Lycée Chateaubriand
Colas Bardavid

Chapitre 16

Comparaison des suites

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Formule de Stirling donnant un équivalent simple de $n!$

Les outils de comparaison des suites permettent de donner, par exemple, un sens aux énoncés intuitifs suivants :

- ▷ « Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers $+\infty$ à la même vitesse ».
- ▷ « À quelle vitesse la suite $(u_n)_n$ tend-elle vers ℓ ? ».
- ▷ « La suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ beaucoup plus vite que $(v_n)_n$ ne le fait ».
- ▷ « La suite $(\varepsilon_n)_n$ tend très vite vers 0 ».
- ▷ « La quantité u_n est négligeable devant la quantité v_n ».

Ces outils s'avèrent fondamentaux pour étudier les suites.

Savoir calculer des équivalents et manier ces relations de comparaison est l'un des objectifs importants du cours de MPSI.

Ch 16 ♛
Comparaison des suites

objectifs :

1) On veut donner un sens exact, précis à " $U_n \longrightarrow 0$ rapidement "

2) ou à " $U_n \longrightarrow 2$ à la vitesse $\frac{1}{n}$ "

On veut formaliser une approche qualitative des suites.

Notations

Soient $(U_n)_n$, $(V_n)_n$, $(w)_n$, $(A_n)_n$, $(B_n)_n$ des suites réelles

Soit $P \subset \mathbb{R}$

" $(\dots)^{\#}$ " notation interne au cours
(à éviter de reproduire au DS par exemple)

I Suites équivalentes

1) Suites $\neq 0$ APCR

__Déf°__ : On dit que $(U_n)_n$ est $\neq 0$ APCR

$\underset{ssi}{\Delta}$ $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0, \quad U_n \neq 0$

__Ex__ : $(\sqrt{n})_n$, $\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$, $\left(2^n \ln(n+1)\right)_n$ sont $\neq 0$ APCR

La suite $(1 + (-1)^n)_n$ n'est pas $\neq 0$ APCR

$\left(\lfloor \frac{1}{n} \rfloor\right)_n$ n'est pas $\neq 0$ APCR, pire, elle est $= 0$ APCR

⚠ AC non $\left((U_n)_n \neq 0 \text{ APCR}\right) \Longleftrightarrow \left((U_n)_n = 0 \text{ APCR}\right)$

en gén$^{\underline{al}}$

$\Longleftarrow$ ok

$\not\Longrightarrow$ F !!

- $(0)_n$ n'est pas $\neq 0$ APCR.

2) Définition dans le cas $\neq 0$ APCR

Déf° : Osq $(u_n)_n$, $(w_n)_n \neq 0$ APCR

On dit que $(u_n)_n$ est équivalente à $(w_n)_n$ et on note $u_n \sim w_n$

ou $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} w_n$ $\Leftrightarrow$ ssi $\dfrac{u_n}{w_n} \longrightarrow 1$

∞

Attention, en pratique, il est interdit d'écrire $u_n \sim 0$

Idée : $u_n \sim w_n \Leftrightarrow$ l'écart relatif entre u_n et w_n tend vers 0

Intuitivement 1 Million € $+ 3$ € $\sim$ 1 M^n €

Rq : La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence.

(D/ On a bien $u_n \sim u_n$, $u_n \sim w_n \Rightarrow w_n \sim u_n$

$$\left(\frac{u_n}{w_n} \longrightarrow 1 \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{u_n}{w_n}\right)} \longrightarrow 1 \Leftrightarrow \frac{w_n}{u_n} \longrightarrow 1 \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n \sim w_n \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \sim w_n$$

)

3) Exemples

- $10^n + 3n \sim 10^n$

  "$1M^n$ €" "3 €"

D/ R^* Les + au numérateur, pas au déno.

On a $\dfrac{10^n + 3}{10^n} = \dfrac{10^n\left(1 + \frac{3^n}{10^n}\right)}{10^n}$

facto par qtité dominante

$= 1 + 3\dfrac{n}{10^n}$

Or, par croissance comparée, on a

$\dfrac{n}{10^n} \longrightarrow 0$

Donc $\dfrac{10^n + 3}{10^n} \longrightarrow 1$

(Donc $10^n + 3n \longrightarrow 10^n$ suite $\longrightarrow$ suite
−3 points)

Donc $\boxed{10^n + 3n \sim 10^n}$ ■

- $n^2 \sim n$

$\left(D/ \text{ on a } \frac{n^2}{n} \not\to 1 \right)$

- $e^n \not\sim 2^n$

D/ On a $\frac{e^n}{2^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^n \longrightarrow +\infty$ car $e > 2$

donc $\left(\frac{e}{2}\right) > 1$ ■

- $n^2+1 \sim n^2$ (D/Ok)

- $e^n \sim e^n + \ln(n)$
(D/ ok)

- $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n} + 1$

D/ $\left(\frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{n}} = 1+n \longrightarrow +\infty \right)$

- $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n+1}$

$$\boxed{\text{Fait : } U_n \sim W_n \Rightarrow \frac{1}{U_n} \sim \frac{1}{W_n}}$$

D/ Osq $U_n \sim W_n$

On a $\frac{\frac{1}{U_n}}{\frac{1}{W_n}} = \frac{W_n}{U_n} = \frac{1}{\frac{U_n}{W_n}}$

Ĉ $\frac{U_n}{W_n} \to 1$, on a $\frac{1}{\frac{U_n}{W_n}} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1$

CCl on a bien $\frac{1}{U_n} \sim \frac{1}{W_n}$ ■

$$\cdot \quad \frac{1}{n!} \sim \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{n!}\right)^2$$

D/ Bcp + gén^{al}

Fait : Soit $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\neq 0$ APCR tq $\varepsilon_n \to 0$

Alors $\varepsilon_n \sim \varepsilon_n + \varepsilon_n^2$

D/ $$\frac{\varepsilon_n + \varepsilon_n^2}{\varepsilon_n} = 1 + \varepsilon_n \longrightarrow 1 \quad \blacksquare$$

h) Déf° gén^{ale}

C'est la déf° dans le cas $\neq 0$ APCR qui doit être un $R^\times$

Def : Soient $(u_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

on dit qu'elles sont équivalentes $\underset{\text{ssi}}{\Delta}$ ▥

$$\exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \begin{cases} u_n = \alpha_n w_n & \text{APCR} \\ \alpha_n \longrightarrow 1. \end{cases}$$

Rq : on oublie

5) Une Remarque importante

⚠ $U_n \sim w_n \not\Rightarrow w_n - U_n \longrightarrow 0$ en g^dl !

Contrex : $\cdot\ \exp(n) + n \sim \exp(n)$

$\cdot\ 2^n + n^2 \sim 2^n$ $\left(\frac{n^2}{2^n} \longrightarrow 0 \text{ par croissance comparée}\right)$

⚠ $U_n - w_n \longrightarrow 0 \not\Rightarrow U_n \sim w_n$ en g^dl

Ctrex : $\frac{1}{\exp(n)}$, $\frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n!} \longrightarrow 0$

Mais $\frac{1}{n} \nsim \frac{1}{n!}$!! (Sinon, on aurait $n \sim n!$)

Rq : Définissons # l'a ~~#~~ $\neq$^ce relative entre $(U_n)_n$ et $(w_n)_n$ par :

(T) $\delta_n = \frac{U_n - w_n}{U_n}$

Alors $U_n \sim w_n \Leftrightarrow \delta_n \longrightarrow 0$

Ex : $m_{Terre} = 10^{24}$ kg

$m_{Terre + atmosphere} = 10^{24} + 10^{12}$ kg

Donc $\delta = \frac{m_{atm}}{m_{Terre}} = \frac{10^{12}}{10^{24}} = 10^{-12} \ll 1$

6) Quatre équivalents classiques

Prop - R*

Soit $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

Alors : 1) $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

2) $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

3) $\sqrt{1+\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$

4) $\exp(\varepsilon_n) - 1 \sim \varepsilon_n$

Ex : On pose $\varepsilon := 0,00002512$

1) On a $\ln(1+\varepsilon) \simeq 0,000025119685$

2) ———— $\sin(\varepsilon) \simeq 0,0000$

3) ———— $2\times\left(\sqrt{1+\varepsilon} - 1\right) \simeq 0,000025119842225$

4) ———— $\exp(\varepsilon) - 1 \simeq 0,0000231203155 7$

Lemme :

Soit $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

Idée f est définie autour de 0

derivable en 0 tq $f'(0) \neq 0$

Soit $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

Alors $f(\varepsilon_n) - f(0) \sim f'(0) \cdot \varepsilon_n$

D/ On sait que $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \xrightarrow[h \neq 0]{h \to 0} f'(0)$

par déf° Or $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

Donc, par composition des limites :

$$\frac{f(0+\varepsilon_n)-f(0)}{\varepsilon_n} \longrightarrow f'(0)$$

Donc $\frac{f(\varepsilon_n)-f(0)}{f'(0)\,\varepsilon_n} \longrightarrow 1$

Ie $\boxed{f(\varepsilon_n)-f(0) \sim f'(0)\,\varepsilon_n .}$ ■

D/ $^{\text{prop } R^x}$

1) On pose $f : x \longmapsto \ln(1+x)$

On a $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ et $f(0) = 0$

D'où $\ln(1+\varepsilon_n) - 0 \sim 1 \times \varepsilon_n$

Ie $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

2) On a $\sin'(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ D'où

$\sin(\varepsilon_n) - \sin(0) \sim 1 \times \varepsilon_n$

3) On prend $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$

On a $g(0) = 1$ et $g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$

D'où $g(\varepsilon_n) - 1 \sim g'(0)\,\varepsilon_n$ ie $\sqrt{1+\varepsilon_n} - 1 \sim \frac{\varepsilon_n}{2}$

h) AF

Rq : Plus g^{alt}

$$(1+\varepsilon_n)^{a} - 1 \sim a\,\varepsilon_n \quad \text{si } a \neq 0$$

D/ AF

Sympa : pour $a = -1$, on obtient :

$$\frac{1}{1+\varepsilon_n} - 1 \sim -\varepsilon_n$$

7) Limites des suites équivalentes

a) deux suites équivalentes ont la même limite (si elle existe)

Prop : T $(\mathbb{R}^{\times})$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim w_n \\ u_n \longrightarrow \ell \\ \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow w_n \longrightarrow \ell$$

D/ Osq $u_n \sim w_n$, $u_n \longrightarrow \ell$

OFAA $\frac{u_n}{w_n}$

On a $w_n = \underbrace{\left(\frac{w_n}{u_n}\right)}_{\longrightarrow 1} \times \underbrace{(u_n)}_{\longrightarrow \ell} \longrightarrow \ell$

b) Rcpq F^{tt} en g^{al}

⚠ $\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow \ell \\ w_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \not\Longrightarrow u_n \sim w_n$

Ctex :

- $\begin{array}{l} 2^n \longrightarrow +\infty \\ n \longrightarrow +\infty \end{array}$ mais $2^n \not\sim n$

- $\begin{array}{l} \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \\ \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0 \end{array}$ mais $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}$

2) Rcpq partielle

Prop : Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$

$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow \ell \\ w_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \sim w_n$

Rq : Ainsi, la notion d'"$\sim$" n'a pas de réel intérêt dans ce cas

(D/ ĉ $u_n \longrightarrow \ell$ et $w_n \longrightarrow \ell$, par opération sur les limites, on a

$\frac{u_n}{w_n} \longrightarrow \frac{\ell}{\ell} = 1$ ∎)

Remarque (T) :

Considerons $(u_n)_n$, $(w_n)_n$ tq $\begin{cases} u_n \longrightarrow \ell \\ w_n \longrightarrow \ell \end{cases}$

(p. ex : $u_n \longrightarrow 2$ et $w_n \longrightarrow 2$

J'aimerais qd m̂ m'interesser à ces suites pour savoir si elles tendent vers 2 à la m̂ vitesse

On n'a pas

$u_n \sim w_n \longrightarrow$ " $u_n \longrightarrow 2$ et $w_n \longrightarrow 2$ à la m̂ vitesse "

Comment détecter si $u_n \longrightarrow 2$ et $w_n \longrightarrow 2$ à la m̂ vitesse ?

Tout simplement, on regarde si $\ell - u_n \sim \ell - w_n$?

Ex : $\left(2 + \frac{1}{n}\right)_n$ tend vers 2 à la m̂ vitesse que $\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{8}{n^2} + \frac{10}{n^5}\right)_n$ (D / AF AC ▪)

d) rq

- $\left.\begin{array}{l} (u_n)_n \text{ bornée} \\ u_n \sim w_n \end{array}\right\} \Longrightarrow (w_n)_n$ bornée

- ⚠ F^{++} : $\left.\begin{array}{l} u_n \sim w_n \\ (u_n)_n \nearrow \end{array}\right\} \not\Longrightarrow (w_n)_n \nearrow$ APCR

D/ A-t-on $n+2(-1)^n \sim n$?

Oui : $\frac{n+2(-1)^n}{n} = 1 + 2\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{?} 0$

On a $\left|2\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{2}{n} \longrightarrow 0$

Donc : On a $2\cdot\frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$

CCl : $\frac{n+2(-1)^n}{2} \longrightarrow 1$ ie $n \sim n+2(-1)^n$

Or $(n)_n \nearrow$ mais $(n+2(-1)^n)_n$ n'est pas $\nearrow$ APCR

8) Signe strict des suites équivalentes !!

$\boxed{\text{Prop : } u_n \sim w_n \Rightarrow u_n \text{ et } w_n \text{ sont de m̂ signe strict APCR}}$

Rq : Si $x\in\mathbb{R}$, on pose $sgn(x) := \begin{cases} -1 & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \\ 1 & si\ x>0 \end{cases}$

On a mq $u_n \sim w_n \Rightarrow sgn(w_n) = sgn(u_n)$ APCR

D/ Osq $u_n \sim w_n$.

Osq $(u_n)_n \neq 0$ APCR $(w_n)_n \neq 0$ APCR

Fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$, $\begin{cases} u_n \neq 0 \\ w_n \neq 0 \end{cases}$

Si $n \geq N_0$, je note $\alpha_n := \dfrac{u_n}{w_n}$

On a
- $\forall n \geq N_0$, $u_n = \alpha_n \cdot w_n$
- $\alpha_n \longrightarrow 1$

C $\alpha_n \longrightarrow 1$, fixons $N_1 \geq N_0$ tq $\forall n \geq N_1$,

$\alpha_n \geq \dfrac{1}{\alpha} > 0$

Soit $n \geq N_1$. Trois cas :

- Si $w_n = 0$, on a $u_n = 0$
- Si $w_n > 0$, on a $u_n > 0$
- Si $w_n < 0$, on a $u_n < 0$

Ds tous les cas : $\text{Sgn}(u_n) = \text{Sgn}(w_n)$ ■

9) Operations autorisées

Ces sont les operations multiplicatives

Prop : Les operations suivantes sont ok :
- produit
- inverse
- quotient
- racine carrée
- puissance cte

Rq : ie (T)

$$\left.\begin{matrix} u_n \sim w_n \\ a_n \sim b_n \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} 1) & u_n a_n \sim w_n b_n \\ 2) & \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{w_n} \\ 3) & \frac{u_n}{a_n} \sim \frac{w_n}{b_n} \end{matrix}$$

4) $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{w_n}$

5) $u_n^{\alpha} \sim w_n^{\alpha}$

D/ 4) Osq $u_n, w_n \geq 0$ APCR

On calcule : $\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{w_n}} = \sqrt{\frac{u_n}{w_n}}$

Or : $t_n \longrightarrow \ell \Longrightarrow \sqrt{t_n} \longrightarrow \sqrt{\ell}$

(D/ On traite le cas $\ell \neq 0$

$$\sqrt{t_n} - \sqrt{\ell} = \frac{t_n - \ell}{\sqrt{t_n} + \sqrt{\ell}}$$

Ici $\sqrt{t_n} + \sqrt{\ell} \geq \sqrt{\ell} > 0$

Donc (R×) $\left(\frac{1}{\sqrt{t_n} + \sqrt{\ell}}\right)_n$ bornée

Ĉ $t_n \longrightarrow \ell$, on a $t_n - \ell \longrightarrow 0$ (...) ■)

Mq $t_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \sqrt{t_n} \longrightarrow 0$

Ie mq $\sqrt{t_n} \not\longrightarrow 0 \Rightarrow t_n \not\longrightarrow 0$

Osq $\sqrt{t_n} \not\longrightarrow 0$

Ainsi : $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq N_0 : \sqrt{t_n} > \varepsilon_0$

Fixons un tel $\varepsilon_0 > 0$

Donc, on a :

$\forall N_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N_0 : t_n > \varepsilon_0$?

On pose $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ on a $\varepsilon_1 > 0$

On a ainsi :

$\exists \varepsilon_1 > 0 : \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq N_0 : |t_n| > \varepsilon_1$

Ie $t_n \not\longrightarrow 0$ ■

Ainsi, c $\frac{U_n}{w_n} \longrightarrow 1$, on a bien $\sqrt{\frac{U_n}{w_n}} \longrightarrow 1$ ■

b) application au calcul des limites.

- Cherchons la limite de

$$\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)\right)_{n \geq 1}$$

On a $\ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right) \sim \frac{1}{n(n+1)}$

car $\frac{1}{n(n+1)} \longrightarrow 0$

De ⊕, on a $n+1 \sim n$

Donc $n(n+1) \sim n^2$; donc $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

<u>CCl :</u> $n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right) \sim n^2 \frac{1}{n^2} \sim 1$

$\mathbb{R}^*$ $\left.\begin{array}{l} u_n \sim \ell \\ \ell \in \mathbb{R}^* \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \longrightarrow \ell$

<u>CCl :</u> $n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$\left(\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)} \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1}\right)\right)\sqrt{n^4+n^3+n^2+n+1}$$

On a $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$; donc $\ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right) \sim \frac{1}{n^2}$

Donc $\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)} \sim \frac{1}{n}$

et $n^2+n+1 \sim n^2$

$n^3+n^2+n+1 \sim n^3$ donc $\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1} \sim \frac{1}{n}$

Donc $\sin\left(\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1}\right) \sim \frac{1}{n}$

Or $n^4+n^3+n^2+n+1 \sim n^4$

Donc $\sqrt{(\dots)} \sim n^2$

Application !!

Mq $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

On a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$; donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 1$

Donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1$

Ĉ $\exp(\cdot)$ est C^0 en 1, on a donc

$$\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \longrightarrow \exp(1)$$

ie $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$ ∎

10) !! Opérations interdites

Les équivalents sont incompatibles à :

$+$, $(\cdot)^n$ ou $(\cdot)^{\alpha_n}$, $\exp(\cdot)$

et à $\ln(\cdot)$

Fait I

1) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim w_n \\ a_n \sim b_n \end{array}\right\} \not\Rightarrow u_n + a_n \sim w_n + b_n$

2) Plus simplement (!)

$$u_n \sim w_n \not\Rightarrow u_n + C \sim w_n + C$$

en général

D/

2) => 1) ok

2) : On a $1+\frac{1}{n} \sim 1+\frac{1}{n^2}$

Mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 \not\sim \left(1+\frac{1}{n^2}\right)-1$

Fait 2

1) $U_n \sim w_n \not\Rightarrow U_n^{\alpha_n} \sim w_n^{\alpha_n}$

2) Plus simplement $U_n \sim w_n \not\Rightarrow U_n^n \sim w_n^n$ en g^{al}

D/ 2) => 1) ok

2) : On a $1+\frac{1}{n} \sim 1$

Mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n = 1$ ∎

Fait 3

$U_n \sim w_n \not\Rightarrow \ln(U_n) \sim \ln(w_n)$

D/ On a $\begin{cases} 1+\frac{1}{n} \sim 1+\frac{1}{n^2} \\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad R^{x} \\ \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \end{cases}$

donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \not\sim \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

Fait 4

$$U_n \sim w_n \implies e^{U_n} \not\sim e^{w_n} \quad \text{en } g^{al}$$

D/ On a $n \sim n+1$

Mais $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e \not\longrightarrow 1$ Donc $e^{n+1} \not\sim e^n$ ■

Rq : On peut avoir des equivalent m̂ quand les suites n'ont pas de limites

Ex : mq $(-1)^n \sim (-1)^n + \frac{1}{n}$

D/ On calcule $\dfrac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{(-1)^n} = 1 + \frac{1}{n}(-1)^n$

$\dfrac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$

Et $\left|\frac{1}{n}(-1)^n\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

CCl : $(-1)^n + \frac{1}{n} \sim (-1)^n$ ■

11) Inégalités & équivalents

Prop : (T)

$$\left.\begin{array}{l} m_n \leq u_n \leq M_n \quad \text{APCR} \\ m_n \sim a_n \\ M_n \sim a_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \sim a_n$$

D/ (T) • Fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$, $m_n \leq u_n \leq M_n$

• Fixons $N_1 \in \mathbb{N}$ et $(\alpha)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tq

$$\begin{cases} \forall n \geq N_1, \ M_n = \alpha_n \cdot a_n \\ \alpha_n \longrightarrow 1 \end{cases}$$

Fixons $N_2 \in \mathbb{N}$ et $(\beta_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} \forall n \geq N_2, \ m_n = \beta_n a_n \\ \beta_n \longrightarrow 1 \end{cases}$

Posons $N_3 := \max(N_0, N_1, N_2)$

On a $\forall n \geq N_3$ $\beta_n a_n \leq u_n \leq \alpha_n a_n$

Rq : Si $a_n > 0$ APCR : $m_n \leq u_n \leq M_n \longrightarrow \underbrace{\frac{m_n}{a_n}}_{\to 1} \leq \frac{u_n}{a_n} \leq \underbrace{\frac{M_n}{a_n}}_{\to 1}$

Donc $\frac{u_n}{a_n} \longrightarrow 1$ ■

De m̂ si $a_n < 0$ APCR

Idée :

Au lieu de mq $\frac{u_n}{a_n} \longrightarrow 1$

On va mq $\left|\frac{u_n}{a_n} - 1\right| \longrightarrow 0$

Soit $n \geqslant N_3$

On a $\quad (\beta_n - 1)\, a_n \leqslant u_n - a_n \leqslant (\alpha_n - 1)\, a_n$

Ie $\quad \underbrace{(\beta_n - 1)}_{\downarrow \atop 0} a_n \leqslant \left(\frac{u_n}{a_n} - 1\right) a_n \leqslant \underbrace{(\alpha_n - 1)}_{\downarrow \atop 0} a_n$

Notons : $\quad \varepsilon_n := \max\left(|\alpha_n - 1|, |\beta_n - 1|\right)$

- On a $\quad \varepsilon_n \longrightarrow 0$
- On a $\quad \left(\frac{u_n}{a_n} - 1\right) a_n \leqslant (\alpha_n - 1)\, a_n \leqslant |a_n - 1|\,|a_n| \leqslant \varepsilon_n \cdot |a_n|$

et $\quad \left(\frac{u_n}{a_n} - 1\right) a_n \geqslant (\beta_n - 1)\, a_n \geqslant -|\beta_{n-1}|\,|a_n| \geqslant -\varepsilon_n |a_n|$

Donc $\quad -|a_n|\, \varepsilon_n \leqslant \left(\frac{u_n}{a_n} - 1\right) a_n \leqslant |a_n|\, \varepsilon_n$

Ie $\quad \left|\left(\frac{u_n}{a_n} - 1\right) a_n\right| \leqslant |a_n| \cdot \varepsilon_n$

Donc $\quad \left|\frac{u_n}{a_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon_n \longrightarrow 0$

Donc $\quad \left|\frac{u_n}{a_n} - 1\right| \longrightarrow 0 \quad$ ie $\quad \frac{u_n}{a_n} \longrightarrow 1$ ■

12) Formule de stirling

a) notion d'équivalent simple

Considérons $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On veut connaître un "équivalent simple de U_n"

Ex :

- $n^2 + 3n + 8 \sim n^2$
- $$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \sim ?$$

$1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \sim 1$ donc ok

On écrit $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}$ OFAA $\left(\sqrt{1+?_n} - 1\right)$

$$= \underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}_{\sim 1}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}} - 1\right)$$

Puis OFAA $1 + ?_n$

$$\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} - 1\right)}_{\varepsilon_n}}$$

On a bien $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

car $\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$

R* $\sqrt{1+\varepsilon_n} - 1 \sim \frac{\varepsilon_n}{2}$

ccl : $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}} \sim \varepsilon_n$

Or $\quad \varepsilon_n = \dfrac{1 + \frac{1}{n} - 1\left(-\frac{1}{n}\right)}{1 - \frac{1}{n}}$

$$= \frac{\frac{2}{n}}{\underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{\sim 1}} \sim \frac{2}{n}$$

ccl : $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \sim \dfrac{1}{n}$

Ainsi, $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \longrightarrow 0$ " à la vitesse $\frac{1}{n}$ "

Conséquences

- Ĉ $\frac{1}{n} > 0$, on a

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} > 0 \text{ APCR}$$

- Ĉ " $\frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ ∞nt ⊕ vite que $\frac{1}{n}$ ne le fait "

On en déduit $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \geqslant \dfrac{1}{n^2}$ APCR

Sont des équivalents simples

- n, n^2, n^3, $\sqrt{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$
- De façon générale n^α où $\alpha \in \mathbb{R}$
- 2^n, 3^n, $(-1)^n$, 8^n, 150^n
- De façon g^{ale} : a^n où $a \in \mathbb{R}$
- $\ln(n)$
- $2n$, $3n$, $4n$, $5n$
- De façon générale : C_n où $C \in \mathbb{R}^*$
- n^n
- $\ln(\ln(n))$

<u>Règle !</u>

Si a_n et b_n sont des équivalents simples, alors :

1) $a_n b_n$ aussi

2) $\frac{1}{a_n}$ aussi

3) a_n^α aussi si $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>Bilan :</u> Sont des equivalents simples :

- $\dfrac{158\, n\sqrt{n}}{\ln(n)\, 2^n}$
- $\dfrac{n \ln^2(n)}{\ln(\ln(n))}$

b) Formule de Stirling

Th : On a $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

D/ non

II Suites négligeables

1) Déf° : (dans le cas $\neq 0$ APCR)

Déf : On dit que $(U_n)_n$ est négligeable devant $(A_n)_n$ et on note $U_n = o(A_n)$

" lu U_n est un petit o de A_n "

ou $U_n \underset{n \to \infty}{=} o(A_n)$ ou $U_n = o(A_n)$ qd $n \to +\infty$

$\underset{\text{ssi}}{\Delta}$ $\dfrac{U_n}{A_n} \to 0$

Rq : Astucieusement :

" $U_n = o(A_n) \iff \dfrac{U_n}{A_n} = o(\ )$

$\iff \dfrac{U_n}{A_n} \to 0$ "

On dit aussi que $(A_n)_n$ est prépondérante devant $(U_n)_n$

2) Exemples

- On a $\begin{cases} \frac{1}{n} = o(n) \\ \ln(n) = o(n) \\ 1 = o(n) \\ \sqrt{n} = o(n) \end{cases}$

On voit bien que "$= o(\cdot)$" n'a rien d'une égalité !
Sinon on aurait
$$\frac{1}{n} = o(n)$$
$$\sqrt{n} = o(n)$$
Donc $\frac{1}{n} = \sqrt{n}$

On a $n = o(2^n)$

On a $\begin{cases} \frac{1}{2^n} = o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{n\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$

3) Def° générale

Def° : On dit que $u_n = o(A_n)$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$\exists (\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ! \begin{cases} u_n = \varepsilon_n A_n \text{ APCR} \\ \varepsilon_n \longrightarrow 0 \end{cases}$$

4) Un cas particulier essentiel, ultra important

$\boxed{\text{Prop - R}^{x} \quad u_n = o(1) \iff u_n \to 0}$

D/ $u_n = o(1) \iff \frac{u_n}{1} \to 0 \iff u_n \to 0$

5) Opérations autorisées

a) Idée : l'outil $o(\cdot)$ est + puissant que l'outil "$\sim$"

Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(T_n)_n$, $(R_n)_n$

a) Stabilité par CL

$$\left.\begin{array}{l} a_n = o(T_n) \\ b_n = o(T_n) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + \lambda b_n = o(T_n)$$

D/ $$\frac{a_n + \lambda b_n}{T_n} = \underbrace{\frac{a_n}{T_n}}_{\to 0} + \lambda \underbrace{\frac{b_n}{T_n}}_{\to 0}$$

b) Compatibilité aux opérations multiplicatives

$$a_n = o(T_n) \Rightarrow \begin{array}{l} a_n^2 = o(T_n^2) \\ \sqrt{a_n} = o(\sqrt{T_n}) \\ a_n^p = o(T_n^p) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = o(T_n) \\ b_n = o(R_n) \end{array}\right\} \Rightarrow a_n b_n = o(T_n R_n)$$

c) Transitivité

$$\left(a_n = o(T_n) \quad \text{et} \quad T_n = o(W_n) \right) \Rightarrow a_n = o(W_n)$$

D/ $\dfrac{a_n}{W_n} = \underbrace{\dfrac{a_n}{T_n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{T_n}{W_n}}_{\to 0}$

d) insensibilité aux constantes

$$\left.\begin{array}{l} a_n = o(T_n) \\ \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = o(\lambda T_n)$$

Ex : $a_n = o(5n^2) \Rightarrow a_n = o(n^2)$

(D/ $\dfrac{a_n}{\lambda T_n} = \dfrac{1}{\lambda} \underbrace{\dfrac{a_n}{T_n}}_{\to 0}$ ■)

e) compatibilité avec "$\sim$"

$$\left.\begin{array}{l} a_n = o(T_n) \\ a_n \sim b_n \end{array}\right\} \Rightarrow b_n = o(T_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = o(T_n) \\ T_n \sim R_n \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = o(R_n)$$

D/ AF

6) inversion des ordres de comparaison

$$\boxed{\text{Prop-R}^{x} : \quad U_n = o(T_n) \iff \frac{1}{T_n} = o\left(\frac{1}{U_n}\right)}$$

Ex :

On sait que $n\sqrt{n}\, 2^n = o(3^n)$

$\left(\underline{D/} \quad \frac{n\sqrt{n}\, 2^n}{3^n} = \frac{n^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \longrightarrow 0 \right.$

par croissance comparée $\left. \right)$

Plus compliqué : $2\sqrt{n}\, 2^n = o\left(\frac{3^n}{n^4}\right)$ AC D/ AF

Pire : $n\sqrt{n}\, 2^n \ln^2(n) = o\left(\frac{3^n}{n^4}\right)$

Donc $\frac{n^4}{3^n} = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}\, 2^n \ln(n)}\right)$

7) !! ∞ Caractérisation de "$\sim$" par les "$o(\cdot)$" : le dico

a) Une Notation

Notation : On note $d_n = b_n + o(T_n) \overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$d_n - b_n = o(T_n)$$

Rq : Si $a_n = b_n + o(T_n)$ alors on a

(T)
$$a_n = b_n + u_n$$
avec $u_n = o(T_n)$

Ex : $\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Rq : $u_n \longrightarrow \ell \iff u_n = \ell + o(1)$

b) le dico

$\boxed{\text{Prop-R}^x : \quad u_n \sim w_n \iff u_n = w_n + o(u_n)}$

D/ $u_n \sim w_n \iff \frac{u_n}{w_n} \longrightarrow 1$

$$\iff \frac{u_n}{w_n} - 1 \longrightarrow 0$$

$$\iff \frac{u_n - w_n}{w_n} \longrightarrow 0$$

$$\iff u_n - w_n = o(w_n)$$

$$\iff u_n = w_n + o(w_n) \quad ■$$

c) application à la somme

⚠ En g^{al}, on ne peut pas sommer les équivalents

Plan pour le faire

1) On part des équivalents
2) On utilise le dico pour passer au langage $o(\cdot)$
3) Avec les $o(\cdot)$: on peut faire des sommes
4) On revient au langage des équivalents

Exemples

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ (1)

- $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{2n}$ (2)

⚠ On a très envie de sommer les équivalents et de dire $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{3}{2n}$
(Faute grave

On traduit (1), (2) dans le langage des $o(\cdot)$

(1) donne $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \; o\left(\frac{1}{n}\right)$

(2) —— $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$ R*

* $o\left(\frac{1}{2n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{42}{n}\right)$

Fait (T) : $U_n = o(T_n) \iff U_n = o(\lambda T_n)$

$(\lambda \neq 0)$

D/ $\Rightarrow$ Osq $U_n = o(T_n)$

On a $\frac{U_n}{T_n} \longrightarrow 0$ Donc $\frac{1}{\lambda}\frac{U_n}{T_n} \longrightarrow 0$

ie $\frac{U_n}{\lambda T_n} \longrightarrow 0$ ie $U_n = o(\lambda T_n)$

$\Leftarrow$ D'après $\Rightarrow$, ĉ $U_n = o(\lambda T_n)$, on a

$U_n = o\left(\frac{1}{\lambda}\lambda T_n\right)$ ■ "$\Rightarrow$ => $\Leftarrow$"

Rq : on a aussi $o\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}_{\sim \frac{1}{n}}\right)$

CCl : (2) s'écrit : $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

on les somme : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

En Pratique : on sait que "$o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Plus précisément : $U_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ $\left(\text{ex} : \frac{1}{n^2}\right)$

$w_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ $\left(\text{ex} : \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ $(*)$

$(*) \Rightarrow U_n + w_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Question

Comment fait-on quand ce n'est pas les mêmes $o(\cdot)$?

$$\left.\begin{aligned} U_n &= o\left(\frac{1}{n}\right) \\ w_n &= o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow U_n + w_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D/ Ĉ $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a $U_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow U_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc :

$$\left.\begin{aligned} U_n &= o\left(\frac{1}{n}\right) \\ w_n &= o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} U_n &= o\left(\frac{1}{n}\right) \\ W_n &= o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}\right. \Rightarrow U_n + w_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Bilan : $o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Deuxième règle :

$$o\left(\frac{1}{n}\right) - o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D/

$$\left.\begin{aligned} U_n &= o\left(\frac{1}{n}\right) \\ w_n &= o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} U_n &= o\left(\frac{1}{n}\right) \\ -w_n &= o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow U_n - W_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \blacksquare$$

On a donc :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{3}{2}\frac{1}{n}\right)$

Donc (dico) : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{3}{2n}$ ∎

d) Application du passage à $\ln(\cdot)$

Prop :

$$U_n \sim W_n \;\not\Rightarrow\; \ln(U_n) \sim \ln(W_n) \quad \text{en } g^{al}$$

$$\Rightarrow \ln(U_n) = \ln(W_n) + o(1)$$

D/ Osq $U_n \sim W_n$

Donc $\frac{U_n}{W_n} \longrightarrow 1$

Donc $\ln(U_n) - \ln(W_n) \longrightarrow \ln(1)$ car

$\ln(\cdot)$ est C^0 en 1

CCl : $\ln(U_n) - \ln(W_n) \longrightarrow 0$

Ie : $\ln(U_n) - \ln(W_n) = o(1)$ ie $\ln(U_n) = \ln(W_n) + o(1)$

Corollaire (T)

$$\left.\begin{array}{l} U_n \sim W_n \\ U_n \longrightarrow 0 \text{ ou } U_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \ln(U_n) \sim \ln(W_n)$$

À retenir

Application : $\ln(n+\ln(n)) \sim \ln(n)$

Car $n+\ln(n) \sim n$ car $\ln(n) = o(n)$

et car $n \longrightarrow +\infty$

(quand les suites tendent vers $+\infty$, "on a le droit" de passer aux ln des équivalents)

Lemme-marrant : (Soit $(U_n)_n \neq 0$ APCR)

1) • $U_n = o(1) \iff U_n \longrightarrow 0$

2) • $1 = o(U_n) \iff |U_n| \longrightarrow +\infty$

D/ (1) ok   2) On a $1 = o(U_n) \iff \frac{1}{U_n} \longrightarrow 0$

$\iff \frac{1}{|U_n|} \longrightarrow 0 \iff |U_n| \longrightarrow +\infty$

D/ corollaire

Osq $U_n \sim W_n$ et osq $U_n \longrightarrow +\infty$

• D'après la prop précédente : $\ln(U_n) = \ln(w_n) + o(1)$

• Or $U_n \longrightarrow +\infty$; donc $\ln(U_n) \longrightarrow +\infty$

• Donc $1 = o(\ln(U_n))$; donc "$o(1) \subset o(\ln(U_n))$"

(ie $a_n = o(1) \Rightarrow a_n = o(\ln(U_n))$)

Donc $\ln(U_n) = \ln(w_n) + o(\ln(U_n))$

Donc (dico) : $\ln(v_n) \sim \ln(w_n)$

2) Osq $v_n \sim w_n$ et osq $v_n \longrightarrow 0$. On a alors $\ln(v_n) \longrightarrow -\infty$

On a encore " $o(1) \subset o(\ln(v_n))$ "

(Autre démo :

$v_n \longrightarrow 0$ donc $\frac{1}{v_n} \longrightarrow +\infty$

$\hat{C}$ $v_n \sim w_n$ donc $\frac{1}{v_n} \sim \frac{1}{w_n}$

$\overset{1)}{\Longrightarrow}$ $\ln\left(\frac{1}{v_n}\right) \sim \ln\left(\frac{1}{w_n}\right)$

$\Updownarrow$

$-\ln(v_n) \sim -\ln(w_n)$

D²/ corollaire

- Osq $v_n \sim w_n$ et osq $v_n \longrightarrow +\infty$
- Mq $\ln(v_n) \sim \ln(w_n)$
- Astuce : Au lieu de mq $\frac{\ln(w_n)}{\ln(v_n)} \longrightarrow 1$,

Mq $\frac{\ln(w_n)}{\ln(v_n)} - 1 \longrightarrow 0$

On a $\frac{\ln(w_n)}{\ln(v_n)} - 1 = \frac{\ln(w_n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln\left(\frac{w_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$

1) Or $\frac{w_n}{v_n} \longrightarrow 1$, on a $\ln\left(\frac{w_n}{v_n}\right) \longrightarrow 0$

2) $\hat{C}$ $v_n \longrightarrow +\infty$, on a $\ln(v_n) \longrightarrow +\infty$

⚠ "$\frac{0}{+\infty}$" n'est pas une FI

CCl ; $\frac{\ln(w_n)}{\ln(u_n)} - 1 \longrightarrow 0$ ■

e) avec $\exp(\cdot)$

Prop : $e^{u_n} \sim e^{w_n} \iff u_n - w_n \longrightarrow 0$

$u_n = w_n + o(1)$

Application 1 : Annulée

Application 2 : On a donc $e^{n+\frac{1}{n}} \sim e^{n}$

D/ ($\Rightarrow$) Osq $e^{u_n} \sim e^{w_n}$. Donc $\frac{e^{u_n}}{e^{w_n}} \longrightarrow 1$

Ie $e^{u_n - w_n} \longrightarrow 1$

Donc $\ln\left(e^{u_n - w_n}\right) \longrightarrow \ln(1)$

car $\ln(\cdot)$ $\mathcal{C}^0$ en 1 Ie $u_n - w_n \longrightarrow 0$ ■ $\Rightarrow$

($\Leftarrow$) Osq $u_n - w_n \longrightarrow 0$ Donc $\exp(u_n - w_n) \longrightarrow \exp(0)$

car $\exp(\cdot)$ est $\mathcal{C}^0$ en 0 (...) ■

8) Notion de dv^t asymptotique (DA)

Idée : Considérons un camion avec son chargement (S)

On a :

(1) $m_{tot} \sim m_{chargement}$

(2) On retire de (S) son chargement

On a alors :

$m_{tot} - m_{chargement} \sim m_{camion}$

(dico) $m_{tot} - m_{chargement} = m_{camion} + o(m_{camion})$

Donc $m_{tot} = m_{chargement} + m_{camion} + o(m_{camion})$

(3) On retire de (S) le chargement et le camion

On a : $m_{tot} - m_{chargement} - m_{camion} \sim m_{conducteur}$

Donc $m_{tot} = m_{chargement} + m_{camion} + m_{conducteur} + o(m_{conducteur})$

ccl :

$$m_{tot} = m_{chargement} + m_{camion} + m_{conducteur} + m_{valise} + m_{déco} + m_{atm} + m_{possière} + o(m_{poussière})$$

Exemple :

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On peut avoir

$$U_n = 2n^5 + 8\ln(n)^4 + 2\ln(\ln(n)) + 3 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{8}{n^3} + \frac{16}{5^n} + o\left(\frac{1}{5^n}\right)$$

9) Croissance comparées

Prop : 1) $n^\alpha = o(a^n)$ si $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ a > 1 \end{cases}$

2) $\ln(n)^\alpha = o(n^\beta)$ si $\beta > 0$

3) $a^n = o(n!)$ $(a > 1)$

4) $n! = o(n^n)$

D/ 1), 2) ok , 3) cf TD

4) exo

III Domination

1) Déf°

Déf° : Soit $(U_n)_n, (T_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \neq 0$ APCR

On dit que $(U_n)_n$ est dominée par $(T_n)_n$ et on note

$$U_n = O(T_n)$$ (lu " U_n est un grand O de T_n ")

$\underset{ssi}{\Delta}$ $\left(\frac{U_n}{T_n}\right)_n$ est bornée

Rq : Dans le cas g^al :

$\underset{ssi}{\Delta}$ $\exists C \in \mathbb{R}_+ : |U_n| \leq C \cdot |T_n|$ APCR

ie $\underset{ssi}{\Delta}$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : \forall n \geq N_0, |U_n| \leq C|T_n|$

Rq : $U_n = O(T_n)$ signifie que U_n ne peut pas dépasser T_n outre mesure

Ex :

- $3n^2 + 8n + 13 = O(n^2)$

  (D/ $\frac{3n^2+8n+13}{n^2} \longrightarrow 3$

  donc $\xrightarrow{CV}$ donc est bornée ■)

2) Le R^x du $O(1)$

Prop – R^x

$$u_n = O(1) \iff (u_n)_n \text{ bornée}$$

D/ ok ∎

3) Liens

Prop :

$$\begin{tikzcd}
u_n \sim T_n \arrow[dr, Rightarrow] & & u_n = o(T_n) \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & u_n = O(T_n) & \\
 & \boxed{\exists \lambda \neq 0 : u_n \sim \lambda T_n} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

AC

4) Opérations autorisées

cf poly.

5!!!) Passage à $|\cdot|$

Prop : 1) $u_n = o(T_n) \iff |u_n| = o(|T_n|)$

2) $u_n = O(T_n) \iff |u_n| = O(|T_n|)$

D/

1) $U_n = o(T_n) \iff \dfrac{U_n}{T_n} \longrightarrow 0$

$\iff \dfrac{U_n}{T_n} \longrightarrow 0$

$\iff \dfrac{|U_n|}{|T_n|} \longrightarrow 0$

$\iff |U_n| = o(|T_n|)$ ■

2) AF

IV Extension aux suites complexes

ok