ Osq $x \in \mathbb{Z}$ Feinte : je note $n := x$

On a $n \leq x \leq n+1$

Donc d'après 2), on a $n = \lfloor x \rfloor$

Ie $x = \lfloor x \rfloor$ ∎

Prop : $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est croissante

Ie ⓣ $x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

D/ Osq $x \leq y$

Déjà, on a ⓡ $\lfloor x \rfloor \leq x$

Donc : $\lfloor x \rfloor \leq y$ Donc $\lfloor x \rfloor \in A_y$

Donc $\lfloor x \rfloor \leq \max(A_y)$ ie $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ ■

Prop ⓣ : $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$

Si $x \in \mathbb{R}$ et si $k \in \mathbb{Z}$

D/ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$

On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

Donc $\lfloor x \rfloor + k \leq x + k < \lfloor x \rfloor + k + 1$

Donc, notons $n := \lfloor x \rfloor + k$, on a

$$n \leq x + k < n + 1$$

D'après la caractérisation par les $\leq$ de $\lfloor \cdot \rfloor$, on a

$\lfloor x + k \rfloor = n$

Ie on a $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ ■

18

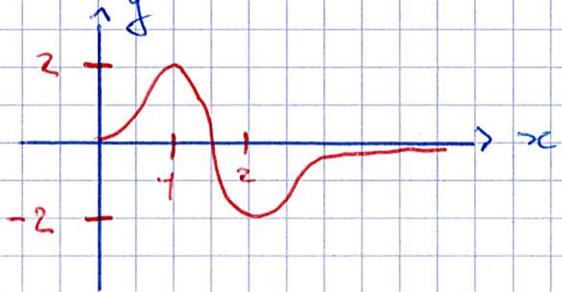
Cpt : On se place sur $\mathbb{R}_+$

1)

On a $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$

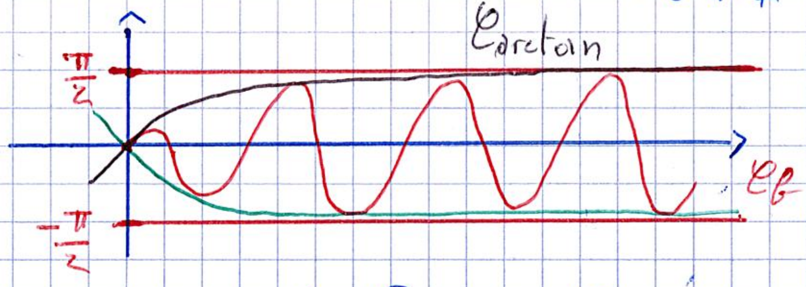
Mais $\sup_{t \in \mathbb{R}} f(t) = 2$ (AC) Le sup est atteint

2)



On a $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$ et $\begin{cases} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} f(t) = 2 \\ \inf_{t \in \mathbb{R}_+} f(t) = -2 \end{cases}$ (atteints)

3)



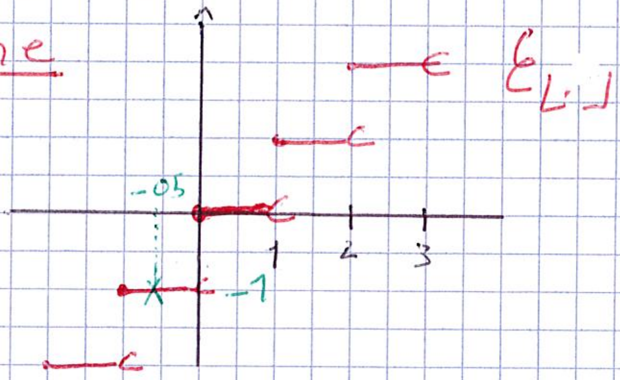
avec $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \arctan(x) \times \sin(x)$

Ici, 1°) $f(\cdot)$ n'admet pas de limite en $+\infty$

2°) $\begin{cases} \sup_{t \geq 0} f(t) = \frac{\pi}{2} \\ \inf_{t \geq 0} f(t) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ (AC) Non-atteints

4) Graphe



5) Fractionnaire

<u>Def° :</u> (T) <u>La partie fractionnaire</u> de x, notée $\underline{\{x\}}$ ⚠ (Conflit de notation)

est $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$

<u>Fait :</u> $\forall x, \ \{x\} \in [0,1[$

<u>Ex :</u> $\{2,15\} = 0,15$

$\{1,98\} = 0,98$

$\{-0,2\} = -0,2 - \lfloor -0,2 \rfloor = -0,2 - (-1)$

$= 0,8$

<u>Prop° :</u> (T) $\{x + k\} = \{x\}$ si $k \in \mathbb{Z}$

(AF) Dessiner $\mathcal{C}_{\{\cdot\}}$.

V Densité

1) Déf°

Déf° : Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : |x - a| \leq \varepsilon$$

2) Caractérisation

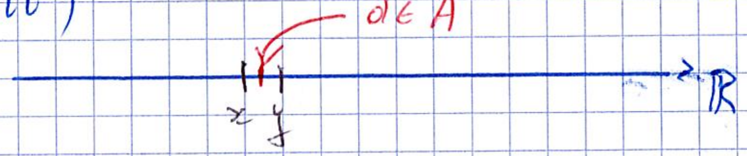
Prop : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Sont équivalentes

(i) A dense dans $\mathbb{R}$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists a \in A : x \leq a \leq y$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists a \in A : x < a < y$

d^n (iii)



Rq (T) : (iii) $\Leftrightarrow$ $\forall I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $\ell(I) > 0 \Rightarrow$

$$I \cap A \neq \emptyset$$

" A rencontre tout intervalle non trivial "

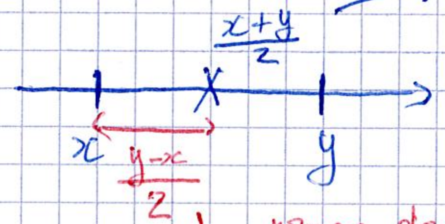
D/ (i) $\Rightarrow$ (iii)

Osq A dense dans $\mathbb{R}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x < y$

Je cherche $a \in A$ tq $x < a < y$

d^n



milieu de $\frac{x+y}{2}$

$\hookrightarrow$ rayon de $[x, y]$

On pose $m := \frac{a+b}{2}$ $\quad \varepsilon := \frac{y-x}{4}$, on a $\varepsilon > 0$

Comme A est dense dans $\mathbb{R}$, Fixons donc

$a_0 \in A$ tq $|m - a_0| \leq \varepsilon$

Mq $x < a_0 < y$ (Rq : geo^{nt} c'est évident)

- On a $a_0 \leq m + \varepsilon$

Or, $m + \varepsilon = y - \frac{y-x}{4}$

(D/ $m + \varepsilon = \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{4} = \frac{2x + 2y + y - x}{4}$

$= \frac{3y + x}{4} = y - \frac{y-x}{4}$

OFAH y

$\hat{C}$ $\frac{y-x}{4} > 0$, on a $y - \frac{y-x}{4} < y$; donc $a_0 < y$)

De même, $x \leq d_0$ $(i) \Rightarrow (iii)$

· $(iii) \Rightarrow (ii)$: ok AC

Mq $(ii) \Rightarrow (i)$ CR

Osq $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x < y \Rightarrow \exists\, a \in A : x \leq a \leq y$

Mq A est dense dans $\mathbb{R}$

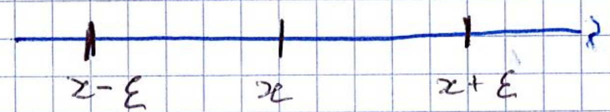
ie mq $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists\, a \in A : |x - a| \leq \varepsilon$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$

Mq $\exists\, a \in A : |x - a| \leq \varepsilon$

d^n



On a $x - \varepsilon < x + \varepsilon$. Dons d'après (ii)

$$\exists\, a \in A : x - \varepsilon \leq a \leq x + \varepsilon$$

Fixons un tel $a \in A$

On a $x - \varepsilon \leq a \leq x + \varepsilon$ ie $|a - x| \leq \varepsilon$ ∎

3) Nombres décimaux

a) définition

Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit

$\frac{n}{10^p}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

On note $\mathbb{D} := \left\{ \frac{n}{10^p} \, ; \, n \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{N} \right\}$

Ex : $42{,}84 = \frac{4284}{100}$

- $(\mathbb{D}, +, \times, 1, 0)$ est un sous anneau de $\mathbb{Q}$
- $3 \in \mathbb{D}$ mais $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ (exo)

b) approximation décimale

Déf° : Soit $x \in \mathbb{R}$

- L'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut est $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$

- ... par excès ...

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Prop (T) : Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit x_n son approximation par ~~excès~~ défaut

Alors $$|x - x_n| \leq 10^{-n}$$

Rq : de m̂ par excès

D/ **(B) idées :** 1) $|x - x_n| \leq$ ⟷

2) caractérisation par $\leq$ de $\lfloor \cdot \rfloor$

On a $$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

Donc $$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x \leq \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

Ie $$x_n \leq x < x_n + 10^{-n}$$

Donc $$0 \leq x - x_n < 10^{-n}$$

Donc $$|x - x_n| \leq 10^{-n} \quad ■$$

c) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Prop : $\mathbb{D}$ dense dans $\mathbb{R}$

D/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Osq $\varepsilon < 1$

Je cherche $a \in \mathbb{D}$ tq $|x - a| \leq \varepsilon$

$\boxed{B^\circ}$ $10^{-n} \leq \varepsilon \overset{\log}{\Longleftrightarrow} -n \ln(10) \leq \ln(\varepsilon)$

$\Longleftrightarrow -n \leq \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(10)}$

$\Longleftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(10)}$

$\Longleftrightarrow n \geq \left\lceil -\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(10)} \right\rceil$

Posons $n := \left\lceil -\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln 10} \right\rceil$

Déjà, $\hat{c}$ $\varepsilon \in]0, 1[$, on a $-\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(10)} \geq 0$, donc $n \geq 0$

On a $n \geq -\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln 10}$ ie $-n \ln(10) \leq \ln(\varepsilon)$

Donc, puisque $\exp(\cdot) \nearrow$, on a $10^{-n} \leq \varepsilon$

Notons x_n l'approximation par défaut de x. On a $|x - x_n| \leq 10^{-n} \leq \varepsilon$ ■

4) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Prop : } \mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$

D/ $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ donc ok ■ AC

5) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Prop : } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ dense dans } \mathbb{R}}$

D/ Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x < y$

On cherche $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tq $x \leq \alpha \leq y$

Version 1 1°) Ĉ $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{Q}$ tq

$x < a < y$

2°) Comme $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$

échec

Bonne Version (Arnaque)

Ĉ $x < y$, on a $x + \sqrt{2} < y + \sqrt{2}$

Ĉ $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, fixons $a \in \mathbb{Q}$

tq $x + \sqrt{2} < a < y + \sqrt{2}$

On a donc $x < a - \sqrt{2} < y$

or $a \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; donc $a - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ■

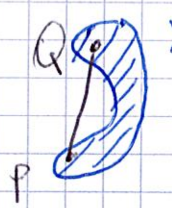
AF $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{Q} \\ \beta \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta \notin \mathbb{Q}$

VI Parties convexe de $\mathbb{R}$

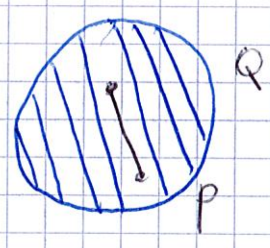
1) Définition

"Rappel" : $X \subset$ plan convexe $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall P, Q \in X$, $[PQ] \subset X$

Φ|n



X pas convexe



convexe

Rq : $f : I \to \mathbb{R}$ convexe $\Longleftrightarrow \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ convexe

Déf : Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A convexe $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall a, b \in A, \quad [a,b] \subset A$$

2) Classification des convexes de $\mathbb{R}$

lemme : I intervalle $\Rightarrow$ I convexe

D/ On choisit l'un des dix cas

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$ Mq $[a,b]$ convexe.

Soient $x, y \in I$

Mq $[x,y] \subset I$

Si $x > y$ ok $[x,y] = \emptyset$

Si $x \leq y$ Mq $[x,y] \subset I$

Soit $t \in [x,y]$ on a $x \leq t \leq y$

Or : $y \leq b$ car $y \in I$ et de m : $x \geq a$

ccl $a \leq t \leq b$ ie $t \in I$ ■

Prop Soit $A \subset \mathbb{R}$ Alors

A convexe $\Rightarrow$ A intervalle

D/ Osq A convexe. On distingue plusieurs cas :
(et non vide)

		A majoré		A non majoré
		$\sup A \in A$	$\sup A \notin A$	10
A minoré	$\inf A \in A$	7	8	9
	$\inf A \notin A$	4	5	6
A non minoré		3	2	1

<u>Cas 6</u> Osq A minoré (donc $\inf A$ existe)

et $\inf A \notin A$ et A non majoré

Mq $A =]\inf(A) ; +\infty[$

• $\subset$ Soit $x \in A$ $\hat{C}$ $\inf(A)$ minore A, on a $\inf(A) \leq x$. $\hat{C}$ $\inf(A) \notin A$, on a (AC)

$\inf(A) < x$

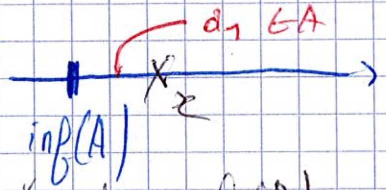
CCl on a $a \in]\inf(A ; +\infty[$

• $\supset$: Soit $x \in]\inf(A) ; +\infty[$ Mq $x \in A$

• Déjà, $\hat{C}$ A est majoré : $\exists a_0 \in A : a_0 > x$

Fixons un tel $a_0 \in A$

$\hat{C}$ $x > \inf(A)$ $\textcircled{d^n}$



par caractérisation "à la ε" de $\inf(A)$

(Avec $\varepsilon = x - \inf(A)$)

On sait que $\exists\, a_1 \in A : \inf(A) \leq a_1 < x$

- Fixons un tel $a_1 \in A$
- <u>Bilan</u> : on a trouvé $a_0, a_1 \in A$ tq $a_1 < x < a_0$
- $\hat{C}$ A convexe et $\hat{C}$ $a_0, a_1 \in A$, on a $[a_1, a_0] \subset A$
- $\hat{C}$ $x \in \,]a_1, a_0[\, \subset [a_1, a_0]$, on a $x \in A$ ■