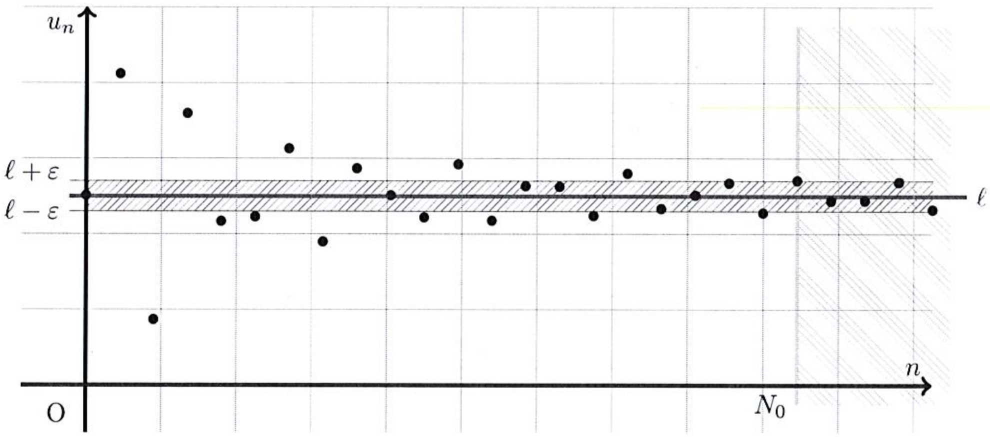
Chapitre 15

Suites



$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N_0,\ \ u_n \in \left]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\right[$$

Dessin et formule pour $u_n \longrightarrow \ell$

Dans ce chapitre, on reprend l'étude des suites numériques, dans le prolongement de ce qui a été fait au lycée, mais de façon plus rigoureuse. Cette nouvelle approche, qui — déjà — est satisfaisante en elle-même, nous permettra d'aller beaucoup plus loin dans les méthodes et dans les résultats.

Lycée Chateaubriand
MPSI 3

Colas Bardavid

15
Suites
plan de cours et principaux résultats

I. Généralités

21.8 ☑
21.9

1) Définitions et notations
2) Dessins d'une suite
3) Mode de définition d'une suite
a) de façon explicite
b) par récurrence
c) de façon implicite
4) Suites extraites
5) Monotonie

Fait-Réflexe 15.1
Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$. Alors,

$$\text{la suite } \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}$$

II. Cas particuliers classiques et importants

21.4
21.31
21.32

1) Suites arithmético-géométriques
a) définition
b) détermination du terme général
c) formule générale
2) Suites récurrentes d'ordre 2
a) théorème de structure
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.} \qquad (*)$$

On pose $P := X^2 - aX - b$, appelé *polynôme caractéristique de* $(*)$.

Théorème 15.2
1) *Si P possède deux racines distinctes réelles α et β, alors*

$$\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n.$$

2) *Si P possède une racine double réelle α, alors*

$$\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)\alpha^n.$$

b) exemple
c) raffinements
d) éléments de preuve

III. Propriétés vraies APCR

IV. Limite d'une suite : cas fini 21.19

1) Définition et premières propriétés : cas réel 21.20 21.21

a) définition
b) notations
c) vocabulaire
d) un premier exemple
e) cas des suites tendant vers 0

Proposition 15.3
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Alors,*

$$u_n \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u_n| \longrightarrow 0.$$

f) autres écritures de la définition

2) Cas complexe

a) définition
b) remarque

3) Limites et suites extraites

a) stabilité de la limite après passage à la suite extraite

Proposition 15.4 Ⓣ
Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *une extractrice. Alors,*

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell.$$

b) une première réciproque partielle

Proposition 15.5 Ⓣ

$$\left.\begin{array}{l} u_{2n} \longrightarrow \ell \\ u_{2n+1} \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \longrightarrow \ell.$$

c) une seconde réciproque partielle

Proposition 15.6 Ⓣ

$$u_{n+1} \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad u_n \longrightarrow \ell.$$

4) Unicité de la limite

5) Six lemmes

Lemme 1

$$(u_n)_n \textit{ converge} \quad \Longrightarrow \quad (u_n)_n \textit{ bornée}.$$

Lemme 2 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow 0 \\ w_n \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \max(u_n, w_n) \longrightarrow 0.$$

Lemme 3 (Lemme de contrôle)
On suppose qu'on dispose d'une suite $(\varepsilon_n)_n \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$ *telle que*

1) $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N_0, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n$
2) $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

Alors, $u_n \longrightarrow \ell$.

Lemme 4

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow 0 \\ (A_n)_n \text{ bornée} \end{array}\right\} \implies A_n u_n \longrightarrow 0.$$

Lemme 5 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, rétropassage à la limite dans les inégalités strictes)
On suppose que

$$u_n \longrightarrow \ell > 0.$$

Alors,

1) *on a* $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0,\ u_n > 0$ *;*
2) *mieux :* $\exists \varepsilon_0 > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0,\ u_n > \varepsilon_0$ *;*

Lemme 6

$$u_n \longrightarrow \ell \qquad \implies \qquad |u_n| \longrightarrow |\ell|.$$

6) **Opérations sur les limites**
a) somme
b) produit
c) scalairisation
d) un corollaire important et sa réciproque fausse

Corollaire 15.7 ⓣ

$$(u_n)_n \text{ converge} \qquad \implies \qquad u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0.$$

Fait 15.8 ⓣ
En général, l'implication suivant est fausse :

$$u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0 \qquad \implies \qquad (u_n)_n \text{ converge}.$$

e) inverse
f) quotient
g) une forme indéterminée

Fait 15.9 ⓣ
En général, l'implication suivant est fausse :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow 1 \\ a_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \implies {u_n}^{a_n} \longrightarrow 1.$$

7) **Convergence dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$**

Proposition 15.10 ⓣ

$$z_n \longrightarrow \lambda \qquad \iff \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z_n) \longrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(z_n) \longrightarrow \mathrm{Im}(\lambda) \end{array}\right.$$

8) **Passage à la limite dans les inégalités larges**
a) un lemme
b) corollaires

Corollaire 15.11 ⓣ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M \\ u_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \implies \ell \leqslant M.$$

c) on ne peut pas passer à la limite dans les inégalités strictes

V. Limite d'une suite : cas infini

21.28
21.42

1) Droite réelle achevée

2) Définition

3) Premiers résultats

4) Opérations sur les limites

VI. Théorèmes de convergence

21.39
21.59

1) Convergence par encadrement

2) Divergence par minoration

3) Application : limites des suites géométriques

a) cas facile

b) cas limite

4) Théorème de la limite monotone

a) le théorème

Théorème 15.12

1)

$$\left.\begin{array}{l} (u_n)_n \textit{ croissante } \text{APCR} \\ (u_n)_n \textit{ majorée} \end{array}\right\} \Longrightarrow (u_n)_n \textit{ converge.}$$

2) *De plus, dans ce cas, en notant* $\ell := \lim_{n\to\infty} u_n$, *on a*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell.$$

b) alternative pour les suites croissantes

Corollaire 15.13

Soit $(u_n)_n$ *une suite croissante. Alors,*

1) *si* $(u_n)_n$ *est majorée, elle converge ;*

2) *sinon, on a* $u_n \longrightarrow +\infty$.

5) Suites adjacentes

a) définition

b) premières propriétés

c) théorème des suites adjacentes

6) Théorème de Bolzano-Weierstrass

a) cas réel

Théorème 15.14

De toute suite bornée, on peut extraire une suite convergente.

b) cas complexe

VII. Point de vue séquentiel sur quelques propriétés de $\mathbb{R}$

21.57 ♯♯

1) Suites et densité

Théorème 15.15
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors, les deux assertions sont équivalentes :

(i) *A est dense dans $\mathbb{R}$*

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$

2) Bornes supérieures et suites

Théorème 15.16
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré. Alors,

(i) *il existe $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \longrightarrow \sup A$;*

(ii) *on peut prendre $(a_n)_n$ croissante ;*

(iii) *si $\sup A \notin A$, on peut prendre $(a_n)_n$ strictement croissante.*

VIII. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Chapitre 15

Suites

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Rq*: on peut le faire dans un "corps valué"

I Généralités

1) Déf° et notations

Rappel : Une suite à valeurs dans un ensemble E est un élement de $E^{\mathbb{N}}$.

. Une suite réelle : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, complexe : $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Rq*: On travaillera aussi dans $\mathbb{K}^{(\mathbb{N}^*)}$, ... $\mathbb{K}^{[\![n_0, +\infty[\![}$

Les suites seront notées :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(U_n)_{n\geq 0}$, $(U_n)_n$, (U_n) , U

Notation préférée

Notation la + abstraite

Attention, q^d on écrit U_n, il s'agit du terme d'indice n.

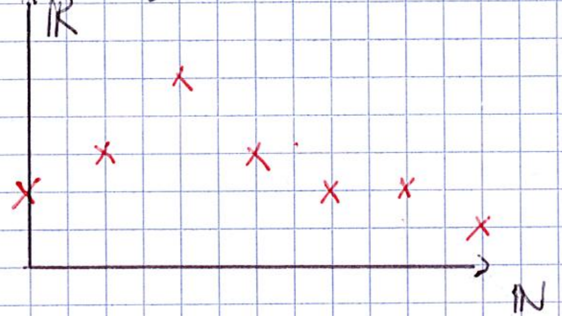
<u>Rq :</u>

Suites	Fonction
$(U_n)_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	$f : I \to \mathbb{R}$
$U_n : \mathbb{R}$	$f(x) : \mathbb{R}$

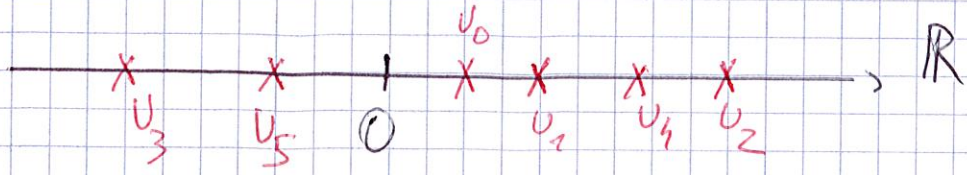
2) Dessins d'une suite

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

<u>Première façon de représenter (U_n)</u>

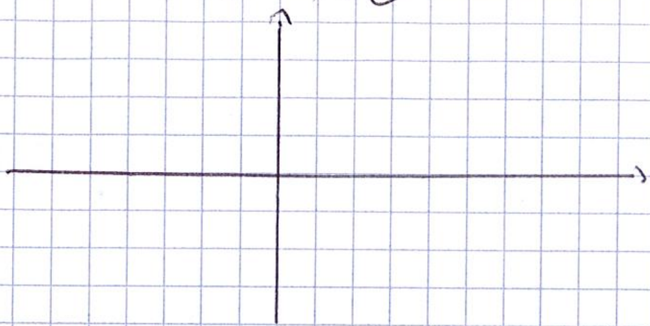


Deuxième façon



Cas complexe

Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$



3) Mode de déf° d'une suite

a) explicitement

Ex : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ def par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{1+n} \cdot e^{-n}$$

On a $u_{1000} = \dfrac{\sqrt{1001}}{e^{1000}}$

b) par rec

<u>Ex</u> : Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \sqrt{1+U_n} \end{cases}$$

On a
$$U_1 = \sqrt{1+1}$$
$$U_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+1}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$
$$U_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$$

On a si $n \geq 1$, $U_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1}}}$ ($n+1$ signes $\sqrt{\ }$)

c) De façon implicite

<u>Ex</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\boxed{\text{Fait : } \exists!\, x > 0 : x + P_n(x) = n}$$

$\underline{D/}$ (classique) par analyse des f°

- Posons $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + \ln(x)$

- On a $f \nearrow\nearrow$

 ($D/^1$ avec f') ou ($D/^2$ car $Id_{\mathbb{R}} \nearrow\nearrow$ et $\ln(\cdot) \nearrow\nearrow$)

- Puis, on a $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

- $\hat{C}$ f est continue, d'après le théorème de la bijection monotone, on sait que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une bijection.

- Donc $\forall y \in \mathbb{R}, \exists ! x > 0 : f(x) = y$

- En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! x > 0 ; x + \ln(x) = n$ ■

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note x_n l'unique $x > 0$ tq $x + \ln(x) = n$

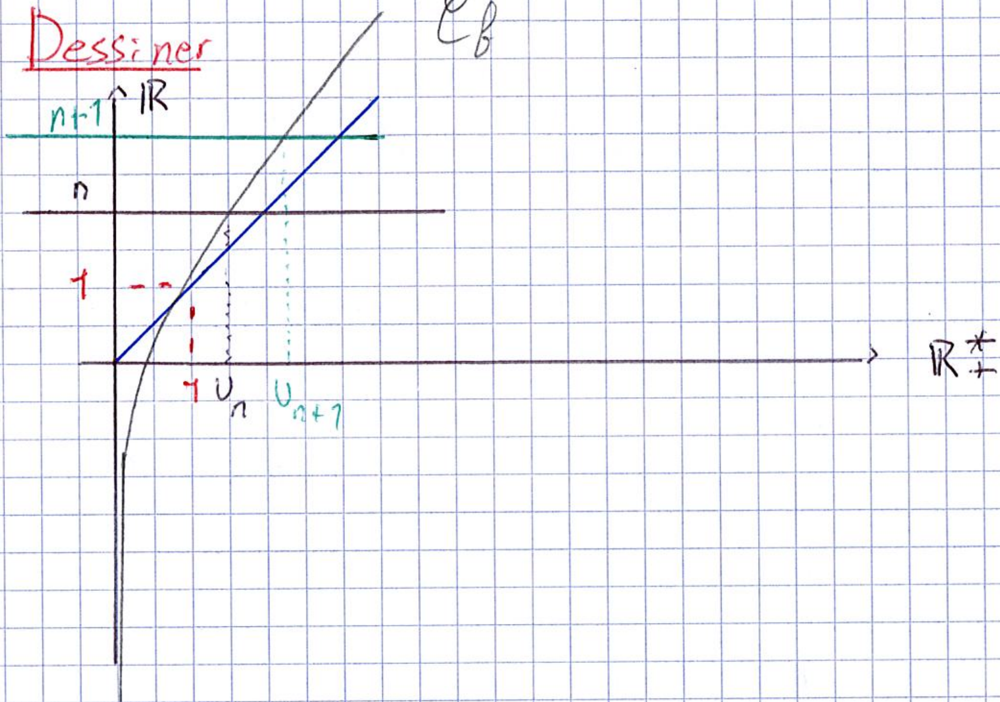
La suite $(x_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ est définie (implicitement)

3) ⓡ RF u_n : $\boxed{U_n + \ln(U_n) = n}$

h) Étudions $(U_n)_n$

a) Mq $(U_n)_n \nearrow$

R^x Dessiner



Astuce : j'utilise à fond f

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $f(U_n) = n$ RF

$f(U_{n+1}) = n+1$

Donc $f(U_{n+1}) > f(U_n)$

Ĉ $f \nearrow$, on sait que $\forall a,b>0$, $a<b \Leftrightarrow f($

$a<b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$

Donc $U_n < U_{n+1}$

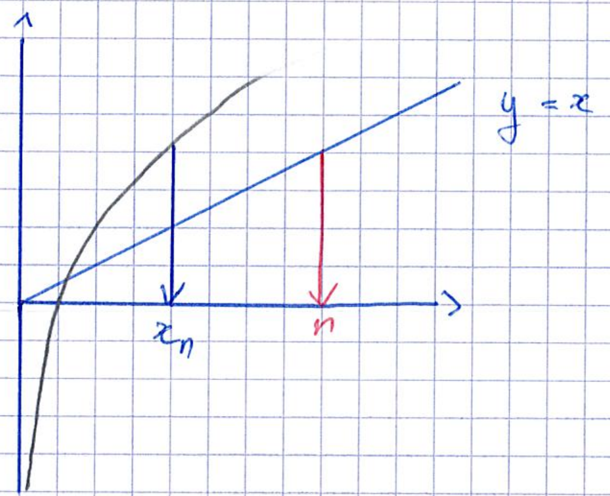
D'où $(U_n)_n \nearrow$

b) Mq $U_n \longrightarrow +\infty$

(par minoration)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

d^n



On a $f(x_n) \underset{\uparrow \text{RF}}{=} n \leq n + \ln(n) = f(n)$

CCl : on a $f(x_n) < f(n)$: donc $x_n \leq n$

On cherche une suit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq

$$\begin{cases} \forall n,\ a_n \leq x_n \\ a_n \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

Idée : Je cherche $(a_n)_n$ qui tend "lentement" vers $+\infty$

* $\ln(n)$ * $\sqrt{n}$ * $n - \ln(n)$ * $\frac{n}{2}$

• On veut (*) $a_n \leq x_n$ ie on veut $f(a_n) \leq f(x_n)$

ie ——— $f(a_n) \leq n$

• 3e/ $f(n-\ln(n)) = n - \ln(n)$

$$- \boxed{\ln(\underbrace{n-\ln(n)}_{\leq n})} < \ln(n) \text{ car } \ln(\cdot) \nearrow$$

$$\leq n = f(x_n)$$

RF

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n - \ln(n) \leq x_n \leq n$

• Par minoration, on a $x_n \longrightarrow +\infty$

• Mieux : on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n-\ln(n)}{n} \leq \dfrac{x_n}{n} \leq 1$

R* limite ?

$$\frac{n-\ln(n)}{n} = \frac{n\left(1-\frac{\ln(n)}{n}\right)}{n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} \longrightarrow 1$$

Factoriser par la quantité dominante

• Donc $\dfrac{x_n}{n} \longrightarrow 1$

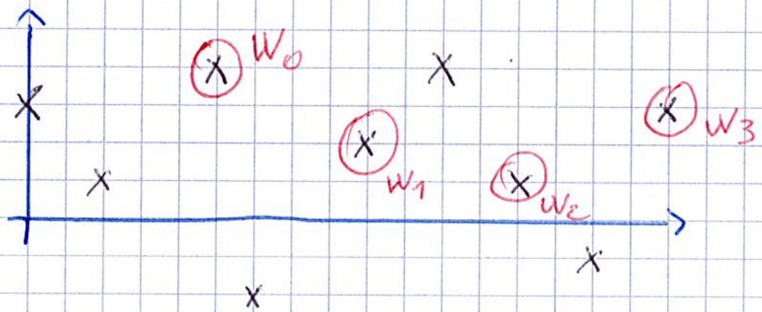
ce qu'on écrira : $x_n \sim n$

4) Suites extraites

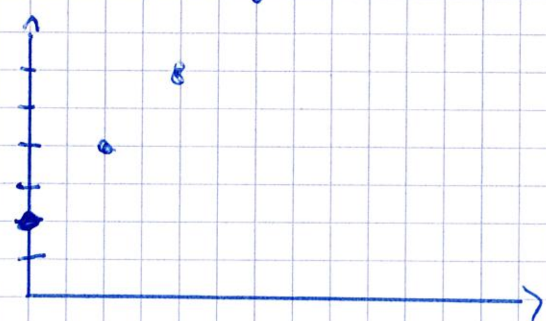
Déf: Soit $(U_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Une suite extraite de $(U_n)_n$ est une suite de la forme $(U_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante

- Une f° $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ str^t croissante est appelée une extractrice

d^n



Ici :



Ex : $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Prop$^{Ⓣ}$: $\varphi(\cdot)$ extractrice $\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$

D/ Soit $n \in \mathbb{N}$

Astuce : $\boxed{\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k+1) - \varphi(k) \quad + \varphi(0)}$ À retenir

Or $\forall k$, $\varphi(k+1) - \varphi(k) \geq$ car $\varphi(\cdot) \uparrow\uparrow$

Donc $\varphi(n) \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 \quad + \varphi(0) \quad = \varphi(0) + n \geq n$

■

5) Monotonie

Prop : $\cdot (U_n)_n \nearrow \iff \forall n, U_{n+1} - U_n \geq 0$

$\cdot$ Si $(U_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ Alors on a :

$(U_n)_n \nearrow \iff \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$

D/ ok ■

Fait - R×

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \ U_n \geq 0$

Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} U_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

D/ On note, pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geq 0$$

donc $(S_n)_n \nearrow$ ■

II Cas particuliers importants

1) Suites arithmético-géométrique

a) Def°

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit qu'elle est arithmético-géométrique $\underset{ssi}{\Delta}$

$$\exists a, b \in \mathbb{K} : \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b}$$

Req (T) : si $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques

si $b = 0$, ——————————— géomètrique

b) détermination du terme général

Rappel :

1) "$U_{n+1} = U_n + b$" : $U_n = u_0 + n \cdot b$

⊕ g^{alt} : $U_n = u_{n_0} + (n - n_0) b$

2) "$u_{n+1} = a U_n$" $U_n = u_0 a^n$

$U_n = U_{n_0} \cdot a^{n-n_0}$

Traitons un exemple

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $u_0 = 3$

$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = 4 u_n - 10$ $(*)$

Idée : On note $\ell \in \mathbb{R}$ le "p^t fixe de $(*)$"

- Fixons $\ell \in \mathbb{R}$ tq $\boxed{\ell = 4\ell - 10}$ RFP

On a alors $\ell = \frac{10}{3}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En soustrayant RFP à $(*)$, on obtient

$$U_{n+1} - \ell = 4 (U_n - \ell)$$

Donc $(U_n - \ell)$ est géometrique de raison 4

Donc : $U_n - \ell = 4^n (u_0 - \ell)$

Donc, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = 4^n\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{10}{3} = \frac{10 - 4^n}{3}$$

$$U_{n+1} = 4U_n - 10 \qquad (*)$$

$$P = 4P - 10$$

c) formule générale $(a \neq 1)$

(AF)

2.) Suites récurrentes (linéaires) d'ordre 2 :

a) Théorème de structure

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+2} = a\,U_{n+1} + b\,U_n \qquad (*)}$$

(On suppose que $b \neq 0$; si $b = 0$, on est ramené au cas des suites géo)

On pose : $\boxed{P := X^2 - aX - b}$

C'est le polynôme caractéristique de $(*)$

Théorème :

1) Si P possède deux racines distinctes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\exists! \, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$$

2) Si P possède une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\exists! \, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = (\lambda + \mu n) \alpha^n$$

b) Exemple

Soit $(F_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

C'est la suite de Fibonacci

On a $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots)$

On pose $P := X^2 - X - 1$

Les racines de P sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ où $\Delta := 1^2 - 4(-1)$

ie sont $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

D'après le théorème de structure, on a donc

$\exists ! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (**)$$

Fixons λ, μ tq dans $(**)$. Déterminons les :

$$F_0 = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{0}\right)^0 + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 \quad \text{ie} \quad \lambda = -\mu$$

et $F_1 = \lambda \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \lambda \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ie $1 = -\sqrt{5}\,\lambda$

* CCl : on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}$$

c) raffinements

- Le théorème est encore vrai dans le cas complexe.
- Cas réel sans racines

Notons $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les racines de P

Mieux, ~~notons~~ écrivons $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ les racines de P avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. $(\theta \not\equiv 0 \; [\pi])$

D'après le cas complexe, fixons $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tq

$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda (\rho e^{i\theta})^n + \mu (\rho e^{-i\theta})^n$

Fixons $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \lambda \rho^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + \mu \rho^n (\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

Ainsi : $\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \rho^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$

· Fixons de tels A et B

$\boxed{\text{Fait : } A, B \in \mathbb{R}}$

D/ Avec $n=0$, $u_0 = \rho^0 (A\cos(0\theta) + B\sin(0 \cdot \theta))$

Donc $u_0 = A$ Donc $A \in \mathbb{R}$

Avec $n=1$: $u_1 = \rho(A\cos\theta + B\sin\theta)$

Ĉ $\theta \equiv 0 [\pi]$, on a $\sin\theta \neq 0$,

On en déduit $B = \dfrac{\frac{u_1}{\rho} - A\cos\theta}{\sin\theta} \in \mathbb{R}$ ■

Bilan : (Cas $\mathbb{R}$)

- 2 racines réelles $\neq^{tes}$ α et β

  (T) $u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$

- 1 racine double $\alpha\in\mathbb{R}$ (T)

  $$u_n = (\lambda + \mu n)\alpha^n$$

- 2 racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$

  (T) $u_n = \rho^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)$

  et (T) $u_n = \rho^n A'\cos(n\theta + \varphi)$

d) éléments de preuve :

cf polycopié.

III Propriétés vraies APCR

APCR = à partir d'un certain rang

(autorisé dans les copies)

Def* :

Soit $P(n)$ un prédicat de $n \in \mathbb{N}$

(Ex : " $2^n \geqslant 42 n^{42}$ ")

On dit que $P(n)$ est vraie à partir d'un certain rang et on note

$$P(n) \text{ APCR } \overset{\Delta}{\underset{ssi}{\iff}} \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0, P(n)$$

Exemples :

- Déjà, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$, on a $P(n)$ APCR
- On a $4^n \geqslant 1000$ APCR

  (D/ Prendre $N_0 := \left\lceil \frac{\ln(1000)}{\ln(4)} \right\rceil$ ■)
- On a $8n^2 \geqslant 10\,000$ APCR
- On a $\left\lfloor \frac{(10n^2)^3}{2^n} \right\rfloor = 0$ APCR
- On a $2^n \geqslant 42 n^{42}$ APCR

Il faut que cela soit évident

D/ On a $\frac{2^n}{42\, n^{42}} \longrightarrow +\infty$ par croissances comparées

Donc, on a en particulier : $\frac{2^n}{42\, n^{42}} \geq 1$ APCR ■

Def* : Soit $P(u)$ un prédicat de u suite.

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $P((U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ APCR $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\exists N_0 \in \mathbb{N} : P\left((U_n)_{n\geq N_0}\right)$ est vraie

Ex : $(U_n)_n$ croît APCR

⚠ Piège

Dire qu'une suite $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée APCR n'est pas très malin

Fait ①

$(U_n)_n$ bornée $\iff$ $(U_n)_n$ bornée APCR

D/ ($\Rightarrow$) évident

($\Leftarrow$) Osq $(U_n)_n$ bornée APCR

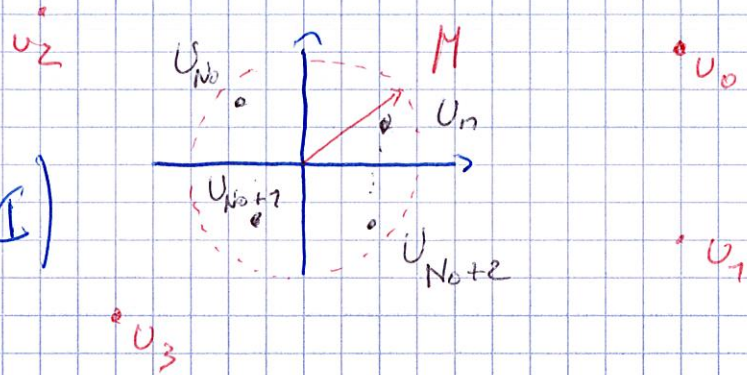
Fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $(U_n)_{n \geq N_0}$ bornée

Fixons donc $M \in \mathbb{R}_+$ tq

$$\forall n \geqslant N_0 , \quad |U_n| \leqslant M$$

d^n

I)



Notons $M_1 := \max\left(|U_0|, |U_1|, \dots |U_{N_0-1}| \right)$

$M' := \max(M_1, M)$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |U_n| \leqslant M'$

<u>D/</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, $\cancel{|U_n| \leqslant M'}$

1°) si $n \in [\![0, N_0 - 1]\!]$: on a $|U_n| \leqslant M_1 \leqslant M'$

2°) si $n \geqslant N_0$, on a $|U_n| \leqslant M \leqslant M'$ $\blacksquare$

IV Limites : cas fini

1) Définition et 1ères propriétés : cas réel

a) définition (M)

Def° Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$

On dit que $(u_n)_n$ tend vers ℓ ssi (A)

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

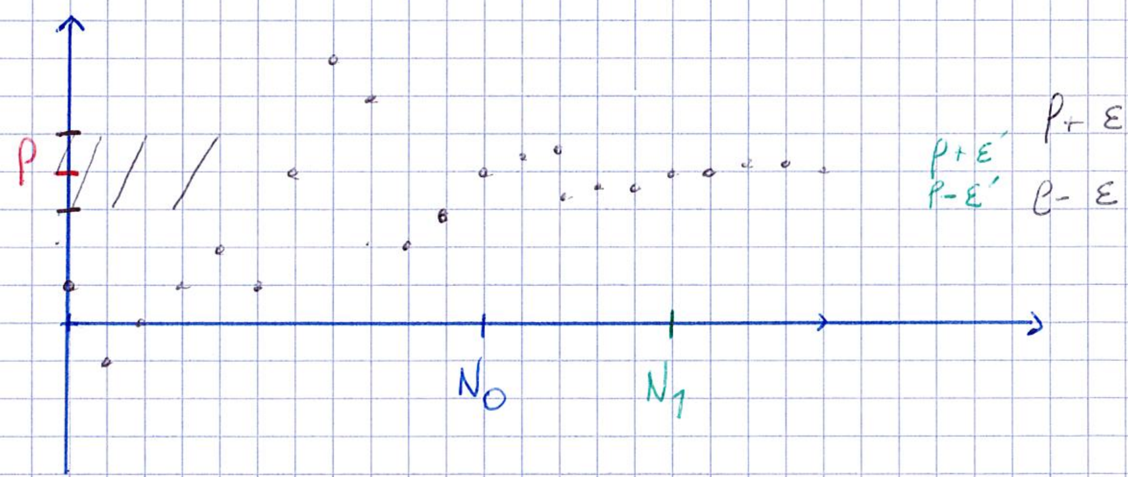
b) Notations

On note alors $u_n \longrightarrow \ell$ ou $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell$

(ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $(u_n)_n \longrightarrow \ell$

ou $(u_n)_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell$)

Rq : • d^n



On a évidement

$$u_n \longrightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,$$

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

c) Vocabulaire

<u>Def°</u> : Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(U_n)_n$ converge, ce qu'on notera # $(U_n)_n \xrightarrow{CV}$

ssi $\exists \ell \in \mathbb{R} : U_n \longrightarrow \ell$

• Sinon, on dit qu'elle diverge et on note #

$(U_n)_n$ DiV

d) Un premier exemple

$$\boxed{\text{Fait : } \frac{1}{n} \longrightarrow 0}$$

<u>D/</u> On veut mq :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

$\left(B^o \quad \frac{1}{n} \leq \varepsilon \longleftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \longleftrightarrow n \geq \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \right)$

On pose $N_0 := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ Ĉ $\varepsilon > 0$, on a $\frac{1}{\varepsilon} > 0$

Donc $\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \geq 0$, on a bien $N_0 \in \mathbb{N}$

Mq $\forall n \geq N_0, \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

Soit $n \geq N_0$. On a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0}$ car

$\frac{1}{\cdot} \searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

or $\frac{1}{\varepsilon} \leq N_0$; donc $\frac{1}{N_0} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$

Donc $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$

On a bien mq

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$$

Ie, on a mq $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ■

e) Cas des suites tendant vers 0

Prop - R^x

$$U_n \longrightarrow 0 \iff |U_n| \longrightarrow 0$$

D/ En effet, on a

$$U_n \longrightarrow 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |U_n - 0| \leq \varepsilon$$

et $|U_n| \longrightarrow 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \vdash : \forall n \geq N_0,$

$$\big||U_n| - 0\big| \leq \varepsilon$$

Or, si $x \in \mathbb{R}$, on a $|x - 0| = |x| = \big||x| - 0\big|$ ■

f) Autres écritures de la déf°

On aurait pu choisir une autre déf°

On a

Prop ⓣ : Sont équivalentes :

(i) $u_n \longrightarrow \ell$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |u_n - \ell| \leq 2\varepsilon$

(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |u_n - \ell| \leq 10\,000\,\varepsilon$

D/ Sont évidentes (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv)

Montrons (iv) $\Rightarrow$ (ii)

(*) Osq : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |u_n - \ell| \leq 10\,000\,\varepsilon$

Mq (ii)

Soit $\varepsilon > 0$

Idée : J'utilise (*) avec un autre ε'

$$\left(\begin{array}{l} (\dots) \leq 10\,000\,\varepsilon' \longrightarrow (\dots) < \varepsilon \\ \text{On prend } \varepsilon' \text{ tq } 10\,000 \cdot \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right)$$

Posons $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{20000}$. On a $\varepsilon' > 0$. Donc

D'après (*) $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |u_n - \ell| \leq 10\,000\,\varepsilon'$

Fixons un tel N_0

Soit $n \geq N_0$, on a

$$|v_n - \ell| \leq 1000 \cdot \varepsilon' = 10\,000 \times \frac{\varepsilon}{20\,000} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(car $\frac{1}{2} < 1$ et $\varepsilon > 0$)

Ainsi : $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, \ |v_n - \ell| < \varepsilon$

D'où (ii) ■

2) Cas complexe

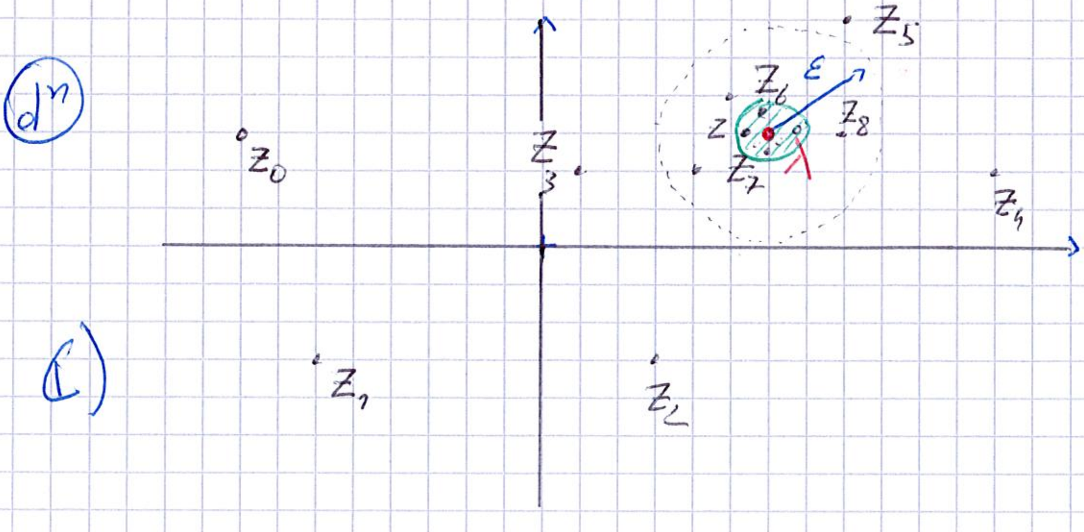
<u>Def$^{\circ}$</u> : Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

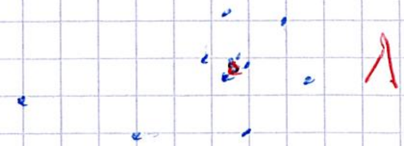
On dit que $(z_n)_n$ tend vers λ et on note

$z_n \longrightarrow \lambda$ (etc...) $\underset{\text{ssi}}{\Delta}$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N_0, \ |z_n - \lambda| \leq \varepsilon$$



d^n



$\mathbb{C}$)

b) remarque

Fait ①

$$z_n \xrightarrow{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \lambda \iff z_n - \lambda \xrightarrow{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} 0$$

$$\iff \underbrace{|z_n - \lambda|}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \longrightarrow 0$$

D/ cf $u_n \to 0 \iff |u_n| \to 0$ ∎

Notations :

- $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
- $\rho \in \mathbb{K}$

Dans certains cas (avec des $\leq$), on se limitera à $\mathbb{R}$

3) Limites et suites extraites.

a) Stabilité de la limite après extraction.

Prop : Soit $(U_n)_n$ suite

Soit $\varphi(\cdot)$ une extractrice.

Alors $U_n \longrightarrow \ell \Rightarrow U_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$

D/ osq $U_n \longrightarrow \ell$, on a donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |U_n - \ell| \leq \varepsilon$ (*)

Mq $U_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$

Soit $\varepsilon > 0$

Idée : $\varphi(n) \geq n$

D'après (*), fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$,

$|U_n - \ell| \leq \varepsilon$

Soit $n \geq N_0$

On a $\varphi(n) \geq n \geq N_0$

Donc, on a $|U_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |U_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$

Ie, on a mq $U_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$ ■

Rq : Admettons que $((-1)^n)_n$ diverge

d^n

Mais on a $(-1)^{2n} \longrightarrow 1$ ■

b) Une 1ère réciproque partielle.

Prop : $\left.\begin{array}{l} U_{2n} \longrightarrow \ell \\ U_{2n+1} \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Rightarrow U_n \longrightarrow \ell$

D/ Osq $U_{2n} \longrightarrow \ell$ et $U_{2n+1} \longrightarrow \ell$

Mq $U_n \longrightarrow \ell$

Soit $\varepsilon > 0$

Ĉ $U_{2n} \longrightarrow \ell$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$,

$|U_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ (*)

Ĉ $U_{2n+1} \longrightarrow \ell$, fixons $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$,

$|U_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$ (**)

Posons $N_2 := \max(2N_1+1, 2N_0)$

Soit $n \geq N_2$

On distingue 2 cas

1er Cas : si n est pair, on l'écrit

$n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$

Ĉ $n \geq N_2 \geq 2N_0$ on a « $p \geq N_0$ ». D'après

$(*)$, on a $|U_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$

ie $|U_n - \ell| \leq \varepsilon$

2e Cas : Osq n impair et on l'écrit $n = 2p+1$

Ĉ $n \geq N_2 \geq 2N_1 + 1$, on obtient : $p \geq N_1$

D'après $(**)$, on a $|U_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$ ie

$|U_n - \ell| \leq \varepsilon$

■

c) une autre recpq partielle

Prop :

$$U_{n+1} \longrightarrow \ell \implies U_n \longrightarrow \ell$$

D/ Osq $U_{n+1} \longrightarrow \ell$. Mq $U_n \longrightarrow \ell$

Soit $\varepsilon > 0$

$\hat{C}$ $U_{n+1} \longrightarrow \ell$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$,

$|U_{n+1} - \ell| \leq \varepsilon$ $(*)$

Posons $N_1 := N_0 + 1$

Soit $n \geq N_1$, on a $n \geq N_0 + 1$, donc $(n-1)+1 \geq N_0 + 1$

Ie $n-1 \geq N_0$. D'après $(*)$, $|U_{(n-1)+1} - \ell| \leq \varepsilon$ ie

$|U_n - \ell| \leq \varepsilon$

CCl : $U_n \longrightarrow \ell$ ∎

Rq : De m̂ $\begin{cases} U_{n-1} \longrightarrow \ell \Rightarrow U_n \longrightarrow \ell \\ U_{n+2} \longrightarrow \ell \Rightarrow U_n \longrightarrow \ell \end{cases}$

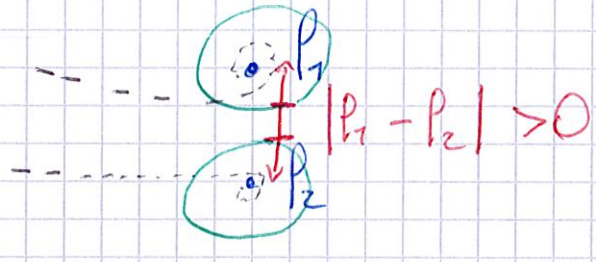
h) Unicité de la limite

Prop : Ⓣ $(U_n \longrightarrow \ell_1 \text{ et } U_n \longrightarrow \ell_2) \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

D/ Osq $U_n \longrightarrow \ell_1$ et $U_n \longrightarrow \ell_2$

ORPA et Osq $\ell_1 \neq \ell_2$

(1)



On pose $\varepsilon := \dfrac{|P_1 - P_2|}{3}$; on a $\varepsilon > 0$

Ĉ $U_n \longrightarrow P_1$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$, $|U_n - P_1| \leq \varepsilon$

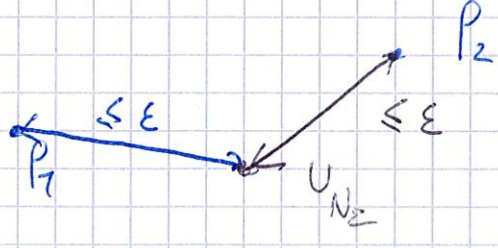
Ĉ $U_n \longrightarrow P_2$, de m̂, fixons $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$, $|U_n - P_2| \leq \varepsilon$

On pose $N_2 := \max(N_0, N_1)$

On a $N_2 \geq N_0$; donc $|U_{N_2} - P_1| \leq \varepsilon$

et $N_2 \geq N_1$, donc $|U_{N_2} - P_2| \leq \varepsilon$

d^n



On a $|P_2 - P_1| = |(P_2 - U_{N_2}) + (U_{N_2} - P_1)|$

On a $|(P_2 - U_{N_2}) + (U_{N_2}) - P_1)| \leq \underbrace{|P_2 - U_{N_2}|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|U_{N_2} - P_1|}_{\leq \varepsilon}$

CCl : $|\ell_2 - \ell_1| \leq 2\varepsilon$ ie $|\ell_1 - \ell_2| \leq 2\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$

donc $1 \leq \frac{2}{3}$ absurde ■

Déf° : Soit $(u_n)_n$ une suite convergente

L'unique ℓ tel que $u_n \longrightarrow \ell$ est appelé

limite de $(u_n)_n$ et est notée $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$

ou $\lim (u_n)_n$

⚠ L'expression $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ ne peut être utilisée

que s'il a été justifié auparavant que

$(u_n)_n \xrightarrow{CV}$

5) Six lemmes

Lemme 1 $(u_n)_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow (u_n)_n$ bornée

D/ **Astuce** : on utilise la déf° de $u_n \to \ell$

avec $\varepsilon := 1$

$\hat{C}$ $(u_n)_n \xrightarrow{CV}$, fixons ℓ tq $u_n \to \ell$

$\hat{C}$ $(u_n)_n \longrightarrow \ell$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$,

$|u_n - \ell| \leq 1$

1

2e Idée : J'utilise l'inég. triang renv (neg)

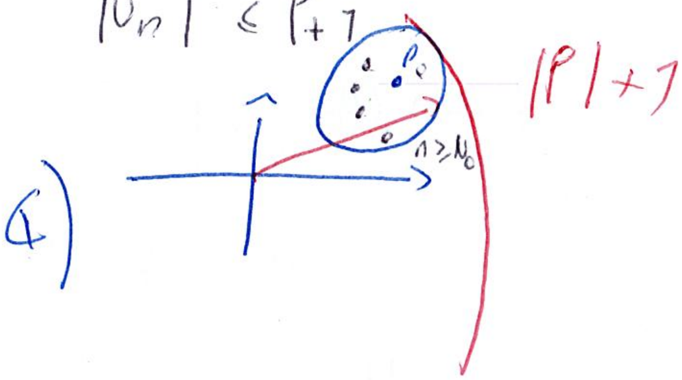
$$|a|-|b| \le |a-b|$$

Soit $n \geq N_0$

On a $|u_n| - |\ell| \le |u_n - \ell| \le 1$

Donc $|u_n| \le \ell + 1$

d^n



Donc : "$(u_n)_n$ est bornée APCR"

Donc $(u_n)_n$ bornée ■

Lemme 2 $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} v_n \to 0 \\ w_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(v_n, w_n) \to 0$$

D/ Osq $v_n \to 0$ et $w_n \to 0$

Mq $\max(v_n, w_n) \to 0$

Soit $\varepsilon > 0$.

Ĉ $v_n \to 0$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq N_1, \quad |w_n| \leq \varepsilon$

Posons $N_2 := \max(N_0, N_1)$

Soit $n \geq N_2$

On a deux cas

1er cas : si $U_n \geq w_n$, alors $\max(U_n, w_n) = U_n$

Or $n \geq N_2 \geq N_0$, on a $|U_n| \leq \varepsilon$

donc $|\max(U_n, w_n)| \leq \varepsilon$

2e cas : si $w_n \geq U_n$, de même, on a

$|\max(U_n, w_n)| \leq \varepsilon$

On a bien $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |\max(U_n, w_n)| \leq \varepsilon$

<u>CCl</u> : $\boxed{\max(U_n, w_n) \longrightarrow 0}$ ∎

2e Idée : J'utilise l'ineg triang. renv. négative

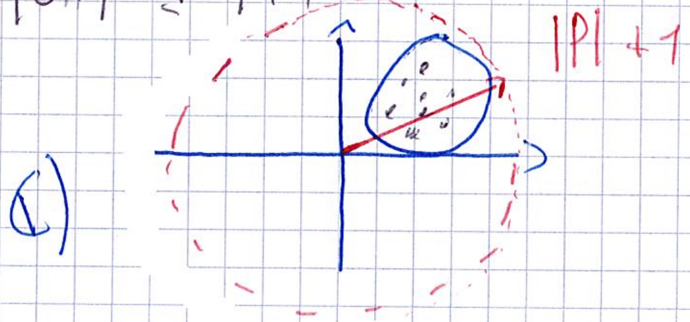
$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

Soit $n \geq N_0$

On a $|U_n| - |P| \leq |U_n - P| \leq 1$

Donc $|U_n| \leq P + 1$

d^n



Donc "$(U_n)_n$ bornée APCR"

Donc $(U_n)_n$ bornée ■

Lemme 2

$$\left.\begin{aligned} U_n &\longrightarrow 0 \\ W_n &\longrightarrow 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \max(U_n, W_n) \longrightarrow 0$$

D/ Osq $U_n \longrightarrow 0$ et $w_n \longrightarrow 0$

Mq $\max(U_n, w_n) \longrightarrow 0$

Soit $\varepsilon > 0$

Ĉ $U_n \longrightarrow 0$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq N_0, \ |U_n| \leq \varepsilon$$

De même, fixons $N_1 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq N_1, \ |w_n| \leq \varepsilon$$

Posons $N_2 := \max(N_0, N_1)$

Soit $n \geq N_2$

On a deux cas :

1er cas : si $U_n \geq w_n$, alors $\max(U_n, w_n)$

$= U_n$

Ĉ $n \geq N_2 \geq N_0$, on a $|U_n| \leq \varepsilon$

donc $|\max(U_n, w_n)| \leq \varepsilon$

2e cas : si $w_n \geq U_n$, de même,

$$|\max(U_n, w_n)| \leq \varepsilon$$

D'où le resultat

ccl : $\max(U_n, w_n) \longrightarrow 0$ ∎

Lemme 3 (philosophique) : Lemme de contrôle

On suppose qu'on dispose d'une suite $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

tq :

1) $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$

(On dit que la distance entre u_n et ℓ est controlée par ε_n)

2) $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

Alors $u_n \longrightarrow \ell$

D/ Soit $\varepsilon > 0$

- Ĉ $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, fixons ~~un~~ $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$,

$$|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$$

- Grâce à (1) fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq N_0, \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$$

- Posons $N_2 := \max(N_0, N_1)$

- Soit $n \geq N_2$,

1°) Ĉ $n \geq N_0$, on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$

2°) Ĉ $n \geq N_1$, on a ~~__~~ $\varepsilon_n \leq \varepsilon$

__CCl__ : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N_2$,

$|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Ie : $u_n \longrightarrow \ell$ ■

__Rappel__ ⚠

- Interdiction d'écrire $u_n \longrightarrow w_n$: ça n'a ϕ sens
- Ce qui est ok : $u_n \longrightarrow \ell$
- Eventuellement, c'est ok d'écrire $|u_n - w_n| \longrightarrow 0$
- ou bien : $\dfrac{u_n}{w_n} \longrightarrow 1$

(D/ "du ϕ sens" : $\left.\begin{array}{l} n + \frac{1}{n} \\ n + \frac{1}{n^2} \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{l} n + \frac{1}{n} \longrightarrow n \\ n + \frac{1}{n^2} \longrightarrow n \end{array}\right\} \quad n + \frac{1}{n} \longrightarrow n + \frac{1}{n^2}$$

donc $\dfrac{1}{n} \longrightarrow \dfrac{1}{n^2}$

donc, en multipliant par n : $1 \longrightarrow \dfrac{1}{n}$: absurde ■

Lemme 4 :

$$\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow 0 \\ (A_n)_n \text{ bornée} \end{array}\right\} \Longrightarrow A_n U_n \longrightarrow 0$$

D/ • Effectivisons "$(A_n)_n$ bornée)"

• Fixons $M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, |A_n| \leq M$

• Soit $\varepsilon > 0$

• Posons $\cancel{\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{M}}$

idée : À priori, M est grand

donc "$\varepsilon' \ll \varepsilon$"

Mieux : $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{M+1}$

On a $\varepsilon' > 0$

Ĉ $U_n \longrightarrow 0$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, |U_n| \leq \varepsilon'$

Soit $n \geq N_0$

On a $\begin{cases} |U_n| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M+1} \\ |A_n| < M \leq M+1 \end{cases}$

Donc $|A_n U_n| \leq \frac{\varepsilon}{M+1} \times (M+1) = \varepsilon$

CCl : on a mq $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, |A_n U_n| \leq \varepsilon$

Lemme 5 (Rétropassage# à la limite dans les inégalités) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

On suppose que $u_n \longrightarrow \ell > 0$

Alors : 1°) $\exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ u_n > 0$

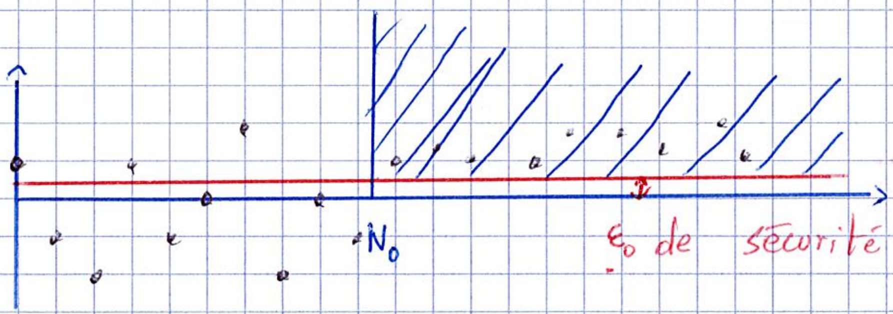
2°) Beaucoup mieux :

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ u_n \geq \varepsilon_0 > 0$$

3) Plus précisement, on a

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ u_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$$

d^n



D/ Mq 3) d^n

On pose $\varepsilon := \frac{\ell}{2}$

Ĉ $u_n \longrightarrow \ell$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$,

$|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Soit $n \geq N_0$. On a donc $\underbrace{\ell - \varepsilon}_{= \frac{\ell}{2}} \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

Een particulier $u_n \geq \frac{\ell}{2}$ ■

Lemme 6

$u_n \longrightarrow \ell \implies |u_n| \longrightarrow |\ell|$

D/ idée : On utilise $\leqslant$ triang. renversée.

Soit $\varepsilon > 0$, $\hat{C}$ $u_n \longrightarrow \ell$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geqslant N_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

Rappel : $\big| |a| - |b| \big| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|$

On a donc :

$\forall n \geqslant N_0, \quad \big| |u_n| - |\ell| \big| \leqslant \varepsilon.$

CCl $|u_n| \longrightarrow |\ell|$ ▨

6) Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, soient $\ell, \ell' \in \mathbb{C}$

a) Somme

Prop : $\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow \ell \\ w_n \longrightarrow \ell' \end{array}\right\} \implies u_n + w_n \longrightarrow \ell + \ell'$

D/ Soit $n \in \mathbb{N}$

On a

$$|(u_n + w_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (w_n - \ell')|$$

$$\leq |u_n - \ell| + |w_n - \ell'| \leq 2 \max(|u_n - \ell|, |w_n - \ell'|)$$

Astuce (AC)

Comme $u_n \longrightarrow \ell$ et $w_n \longrightarrow \ell'$, on a $\begin{cases} |u_n - \ell| \longrightarrow 0 \\ |w_n - \ell'| \longrightarrow 0 \end{cases}$

D'après le lemme 2 : $\max(|u_n - \ell|, |w_n - \ell'|)$ tend vers 0.

Or la suite $(2)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après le lemme 1, on a $2 \max(|u_n - \ell|, |w_n - \ell'|) \longrightarrow 0$

Par le lemme de contrôle (AC), on en déduit :

$$u_n + w_n \longrightarrow \ell + \ell' \quad \blacksquare$$

b) Produit

Prop : $\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow \ell \\ w_n \longrightarrow \ell' \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \times w_n \longrightarrow \ell \times \ell'$

D/ Soit $n \in \mathbb{N}$

Transfo jolie à connaître

OFAA $(u_n - \ell)$

On a $u_n w_n - \ell \times \ell' = (u_n - \ell) w_n + \ell w_n - \ell \times \ell'$

$= (u_n - \ell) w_n + \ell (w_n - \ell')$ ☺

Donc $|u_n w_n - \ell\ell'| \leq |w_n|\,|u_n - \ell| + |\ell| \cdot |w_n - \ell'|$

Comme $(w_n)_n \xrightarrow{CV}$, on a $(w_n)_n$ bornée (Lemme 1)

Comme $u_n \longrightarrow \ell$, on a $|u_n - \ell| \longrightarrow 0$

D'après le lemme 4 : $|w_n| \cdot |u_n - \ell| \longrightarrow 0$

De même : $|\ell|\,|w_n - \ell'| \longrightarrow 0$

D'après a) :

$$|w_n|\,|u_n - \ell| + |\ell|\,|w_n - \ell'| \longrightarrow 0$$

Par le lemme de contrôle, on a $u_n w_n \longrightarrow \ell\ell'$ ∎

AC

c) Scalairisation

Prop : $u_n \longrightarrow \ell \Rightarrow \lambda u_n \longrightarrow \lambda \ell$

D/ on applique b) avec $(u_n)_n$ et la suite constante $(\lambda)_n$ ∎

d) Un corollaire important et sa réciproque F^{++}

Corollaire

$$(u_n)_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$$

D/ Fixons ℓ tq $u_n \longrightarrow \ell$

Par extraction, $u_{n+1} \longrightarrow \ell$

Par c), $-u_n \longrightarrow -\ell$

Par a) : $u_{n+1} + (-u_n) \longrightarrow \ell + (-\ell)$

Ie $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$ ∎

Rq : La suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ est appelée # la suite des pas de $(u_n)_n$

On dit que $(u_n)_n$ piétine $\underset{ssi}{\Delta}$ $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$

Fait !! ∞ ♛

1) $(U_n)_n$ piétine
ie si $U_{n+1} - U_n \longrightarrow 0$ $\Big\}$ $\not\Longrightarrow$ $(U_n)_n \xrightarrow{CV}$ F

Contrex :
- suite harmonique
- $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$; $(\log_a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ $a > 1$

2) Mieux ! il est possible d'avoir

$(U_n)_n$ piétine et $U_n \longrightarrow +\infty$

D/[1] On a $\sqrt{n} \longrightarrow +\infty$

et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

Ĉ $\sqrt{n} \longrightarrow +\infty$, $\sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \to 0$

Par encadrement : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \longrightarrow 0$ ∎

D/[2] • On a $\ln(n) \longrightarrow +\infty$

et $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

• On a $1 + \dfrac{1}{n} \longrightarrow 1$

• Ĉ $\ln(\cdot)$ est continue en 1, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \ln(1)$

ie $\ln(n+1) - \ln(n) \longrightarrow 0$ ∎

Rq : • Posons pour $n \geq 1$: $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

(On a $\forall n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

• Il est evident que $(H_n)_n$ piétine car

$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$

• Prop : $H_n \longrightarrow +\infty$

(D/ cf exo 21.10)

• Rq : $H_{1\,000\,000\,000} \simeq 21,30$

e) inverse

Prop : $\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow \ell \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ 1) $\frac{1}{u_n}$ est définie APCR

2) $\frac{1}{u_n} \longrightarrow \frac{1}{\ell}$

D/ 1) Mq $u_n \neq 0$ APCR

on passe au module $|\cdot|$

On a $|u_n| \longrightarrow |\ell| > 0$ car $\ell \neq 0$

(Lemme 6)

Grace au lemme 5, je sais que $|u_n| > 0$ APCR

Donc $u_n \neq 0$ APCR

2) Fixons donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, u_n \neq 0$

Soit $n \geq N_0$. Écrivons

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - u_n}{\ell \cdot u_n}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell \cdot u_n|}$$

- Déjà, on a $|u_n - \ell| \longrightarrow 0$

- Mq $\left(\frac{1}{|\ell u_n|}\right)_n$ est bornée

Principe : Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$

$\left(\frac{1}{a_n}\right)_n$ bornée $\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \varepsilon_0$

D/ AF/AC/EXO

C $|u_n| \longrightarrow |\ell| > 0$, fixons $\varepsilon_0 > 0$ et $N_1 \in \mathbb{N}$

tq $\forall n \geq N_1, |u_n| \geq \varepsilon_0$

Donc : $\forall n \geq N_1, |\ell u_n| \geq \varepsilon_0 |\ell| > 0$

Donc : $\forall n \geq N_1, \frac{1}{|\ell u_n|} \leq \frac{1}{\varepsilon_0 |\ell|}$

CCl : la suite $\left(\frac{1}{|\ell u_n|}\right)_{n \geq N_0}$ est bornée

D'après le lemme h : $\frac{|u_n - \ell|}{|\ell u_n|} \longrightarrow 0$

• Par contrôle, on a $\frac{1}{u_n} \longrightarrow \frac{1}{\ell}$ ■

(AC)

f) Quotient

Prop : $\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow \ell \\ w_n \longrightarrow \ell' \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{u_n}{w_n} \longrightarrow \frac{\ell}{\ell'}$

D/ Par e), on a $\frac{1}{w_n} \longrightarrow \frac{1}{\ell'}$

Par b), on a donc $u_n \times \frac{1}{w_n} \longrightarrow \ell \times \frac{1}{\ell'}$ ■

g) Une forme indéterminée (FI)

Fait !

$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow 1 \\ a_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \overset{F^{tt}}{\not\Longrightarrow} u_n^{a_n} \longrightarrow 1$

Ctrex ! On a $1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1$

et $n \longrightarrow +\infty$

Mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$ (D/ à connaître)

■

Rq : Sinon on aurait $\ln\left(u_n^{a_n}\right) \longrightarrow \ln(1)$

ie $\underset{+\infty}{a_n} \underset{\to 0}{\boxed{\ln(\overset{\to 1}{u_n})}} \longrightarrow 0$ ■

7) Convergence dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Prop : Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, Alors

$$z_n \longrightarrow \lambda \iff \begin{cases} Re(z_n) \longrightarrow Re(\lambda) \\ Im(z_n) \longrightarrow Im(\lambda) \end{cases}$$

Exemple :

$$\frac{3n + n^2 i - 8}{5n^2 - 2n + 3} \longrightarrow \frac{1}{5} i$$

$$Im(\cdot) = \frac{n^2}{5n^2 - 2n + 3} \longrightarrow \frac{1}{5}$$

$$Re(\cdot) = \frac{3n - 8}{5n^2 - 2n + 3} \longrightarrow 0$$

D/ $\Leftarrow$ Osq $Re(z_n) \longrightarrow Re(\lambda)$

$Im(z_n) \longrightarrow Im(\lambda)$

Par operation, on a $Re(z_n) + i\,Im(z_n) \longrightarrow Re(\lambda) + i\,Im($

$$\underbrace{Re(z_n) + i\,Im(z_n)}_{z_n} \longrightarrow \underbrace{Re(\lambda) + i\,Im(\lambda)}_{\lambda}$$

Osq $z_n \longrightarrow \lambda$

$(\Rightarrow)$ On a $|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(\lambda)|$

$$= |\mathrm{Re}(z_n - \lambda)| \leq |z_n - \lambda|$$

Ĉ $z_n - \lambda \longrightarrow 0$, par contrôle, on conclut

AC

- Ĉ $z_n \longrightarrow \lambda$, on a $iz_n \longrightarrow i\lambda$

Donc d'après ce qui précède, $\mathrm{Re}(iz_n) \longrightarrow \mathrm{Re}(i\lambda)$

ie $-\mathrm{Im}(z_n) \longrightarrow -\mathrm{Im}(\lambda)$

Donc $\mathrm{Im}(z_n) \longrightarrow \mathrm{Im}(\lambda)$ ∎

8) Passage à la limite dans les inégalités larges

a) Un lemme

Lemme : (T)

$$\left.\begin{array}{l} \forall n,\ a_n \geq 0 \\ a_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geq 0$$

D/ Osq $\forall n$, $a_n \geq 0$ et osq $a_n \longrightarrow \ell$

Mq $\ell \geq 0$

ORPA et Osq $\ell < 0$

On a $-\ell > 0$ et $\boxed{-a_n \longrightarrow -\ell > 0}$

Par le lemme 5 : $\boxed{\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,\ -u_n > 0}$

Donc : $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,$ $\boxed{u_n < 0 \quad \text{Absurde}}$ ■

<u>Rq</u> : On a une version un peu plus générale :

Lemme :
$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0 \ \text{APCR} \\ a_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geq 0$$

b) Corollaires

<u>Corollaire</u> : (T)

1) $$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geq M \\ u_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geq M$$

2) $$\left.\begin{array}{l} u_n \geq M \quad \text{APCR} \\ u_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geq M$$

<u>D/</u> On considère $(w_n)_{n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ déf par

$$\forall n,\ w_n = u_n - M$$

On a $w_n \geq$ APCR et $w_n \longrightarrow \ell - M$

Donc d'après a), $\ell - M \geq 0$ ie $\ell \geq M$ ■

<u>Rq</u> : De même en " $\leq$ "

D/ T

- $w_n = -u_n$
- $u_n \leq M \longrightarrow -u_n \geq -M$ ie $w_n \geq -M$
- $\lim\limits_{n \to \infty} w_n \geq -M$ ie $-\ell \geq -M$ ie $\ell \leq M$ ■

Corollaire

Soient $(u_n)_n , (w_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors

1) $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq w_n \\ u_n \to \ell \\ w_n \to \ell' \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \leq \ell'$

2) $\left.\begin{array}{l} u_n \leq w_n \quad \text{APCR} \\ u_n \to \ell \\ w_n \to \ell' \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \leq \ell'$

D/

- $t_n := w_n - u_n$
- $t_n \longrightarrow \ell' - \ell$
- $t_n \geq 0$ APCR donc $\ell' - \ell \geq 0$ ■

c) C'est F pour <

A-t-on $\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \\ u_n \longrightarrow \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \ell > 0$?

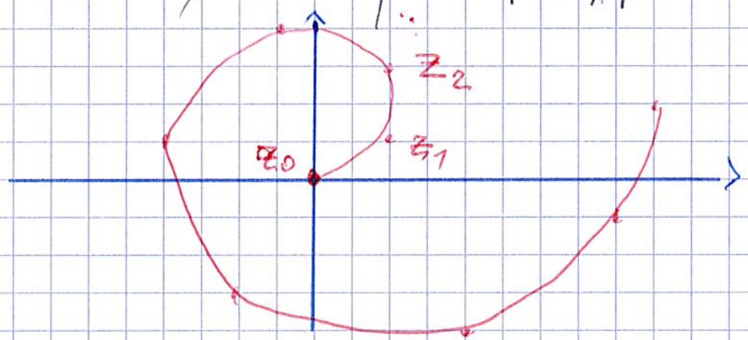
C'est faux en général

D/ $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ mais $\forall n,\ \frac{1}{n} > 0$ ■

V Limite : cas infini $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

⚠ Si $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, dire $z_n \longrightarrow +\infty$ n'a aucun sens.

(À la limite, dire que $|z_n| \longrightarrow +\infty$ a un sens)



Par ex : $(n e^{in\theta_0})_{n \in \mathbb{N}}$, $\theta_0 > 0$

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1) Droite réelle achevée

On pose $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Ici, " $+\infty$ ", " $-\infty$ " ne sont que des symboles

2) Définition

Déf° : On dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$

et on note $u_n \longrightarrow +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

(ou etc) $\overset{\Delta}{ssi}$:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, u_n \geq A$$

• De même : $u_n \longrightarrow -\infty$ $\overset{\Delta}{ssi}$:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, u_n \leq A$$

Rq : • On a aussi

$u_n \longrightarrow +\infty \iff \forall A \geq 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,$

$u_n \geq A$

• On a $u_n \longrightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, u_n \geq A$

APCR

• De façon surprenante, il est non trivial que

$$n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

<u>Fait</u> : On a $n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$

<u>D/</u> Soit $A \in \mathbb{R}$.

On cherche $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$, $n \geq A$

On prend $N_0 = |\lceil A \rceil| \in \mathbb{N}$

Soit $n \geq N_0$, on a $n \geq N_0 = |\lceil A \rceil| \geq \lceil A \rceil \geq A$

On a mq $n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ ∎

(On dit ~~ℝ~~ que ℝ est un corps archimédien ?)

3) Premiers résultats

<u>Fait</u> : $u_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow (u_n)_n$ n'est pas majorée

$$\Downarrow$$

$(u_n)_n$ n'est pas bornée.

D/ Osq $u_n \longrightarrow +\infty$

Mq $(U_n)_n$ n'est pas majorée

ORPA et osq $(u_n)_n$ est majorée, on fixe

$M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

On prend aussi " $A := M+1$ " dans la déf° de $u_n \longrightarrow +\infty$

Fixons alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq N_0, \quad u_n \geq M+1$

On a $M \geq U_{N_0} \geq M+1$

C'est absurde ∎

Rq : De mê avec $u_n \longrightarrow -\infty$

Fait Ⓣ : $u_n \longrightarrow +\infty \implies u_{\varphi(n)} \longrightarrow +\infty$

où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice.

D/ Ⓣ Soit $A \in \mathbb{R} \longrightarrow$ On Fixe N_0 tq $(\dots)$ $u_n \geq A$.

Or Ⓣ $\varphi(n) \geq n$

Si $n \geq N_0$ alors $\varphi(n) \geq N_0$ et donc

$u_{\varphi(n)} \geq A$

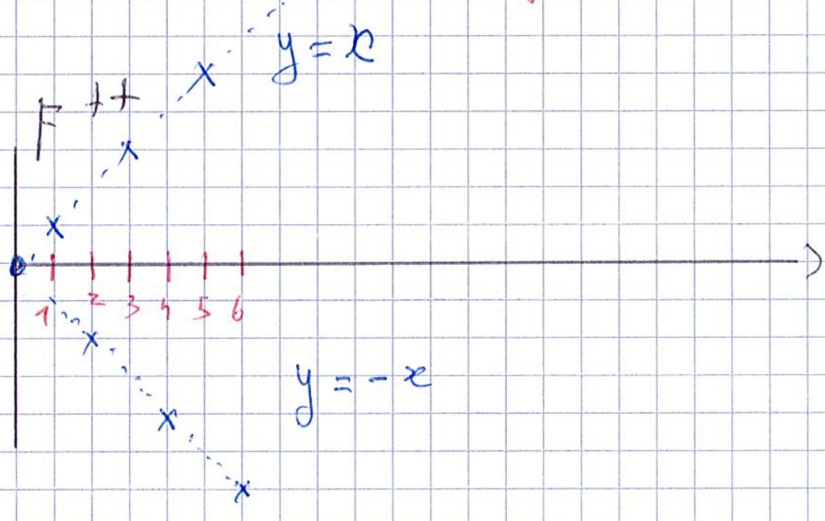
<u>ccl</u> : On a $\forall A \,;\, \exists N_0 : \forall n \geq N_0 ,$ ~~$u_{\varphi(n)}$~~

$u_{\varphi(n)} \geq A$ i.e. $u_{\varphi(n)} \longrightarrow +\infty$ ■

<u>Question</u> :

A-t-on $(u_n)_n$ non majorée $\Rightarrow$ $u_n \longrightarrow +\infty$?

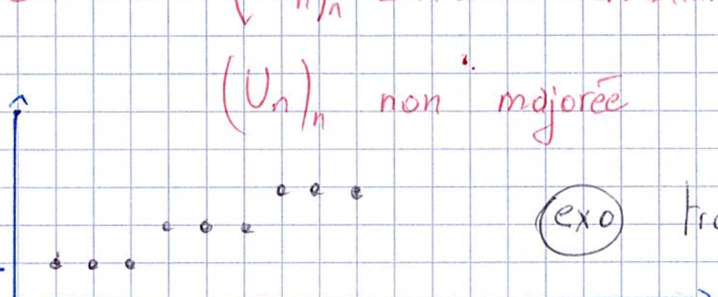
C'est F



Ici on a pris $\left((-1)^{n+1} n\right)_{n \geq 0}$

- On a $(u_n)_n$ strictement croissante / croissante et $(u_n)_n$ non majorée $\Bigg\} \Rightarrow u_n \longrightarrow +\infty$

<u>Ex</u> :



exo trouver une f^mule explicite

• $U_n \longrightarrow +\infty \Longrightarrow (U_n)_n$ croissante APCR

$\triangle^{\infty}$ C'est F en g^{al}

Exo Étudier la monotonie de $\left(n + (-1)^n\right)_{n \geq 0}$

D/ On considère $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ déf par :

$\forall n \geq 0, \quad U_n = n + 2 \cdot (-1)^n$

Alors : 1°) $U_n \longrightarrow +\infty$

(T) $(-1)^n \geq -1$ donc $U_n \geq n-2 \longrightarrow +\infty$

2°) Mq $(U_n)_n$ n'est pas croissante APCR

ORPA et on fixe N_0 tq $(U_n)_{n \geq N_0} \nearrow$

Ĉ $2N_0 \geq N_0$, on a donc $U_{2N_0+1} \geq U_{2N_0}$

ie $2N_0 + 1 + 2(-1)^{2N_0+1} \geq 2N_0 + 2(-1)^{2N_0}$

ie $2N_0 - 1 \geq 2N_0 + 2$

absurde ■

Prop : 1) $\left.\begin{array}{l} U_{2n} \longrightarrow +\infty \\ U_{2n+1} \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow U_n \longrightarrow +\infty$

2) $U_{n+1} \longrightarrow +\infty \Longrightarrow U_n \longrightarrow +\infty$

D/ ok

Rq : De même pour $-\infty$

Prop : (unicité généralisée de la limite)

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow \ell_1 \\ u_n \longrightarrow \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

D/ • si $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$: ok

• si $\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$: c'est absurde car :

$u_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow u_n$ n'est pas majorée

$u_n \xrightarrow{CV} \cancel{\ell} \Rightarrow u_n$ bornée

• si $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 = +\infty$

C'est absurde car $u_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow u_n \geq 0$ APCR
("A=0")

$\Rightarrow (u_n)_n$ minorée APCR $\Rightarrow (u_n)_n$ minorée

et $u_n \longrightarrow -\infty \Rightarrow (u_n)_n$ n'est pas minorée ■

Bilan :

Si $u_n \longrightarrow +\infty$, ou $u_n \longrightarrow -\infty$ ou si $(u_n)_n \xrightarrow{CV}$

on peut définir $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$: c'est

l'unique $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tq $u_n \longrightarrow \ell$

4) Opération sur les limites

- $\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow +\infty \\ (w_n)_n \xrightarrow{CV} \end{array}\right\} \Rightarrow U_n + w_n \longrightarrow +\infty$

- <u>Mieux</u> : $\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow +\infty \\ (w_n)_n \text{ bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow U_n + w_n \longrightarrow +\infty$

- <u>Mieux</u> : $\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow +\infty \\ (w_n)_n \text{ minorée} \end{array}\right\} \Rightarrow U_n + w_n \longrightarrow +\infty$

- $\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow +\infty \\ w_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow U_n \times w_n \longrightarrow +\infty$

- $\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow +\infty \\ w_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow U_n \times w_n \longrightarrow +\infty$

- $\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow +\infty \\ w_n \longrightarrow \ell > 0 \end{array}\right\} \dfrac{U_n}{w_n} \longrightarrow +\infty$

- $\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow +\infty \\ w_n < 0 \quad \text{APCR} \end{array}\right\} \cancel{\Rightarrow} U_n \cdot w_n \longrightarrow -\infty$

F en g^al^

<u>ctrex</u> $U_n = n$

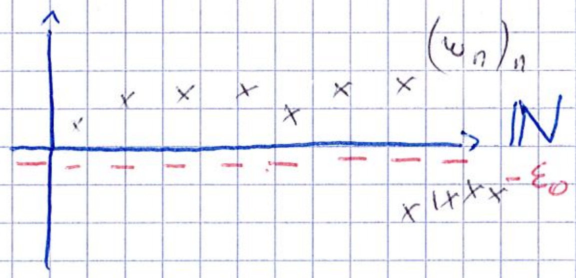
$w_n = -\dfrac{1}{n}$ on a $U_n \times w_n = -1$

donc $U_n \times w_n \not\longrightarrow -\infty$

• <u>Mais</u> $\quad u_n \longrightarrow +\infty$

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \; : \; \left(w_n \leq -\varepsilon_0 \text{ APCR}\right)$$

d^n



• $\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow \ell > 0 \\ w_n \longrightarrow 0 \\ w_n > 0 \text{ APCR} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{U_n}{w_n} \longrightarrow +\infty$

peut être noté (à éviter) $\quad w_n \longrightarrow 0^+$

• $\left.\begin{array}{l} U_n \longrightarrow 0 \\ U_n > 0 \text{ APCR} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{U_n} \longrightarrow +\infty$

• $U_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{U_n} \longrightarrow 0$

• (etc ...) voir lycée

<u>D/</u> ok ■

VI Théorèmes de convergence

1) Convergence par encadrement ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Prop : Soient $(m_n)_n$, $(u_n)_n$, $(M_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Alors :

1) $$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ m_n \leq u_n \leq M_n \\ m_n \longrightarrow \ell \\ M_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \to \ell$$

2) $$\left.\begin{array}{l} m_n \leq u_n \leq M_n \text{ APCR} \\ m_n \longrightarrow \ell \\ M_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \longrightarrow \ell$$

Rq : Subtilité de rédaction (AC)

L'énoncé suivant sera considéré c' F ou incomplet

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ m_n \leq u_n \leq M_n \\ \boxed{\lim\limits_{n \to \infty} m_n} = \lim\limits_{n \to \infty} M_n \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to \infty} u_n} = \lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} M_n$$

m̂ problème

Je n'ai pas le droit d'écrire " $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ " si je n'ai pas dit avant que $(u_n)_n \xrightarrow{CV}$

Ex : On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $2-\frac{1}{n} \leq U_n \leq 2+\frac{1}{n}$

Ĉ $\lim\limits_{n\to\infty} 2-\frac{1}{n} = \lim 2+\frac{1}{n} = 2$, on a

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 2$ ✗ RI

existence de $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

Bonne version

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2-\frac{1}{n} \leq U_n \leq 2+\frac{1}{n}$

Ĉ $2-\frac{1}{n} \longrightarrow 2$ et $2+\frac{1}{n} \longrightarrow 2$, on a $U_n \longrightarrow 2$

D/ Osq $m_n \longrightarrow l$ et $m_n \leq U_n \leq M_n$ APCR
$M_n \longrightarrow l$

Fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$, $m_n \leq U_n \leq M_n$

Soit $\varepsilon > 0$

Ĉ $m_n \longrightarrow l$, fixons $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$,

$|m_n - l| \leq \varepsilon$

De m̂ fixons $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2$, $|M_n - l| \leq \varepsilon$

Idée : $|m_n - l| \leq \varepsilon \iff l-\varepsilon \leq m_n \leq l+\varepsilon$

Posons $N_3 := \max(N_0, N_1, N_2)$.

Soit $n \geq N_3$. On a

$$\ell - \varepsilon \underset{n \geq N_1}{\leq} m_n \underset{n > N_0}{\leq} u_n \underset{n > N_0}{\leq} M_n \underset{n \geq N_2}{\leq} \ell + \varepsilon$$

Ainsi : $\forall n \geq N_3, \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

Donc $u_n \longrightarrow \ell$ ■

2) Divergence par minoration

__Prop__ :

1) $$\left.\begin{array}{l} u_n \geq m_n \quad \text{APCR} \\ m_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \longrightarrow +\infty$$

2) $$\left.\begin{array}{l} u_n \leq M_n \quad \text{APCR} \\ M_n \longrightarrow -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \longrightarrow -\infty$$

__D/__ ok ■

3) Application : limite des suites géométriques

a) Cas facile

Proposition : Soit $a \in \mathbb{C}$

1) $a > 1 \Rightarrow a^n \longrightarrow +\infty$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

2) $|a| < 1 \Rightarrow a^n \longrightarrow 0$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$

D/ 1) On utilise l'$\leqslant$ de Bernoulli Qsq $a > 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ (où $\alpha > 0$)

D/ (T) $(1+\alpha)^n \overset{\text{Newton}}{=} 1 + n\alpha + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2}_{>0} + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\alpha^3}_{>0} + \dots$

$\dots + \underbrace{n\alpha^{n-1}}_{>0} + \underbrace{\alpha^n}_{>0}$

Astuce

$a^n = (1+\alpha)^n$

où $\alpha = a-1$

$\mathcal{C}$ $a > 1$, on a $\alpha > 0$

Or $n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$

et $\alpha > 0$, donc

$n\alpha \longrightarrow +\infty$

Donc $1 + n\alpha \longrightarrow +\infty$

Par minoration, $a^n \longrightarrow +\infty$

2) Osq $|a| < 1$

Astuce : $|a^n| = |a|^n = \dfrac{1}{\frac{1}{|a|^n}}$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n}$$

or $\frac{1}{|a|} > 1$. Donc d'après 1) :

on a $\left(\frac{1}{|a|}\right)^n \longrightarrow +\infty$

Donc $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} \longrightarrow 0$

CCl : $|a^n| \longrightarrow 0$; donc $a^n \longrightarrow 0$ ■

R^x

b) Cas limite

Rq : $((-1)^n)_n$ n'a pas de limite

- $(-1)^n \not\longrightarrow +\infty$ car $((-1)^n)_n$ bornée
- de m̂ : $(-1)^n \not\longrightarrow -\infty$
- Mq $((-1)^n)_n$ diverge

ORPA et on fixe $\ell \in \mathbb{R}$ tq $(-1)^n \longrightarrow \ell$

idée
on extrait

Par extraction, on a $(-1)^{2n} \longrightarrow \ell$

$\hat{C}$ $\forall n$, $(-1)^{2n} = 1$, on a aussi $(-1)^{2n} \longrightarrow 1$

Par unicité de la limite $\boxed{P = 1}$

De m̂, on a $(-1)^{2n+1} \longrightarrow P$ et $(-1)^{2n+1} \longrightarrow -1$

Donc $P = -1$, Donc $\boxed{1 = -1}$ Absurde. ■

<u>Prop</u> : Soit $a \in \mathbb{C}$ tq $|a| = 1$

alors $(a^n)_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow a = 1$

<u>D/</u> Osq $(a^n)_n \xrightarrow{CV}$

!! R On a donc $a^{n+1} - a^n \longrightarrow 0$

Donc $a^n(a-1) \longrightarrow 0$

Donc $|a^n(a-1)| \longrightarrow 0$ ie $a - 1 \longrightarrow 0$

$|a| = 1$

$\hat{C}$ $a - 1 \longrightarrow a - 1$. Par unicité de la limite : $a - 1 = 0$ ie $a = 1$ ■

4) Théorème de la limite monotone

a) Le Théorème

Th :

1) $(U_n)_n$ croissante APCR
$(U_n)_n$ majorée APC
$\Rightarrow (U_n)_n$ converge

2) On a alors en notant $\ell := \lim_{n\to\infty} U_n$:

$$(\forall n \in \mathbb{N},)\ U_n \leq \ell \quad \text{APCR}$$

D/ Osq $(U_n)_n \nearrow$ et (U_n) majorée

Posons $A := \{U_n \, ; \, n \in \mathbb{N}\}$ l'ens. des valeurs prises par $(U_n)_n$

On a $A \neq \emptyset$ car $U_0 \in A$

et, A majorée car $(U_n)_n$ l'est

Posons donc $\ell := \sup(A)$

Mq $U_n \longrightarrow \ell$

Soit $\varepsilon > 0$

Par caractérisation "à la ε" de ℓ, on sait que :

$\boxed{\exists a_0 \in A}$: $\ell - \varepsilon < a_0 \leq \ell$

ie $\exists N_0 \in \mathbb{N}$: $\ell - \varepsilon < U_{N_0} \leq \ell$

Soit $n \geq N_0$ $\boxed{\to \text{qui est } N_0 ?}$

Fixons un tel N_0

Soit $n \geq N_0$

- Déjà, on a $U_n \in A$ donc $U_n \leq \sup(A) = \ell$
- Ensuite : $n \geq N_0$ et $(U_n)_n \nearrow$, on a

$$\ell - \varepsilon \leq U_{N_0} \leq U_n$$

- Ainsi, on a $\ell - \varepsilon \leq U_n \leq \ell$

Ainsi, $U_n \longrightarrow \ell$

2) On a $\ell = \sup A = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq \ell$ ■

b) alternative pour les suites croissantes.

Corollaire

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante. Alors :

1) Si $(U_n)_n$ majorée : elle $\xrightarrow{CV}$

2) Si elle n'est pas majorée : $U_n \longrightarrow +\infty$

D/ 1) Osq $(U_n)_n$ majorée ok

2) Osq $(U_n)_n$ non majorée Mq $U_n \longrightarrow +\infty$

Soit $A \in \mathbb{R}$

Ĉ $(U_n)_n$ n'est pas majorée :

$\exists N_0 \in \mathbb{N} : U_{N_0} > A$

Fixons un tel $N_0 \in \mathbb{N}$

Soit $n > N_0$

Ĉ $(U_n)_n \nearrow$, on a

$U_n \geq U_{N_0}$

Donc $\forall n \geq N_0$, $U_n \geq A$

Ainsi, $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \quad U_n \geq A$

Ie $U_n \longrightarrow +\infty$

5) Suites Adjacentes

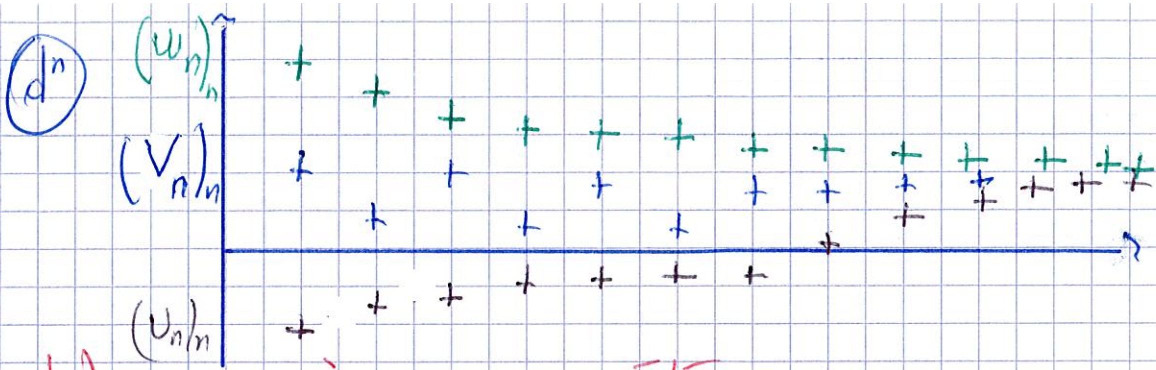
a) Def°

Def° : Soient $(U_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que ces suites sont adjacentes ssi

1) $(U_n)_n \nearrow$

2) $(w_n)_n \searrow$

3) $w_n - U_n \longrightarrow 0$



b) premières propriétés

Lemme !! : $\left.\begin{array}{l} a_n \longrightarrow 0 \\ (a_n)_n \text{ décroit} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall n,\ a_n \geq 0$

D/ ORPA et Osq non $(\forall n, a_n \geq 0)$ ie

Osq $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $a_{n_0} < 0$ $\quad$ (et $a_n \to 0$, et $(a_n)_n \searrow$)

Fixons un tel $n_0 \in \mathbb{N}$

Ĉ $(a_n)_n \searrow$, on a $\forall n \geq n_0,\ a_n \leq a_{n_0}$

Ĉ $a_n \longrightarrow 0$, en passant à la limite, on obtient

$$0 \leq a_{n_0} \cancel{<0}$$

C'est absurde $\blacksquare$

car $a_{n_0} < 0$ $\quad$ CR

Corollaire

Soient $(U_n)_n$, $(W_n)_n$ adjacentes

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq W_n$

D/ $\hat{C}$ $(w_n)_n \searrow$ et $\subset$ $(u_n)_n \nearrow$, on a

$(w_n - u_n)_n \searrow$

Or $w_n - u_n \longrightarrow 0$

Donc $\forall n,\ w_n - u_n \geq 0$ ∎

c) Le Théorème

Th : Soit $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ adjacentes

Alors $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} u_n \longrightarrow \ell \\ w_n \longrightarrow \ell \end{cases}$

d^n

D/ • Mq $(u_n)_n$ majorée

- Déjà $\forall n,\ u_n \leq w_n$
- Ensuite, $\subset$ $(w_n)_n \searrow$, on a $\forall n,\ w_n \leq w_0$
- donc $\forall n,\ u_n \leq w_0$

• $\hat{C}$ $(u_n)_n \nearrow$, on a $(u_n)_n \xrightarrow{CV}$. Notons ℓ_1 sa limite

- De $\widehat{m}$, $(w_n)_n \xrightarrow{CV}$, notons ℓ_2 sa limite
- On a par opérations : $w_n - u_n \longrightarrow \ell_2 - \ell_1$

et par hyp $w_n - u_n \longrightarrow 0$

- Donc (par unicité de la limite) :

$$\ell_2 - \ell_1 = 0 \quad \text{ie} \quad \ell_1 = \ell_2$$

b) Théorème de Bolzano - Weierstrass

a) Cas réel

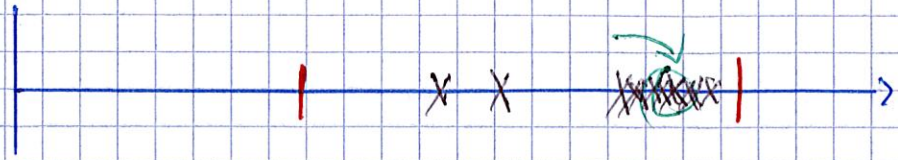
> **Th** : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée
>
> Alors, on peut extraire de $(u_n)_n$ une suite convergente

Rq : • Formellement, la ccl est

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ extractrice } (\nearrow\nearrow) : \left(u_{\varphi(n)}\right)_n \xrightarrow{CV}$$

- Vocabulaire : une suite extraite est aussi appelée sous-suite
- Aussi : Hte suite bornée admet une suite convergente

d^n



D/ Fixons $a \leq b$ tq

$$\forall n, \; a \leq u_n \leq b$$

Construisons l'extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ par rec

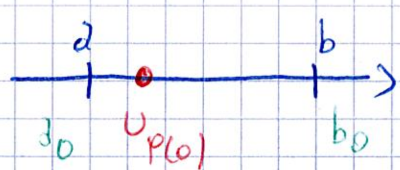
On procède par dichotomie

On construit en + deux suites auxiliaires $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$

$n=0$ Je pose $a_0 := a$ et $\varphi(0) := 0$

$b_0 := b$

d^n



Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$

On suppose que tous les termes ont été construits, donc

$$\left(a_0, a_1, \dots, a_n \; ; \; b_0, b_1, \dots, b_n \; ; \; \varphi(0), \dots, \varphi(n)\right)$$

vérifient les propriétés :

1) $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$

2) $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ i.e. $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \nearrow$

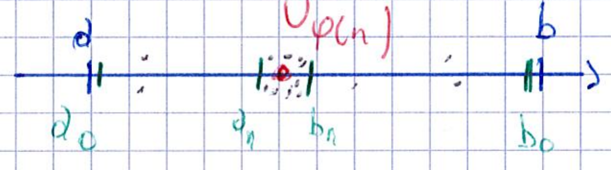
3) $b_n < b_{n-1} < \cdots < b_0$ i.e. $(b_i)_{0 \leq i \leq n} \searrow$

4) $\forall i,\ b_{i+1} - a_{i+1} = \dfrac{b_i - a_i}{2}$

5) $\forall i,\ a_i \leq u_{\varphi(i)} \leq b_i$

6) la suite $(u_k)_k$ prend une $\infty^{té}$ de valeurs entre a_n et b_n

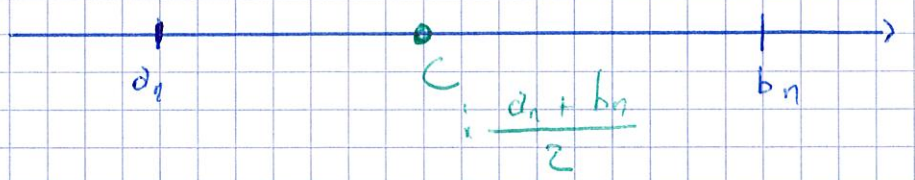
d^n



6) la suite $(u_k)_k$ prend une $\infty^{té}$ de fois ses valeurs entre a_n et b_n (pour $k \geq \varphi(n)$)

Construisons a_{n+1}, b_{n+1} et $\varphi(n+1)$ vérifient 1) 2) ... 6)

d^n zoom



On note $E := \{ k \geq \varphi(n) \mid u_k \in [a_n ; b_n] \}$

Je sais par 6) que E infini

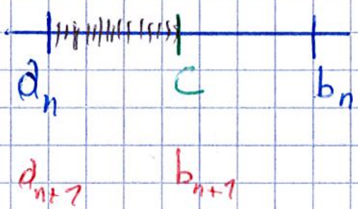
On note $F := \{k \geq \varphi(n) \mid a_n \leq u_k \leq c\}$

$G := \{k \geq \varphi(n) \mid c \leq u_k \leq b_n\}$

On a $E = F \cup G$

Donc (A) car E est infini, F ou G est infini

- Si F est infini d^n



On pose $\begin{cases} a_{n+1} := a_n \\ b_{n+1} := c \end{cases}$

Déjà, on a 2), on a 3), on a 4)

car F est infini, $F \neq \emptyset$, de + $F \subset \mathbb{N}$

On pose $\varphi(n+1) := \min(F)$

Tte partie $\neq 0$ de $\mathbb{N}$ admet un + petit élément

On a $\varphi(n+1) \in F$, donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$

et on a $a_n \leq u_{\varphi(n+1)} \leq c$ ie $a_{n+1} \leq u_{\varphi(n+1)} \leq b_{n+1}$

Donc on a 4) et 5)

Mq $\{ k > \varphi(n+1) \mid a_{n+1} \leq U_k \leq b_{n+1} \}$

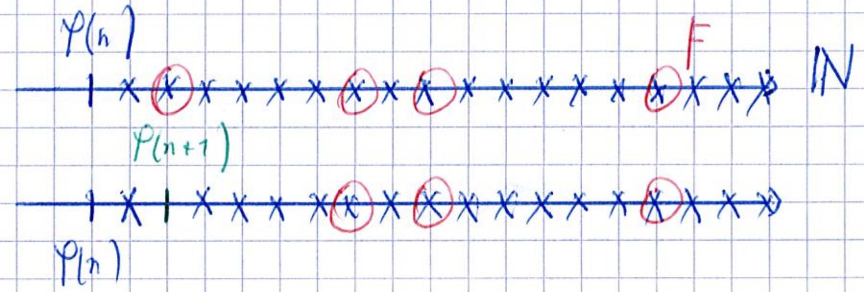
est infini

Je sais que F est infini

et $F = \{ k > \varphi(n) \mid \underset{\substack{\| \\ a_{n+1}}}{a_n} \leq U_k \leq \underset{\substack{\| \\ b_{n+1}}}{c} \}$

On a $H = F \setminus \{ \varphi(n+1) \}$

d^n



Ĉ F est infini, H l'est d'où 6)

- Si F est fini, alors G est infini (...).

Ainsi, on construit deux suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$

et une exctractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tq

1) $\forall n$, $a_n \leq U_{\varphi(n)} \leq b_n$ (par 5))

2) $(a_n)_n \nearrow$ et $(b_n)_n \searrow$ par (2) et 3))

3) $b_n - a_n \longrightarrow 0$ (Mieux : $\forall n$, $a_n - b_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$

CCl : Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$

sont adjacentes (par ② et ③)

Fixons $\ell \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} a_n \longrightarrow \\ b_n \longrightarrow \ell \end{cases}$

Par encadrement, on a $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$ ∎

Rq : L'unicité est fausse.

Ctrex : On cherche $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée

et φ, ψ et $\ell_1 \neq \ell_2$ tq $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell_1$

$u_{\psi(n)} \longrightarrow \ell_2$

On prend $\left((-1)^n\right)$; on a $(-1)^{2n} \longrightarrow 1$

$(-1)^{2n+1} \longrightarrow -1$

• exo !! Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée tq il y ait unicité

$$\left(\forall \quad \left. \begin{array}{l} u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell_1 \\ u_{\psi(n)} \longrightarrow \ell_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2 \right) \text{ alors } (u_n)_n \xrightarrow{CV}$$

- On dit que ℓ est une valeur d'adhérence de $(U_n)_n$ $\overset{\Delta}{\underset{ssi}{}}$ $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \nearrow\nearrow : U_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$

- **Prop* : AC**

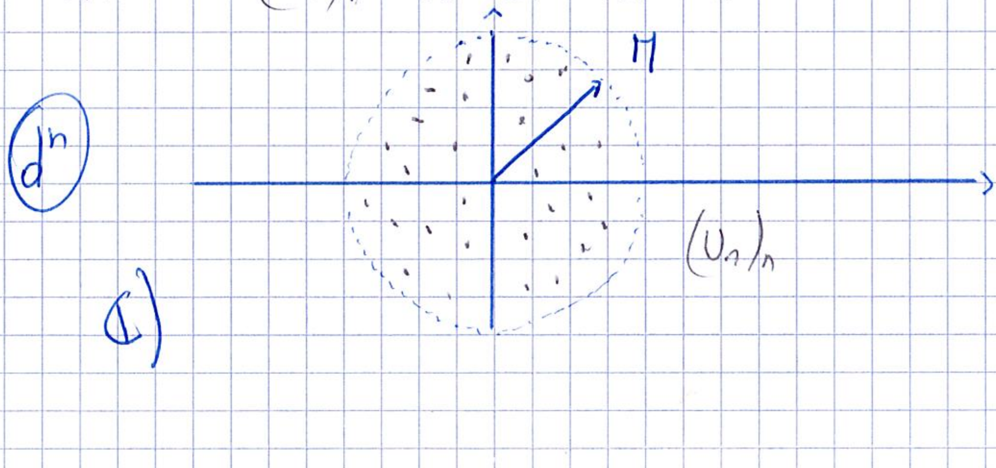
ℓ valeur d'adhérence de $(U_n)_n$ $\iff \forall \varepsilon > 0, \forall N_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq N_0 : |U_n - \ell| \leq \varepsilon$

Rq : $(U_n)_n$ non majorée $\Longrightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \nearrow\nearrow : U_{\varphi(n)} \longrightarrow +\infty$

b) Cas complexe

Th : Soit $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée

Alors $(U_n)_n$ admet une sous-suite convergente



D/ • $\hat{C}$ $(u_n)_n$ bornée : la suite $(Re(u_n))_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

• D'après $BW_{\mathbb{R}}$, fixons $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice et $P_1 \in \mathbb{R}$ tq $Re(u_{\varphi(n)}) \to P_1$

• Je considère $(Im(u_{\varphi(n)}))_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est bornée

• D'après $BW_{\mathbb{R}}$, fixons $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $P_2 \in \mathbb{R}$ tq

$$Im(u_{\varphi(\psi(n))}) \longrightarrow P_2$$

• $\hat{C}$ $Re(u_{\varphi(n)}) \longrightarrow P_1$, par extraction, on a $Re(u_{\varphi(\psi(n))}) \longrightarrow P_1$

• On a $u_{\varphi(\psi(n))} \longrightarrow P_1 + i P_2$ ■

VII P^t de vue séquentiel sur qqs propriétés de $\mathbb{R}$

1) Suites et densité

Prop Soit $A \subset \mathbb{R}$, Alors

A dense dans $\mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$

D/ ($\Leftarrow$) Osq $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$ $(*)$

Mq $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : |a - x| \leq \varepsilon$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$

Grâce à $(*)$, fixons $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \longrightarrow x$

Ĉ $a_n \longrightarrow x$, fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$, $|a_n - x| \leq \varepsilon$

On a : $|a_{N_0} - x| \leq \varepsilon$

On a mq

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : |x - a| \leq \varepsilon$

($\Rightarrow$) c'est + subtil

Je procède par contraposée et $\Rightarrow$ échec

Osq A dense dans $\mathbb{R}$

Mq $(*)$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Je cherche $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to x$

$\boxed{n}$ Je vais sequentialiser (transformation en suite) une $(\forall \varepsilon>0, \exists)$- assertion

On sait que $\forall \varepsilon>0, \exists a \in A : |a-x| \leq \varepsilon$ $(**)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $\varepsilon := \frac{1}{n}$ On a $\varepsilon > 0$

Grâce à $(**)$, on sait que

$\exists a \in A : |a-x| \leq \frac{1}{n}$

Fixons un tel a et notons $a_n \in A$

On dispose maintenant de $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n - x| \leq \frac{1}{n}$$

- Par controle, on a donc $a_n \longrightarrow x$

Ainsi, $\exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow x$

Et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$

D'où $(*)$

Rq : Dans $(\Longrightarrow)$, on peut remplacer $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{2^n}$ pour accélérer la convergence.

2 bornes supérieures et suites

Voilà un résultat très puissant et pratique

<u>Prop</u> : Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide et majorée.

Alors :

1) $\exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \longrightarrow \sup A$

(ie $\sup A$ peut être réalisé en tant que limite d'éléments de A)

2) Mieux : $\exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$: $\begin{cases} (a_n)_n \nearrow \\ (a_n) \longrightarrow \sup A \end{cases}$

3) Encore mieux : Si $\sup A \notin A$, je peux m̂ avoir $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ $\hat{\nearrow}$ tq $a_n \to \sup A$

<u>D/</u>

- Si $\sup A \in A$, on a 2) : On prend la suite constante égale à $\sup A$ ie, $(\sup A)_{n \in \mathbb{N}}$
- Ainsi, Osq $\sup A \notin A$ Mq 3)
- On construit $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ par rec tq

$$\begin{cases} (a_n)_n \ \hat{\nearrow} \\ \forall n, \ |a_n - \sup A| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$n=0$: grâce à la caractérisation à la $\varepsilon>0$ de $\sup A$,

$*$ $$\boxed{\forall \varepsilon>0, \exists a\in A : \sup A - \varepsilon < a < \sup A \quad (\text{car } \sup A \notin A)}$$

avec $\varepsilon := 1$, on choisit $a_0 \in A$ tq

$$\sup A - 1 \leq a_0 \leq \sup A$$

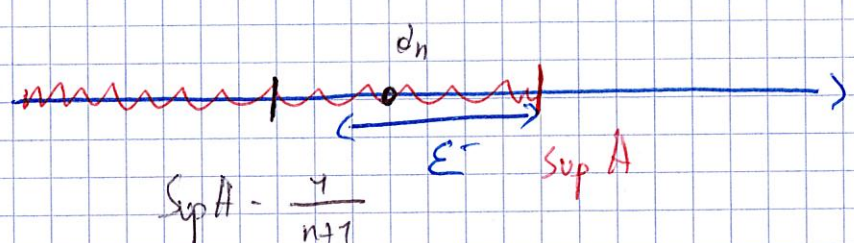
On a bien $|a_0 - \sup A| \leq \frac{1}{0+1}$

Soit $n\in\mathbb{N}$

On suppose $(a_k)_k$ construite jusqu'au rang n.

On a $\sup A - \frac{1}{n+1} \leq a_n < \sup A$; en particulier $\sup A - a_n > 0$

d^n



D'après $(*)$ fixons un element a_{n+1} de A tq $\sup A - \varepsilon < a_{n+1} < \sup A$

$\hat{C}$ $\varepsilon \leq \text{Sup} A - a_n$, on a $a_n \leq \text{Sup} A - \varepsilon$

donc $a_{n+1} > a_n$

$\hat{C}$ $\varepsilon \leq \frac{1}{n+2}$, on a

$$\text{Sup} A - \frac{1}{n+1} < a_{n+1} < \text{Sup} A$$

et donc $|a_{n+1} - \text{Sup} A| \leq \frac{1}{n+2}$

CCl On a construit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}} \nearrow$ et

tq $\forall n$, $|a_n - \text{Sup} A| \leq \frac{1}{n+1}$ donc

tq $a_n \longrightarrow \text{Sup} A$

Application On pose $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$

AF On a $A \neq \emptyset$ et A majoré

Posons donc $\alpha := \sup(A)$

Mq $\alpha \in A$

$\hat{C}$ $\alpha = \text{Sup}(A)$, fixons $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq

$x_n \longrightarrow \alpha$

Par opera° sur les limites, on a

$x_n^2 \longrightarrow \alpha^2$

Or on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^2 \leq 2$, donc par passage à la limite dans les $\leq$ larges, on a :

$\alpha^2 \leq 2$ donc $\alpha \in A$

VIII Suites du type $U_{n+1} = f(U_n)$

Soit $(U_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ définie (par réc) par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{1+U_n} \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

On a $U_0 = 1$, $U_1 = \sqrt{1+U_0} = \sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

$U_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+1}}$ etc

On veut étudier $(U_n)_n$

R* !! On introduit $f : [-1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{1+x}$

On a ∀ $U_{n+1} = f(U_n)$

idée : Les propriétés de f vont se refléter dans celles de $(U_n)_n$.

- Exemples (cf poly)

  - f croissante $\Longrightarrow (U_n)_n$ monotone

D/ Cadre : On se donne un intervalle I ;

$f : I \to \mathbb{R}$, et $(U_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ tq

$\forall n \in \mathbb{N}, \ U_{n+1} = f(U_n)$

Osq $f \nearrow$

Mq f monotone.

On distingue 2 cas.

__1er cas__ : Osq $U_n \geq U_0$. Mq $\forall n, \ U_{n+1} \geq U_n$

rec $n=0$ ok : c'est l'hypothèse

Hérédité (T) : $U_{n+1} \geq U_n \Longrightarrow f(U_{n+1}) \geq f(U_n)$

ie $U_{n+2} \geq U_{n+1}$ $\quad f \nearrow$

__2e cas__ : Osq $U_n \leq U_0$. De m̂, on mq par rec, $(U_n)_n \searrow$

D'où __(R*)__ $(U_n)_n$ def par rec

$\downarrow$

$\exists$? f : (T) $U_{n+1} = f(U_n)$

$\downarrow$

si oui : (R*) J'étudie f

Je dessine f

$U_n \longrightarrow \ell \implies \ell$ est un pt fixe de f

$\begin{pmatrix} \ell \in I \\ f \text{ continue} \end{pmatrix}$ ie $f(\ell) = \ell$

D/ $\hat{C}$ $U_n \longrightarrow \ell$ et $\hat{C}$ $f(\cdot)$ C^0 en ℓ,

On a $f(U_n) \longrightarrow f(\ell)$. De $\oplus$ par extraction, on a $U_{n+1} \longrightarrow \ell$; donc $f(U_n) \longrightarrow \ell$ car $(\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n))$

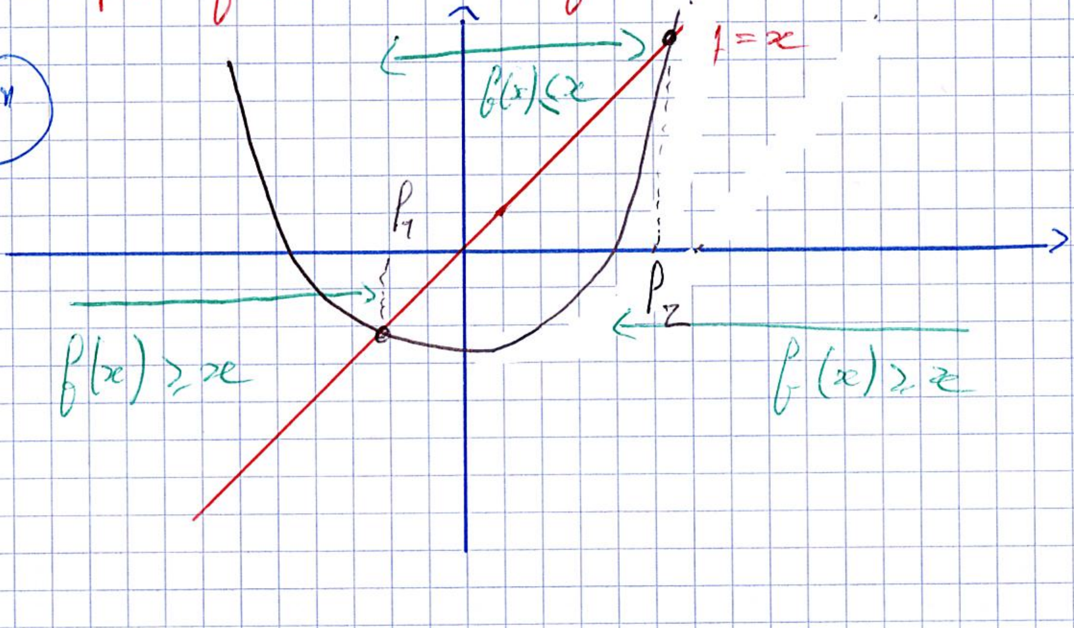
Donc (unicité de la limite) : $f(\ell) = \ell$ ■

- Mq $\left.\begin{matrix} \ell \text{ pt fixe de } f \\ U_0 \leq \ell \end{matrix}\right\} \implies \forall n, U_n \leq \ell$

D/ AF

Les pts fixes sont infranchissables.

d'



Application : $\left.\begin{array}{l} U_0 \leq \ell \\ U_1 \geq U_0 \\ f \nearrow \\ f \text{ possède un unique} \\ \quad \text{pt fixe } \ell \\ f\ C^0 \end{array}\right\} \Longrightarrow U_n \longrightarrow \ell$

D/ :

1) $\hat{C}$ $f \nearrow$ et $\hat{C}$ $U_1 \geq U_0$, on a $(U_n)_n \nearrow$

2) $\hat{C}$ $f(\ell) = \ell$ et $\hat{C}$ $U_0 \leq \ell$, on a vu que $\forall n,\ U_n \leq \ell$

3) Donc $(U_n)_n \nearrow$ et majorée donc $\xrightarrow{CV}$

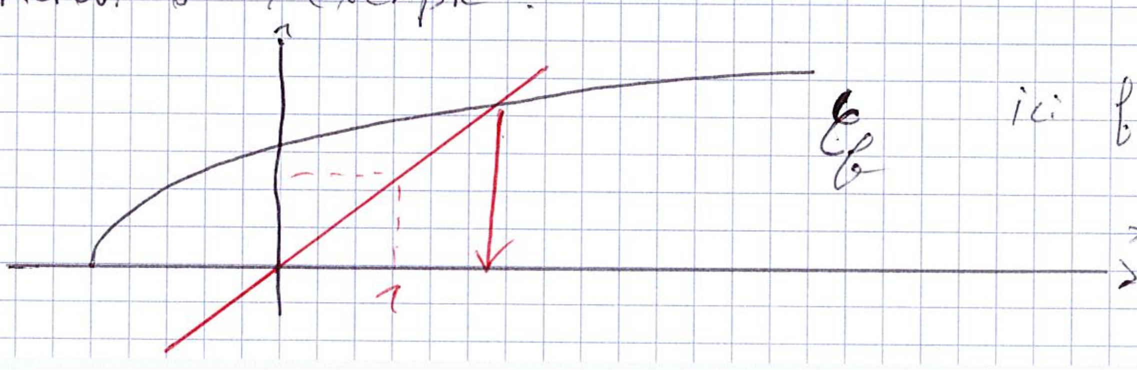
4) Notons ℓ' sa limite On a $U_0 \leq \ell' \leq \ell$ donc $\ell' \in I$

5) Donc ℓ' pt fixe de f

6) $\hat{C}$ il n'y en a qu'un seul.

7) Ccl $U_n \longrightarrow \ell$

Retour à l'exemple :



ici $f : [-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{1+x}$

AF Étude de f : les pts fixes

Dessin de $(U_n)_n$ $\longrightarrow$ voir page précédente.

Cpt

1) On a $x \geq y$ donc $f(x) \geq f(y)$ car f croissante

On a $x > y$ donc $f(x) > f(y)$ car f st^{nt} croissante

On a $x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$ car $f \nearrow$

Mq $x \geq y$ ie mq $f(x) \geq f(y)$

2) rédaction d'un tableau de signes et variations

On a f dérivable

Soit $x > 0$

F

a) On a $f'(x) = 0$ donc ...

b) On a $f'(x) = 0 \iff \dots \iff x = 1$

D'où

F ?

RI

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

c) on a $f'(x) \geq 0$ donc ...

F vous êtes en train d'affirmer q $\forall x > 0$, $f'(x) \geq 0$

d) On a $f'(x) \geq 0 \iff \dots \iff x \geq 1$

RI D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘		↗	

e) On a $f'(x) \geq 0 \iff \dots \iff x \geq 1$

De (1), de même, on a $f'(x) = 0 \iff x = 1$

D'où

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

2) Par coeur $\frac{d}{dx} x^{a} = a x^{a-1}$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^{a}} = \frac{d}{dx} x^{-a} = -a x^{-a-1} = \frac{-a}{x^{a+1}}$$

3) $\left(\frac{x \ln(x)}{x-1} \right)' = \dots$ -1 direct

Le " ' " s'applique à :
- une fonction et non un nombre
- Un polynôme

Sol^{o} : écrire $\frac{d}{dx}\left(\frac{x\ln(x)}{x-1}\right) = \dots$

4) R^{x} de $(\cdot)^{\frac{1}{\alpha}}$

Soit $x>0$

On a $\left[\; x^{\alpha} \geq A \iff x\, A^{\frac{1}{\alpha}} \right.$

car $(\cdot)^{\frac{1}{\alpha}}$ $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

5) Au lieu de $f'(x) \geq 0 \iff \dots \iff x=1$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(x) \geq 0$

X On a ... donc ... donc $x \geq 1$

Vous avez uniq^{nt} mq $f'(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

x		
$f'(x)$		
f		