

Chapitre 17

Matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un exemple très important de matrice dans $M_5(\mathbb{R})$

Les matrices sont des tableaux de nombres.

*En mathématiques, elles jouent un **rôle fondamental** : elles permettent de raisonner sur les espaces vectoriels et les applications linéaires de façon très concrète, calculatoire si nécessaire, en faisant abstraction des spécificités du problème.*

Les matrices sont utilisées :

- dans presque tous les domaines des mathématiques ;
- dans de très nombreux domaines extérieurs aux mathématiques : en physique, chimie, économie, informatique, etc.

17

Matrices

plan de cours et principaux résultats

I. Définition et premières considérations

- 1) Définition, notations
 - a) matrices rectangulaires
 - b) matrices carrées, lignes et colonnes
 - c) généralisations
 - d) moyens mnémotechniques
- 2) Addition
- 3) Scalairisation
- 4) Matrices élémentaires
 - a) définition
 - b) exemples
 - c) décomposition d'une matrice à l'aide des matrices élémentaires
- 5) Colonnes et lignes d'une matrice

II. Multiplication entre matrices

23.6 
23.11 
23.12 

- 1) Définition
- 2) Propriétés
- 3) Multiplication entre matrices élémentaires
- 4) Techniques de calcul « en colonne »
 - a) matrice $\times$ colonne = colonne
 - b) base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$
 - c) extraction de colonne

Fait-Réflexe 17.1 ^①

$$A \times \varepsilon_j = C_j(A)$$

- d) AX est une combinaison linéaire des colonnes de A
- e) multiplication colonne par colonne

Proposition 17.2 ^①

- 1) Le produit matriciel se fait « colonne par colonne » par la droite.
- 2) La j -ième colonne de $A \times B$ égale le produit de A par la j -ième colonne de B .
- 3) *I.e., on a*

$$C_j(A \times B) = A \times C_j(B).$$

- f) cas colonne $\times$ ligne

- 5) Techniques de calcul « en ligne »
- 6) Matrice identité
- 7) Produit par blocs

III. Transposition

23.15 
23.16 

- 1) Définition
- 2) Propriétés

Proposition 17.3 [Ⓣ]

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T$$

IV. Matrices carrées

23.36 
23.37 
23.38 

- 1) Structure d'anneau

Fait 17.4 [Ⓣ]

L'ensemble des matrices carrées $M_n(\mathbb{K})$, muni des opérations $+$ et $\times$, est un anneau.

- 2) Commutation
- 3) Formules de Newton et Bernoulli

V. Matrices inversibles

23.21 
23.27 
23.31 
23.34 

- 1) Définition
- 2) Premières propriétés
- 3) Transposition et inversibilité
- 4) Reconnaître facilement une matrice non-inversible
 - a) lignes/colonnes nulles
 - b) lignes/colonnes égales
 - c) relation de liaison entre les lignes/colonnes
- 5) Noyau d'une matrice
 - a) définition

Définition 17.5 [Ⓣ]

Le noyau de A est

$$\text{Ker}(A) := \left\{ X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1} \right\}.$$

- b) interprétation du noyau
 - c) calcul du noyau
 - d) une matrice inversible a un noyau nul
- 6) Critère nucléaire d'inversibilité

Théorème 17.6

- 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0_{n,1} \implies X = 0_{n,1}.$$

Alors, A est inversible.

- 2) Autrement dit, si le noyau de A est nul, alors A est inversible.
- 3) Ainsi, on a

$$\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\} \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}).$$

7) Théorème d'inversibilité unilatérale

Théorème 17.7^①

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

1) Alors, on a

$$AB = I_n \implies BA = I_n.$$

2) Dans ce cas, A est inversible et son inverse est B .

VI. Ensembles de matrices remarquables

1) Matrices scalaires

2) Matrices diagonales

a) définition

b) action

c) produit

d) inversibilité et inverse

3) Matrices triangulaires supérieures

a) définition

b) produit

Proposition 17.8^①

1) Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.

2) De plus, les coefficients diagonaux du produit sont égaux aux produits des coefficients diagonaux des matrices multipliées.

c) inverse

Proposition 17.9^①

Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$.

1) A est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

2) Dans ce cas, A^{-1} est encore triangulaire supérieure.

De plus, les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les inverses des coefficients diagonaux de A .

d) matrices inférieures

e) matrices triangulaires supérieures par blocs

4) Ensembles $T_n^{(p)}(\mathbb{K})$

a) réécriture de $T_n^+(\mathbb{K})$

b) définition

c) un exemple

d) produit

5) Matrices symétriques et antisymétriques

a) définition

b) propriétés

c) une propriété fausse

d) un cas important

Fait 17.10

$$M \text{ quelconque} \implies M^T M \text{ et } M M^T \text{ sont symétriques.}$$

VII. Systèmes linéaires et matrices

23.32 48

- 1) Algorithme du pivot de Gauss
- 2) Interprétation matricielle des systèmes linéaires
- 3) Caractérisation des matrices inversibles
 - a) systèmes de Cramer

23.33 88

23.28 88

Proposition 17.11

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors,

A inversible $\iff \forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ possède une unique solution.

b) application au calcul de l'inverse d'une matrice

- 4) Matrices d'opérations élémentaires
 - a) définition
 - b) inverses
 - c) action à gauche et à droite
- 5) Invariance de l'inversibilité par opérations élémentaires
 - a) les opérations élémentaires
 - b) le principe

Proposition 17.12

On ne change pas le caractère inversible d'une matrice en effectuant sur elle des opérations élémentaires sur ses lignes ou sur ses colonnes.

- c) application au calcul de l'inverse d'une matrice
- d) retour sur les matrices triangulaires supérieures

Ch 17 Matrices

- K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- En fait: K peut être remplacé par n'importe quel corps K
(ex: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (premier), $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, ...)

- Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$

I Définition et premières considérations

1) Définition, notation

Déf:

- Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans K est un tableau d'éléments de K à n lignes et p colonnes

- Si A est une telle matrice, on note a_{ij} le coeff en ligne i et en colonne j . si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

et on écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

- De même, si M est une matrice, on écrit

$$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad (\text{etc. ...})$$

On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble de ces matrices

Rq: • On a $M_{n,p}(\mathbb{R}) \subset M_{n,p}(K)$

• * Plus formellement on poserait $M_{n,p}(K) = K^{[1,n] \times [1,p]}$

Ex: Notons $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

On a $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

et
$$\begin{cases} a_{1,2} = 2 \\ a_{2,1} = 4 \end{cases}$$

b) matrices carrées, lignes, colonnes

Si $n=1$, on dit que A est une matrice ligne

Si $p=1$, ————— matrice colonne

Si $n=p$, ————— matrice carrée

On pose $M_n(K) := M_{n,n}(K)$

Si $X \in M_{n,1}(K)$, on notera x_i la i -ième coordonnée de X qd $i \in [1, n]$

On a donc $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$

De $\hat{m}$ pour les lignes.

c) généralisation

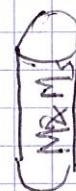
Si R est un anneau, on note aussi $M_{n,p}(R)$

D'où $M_{n,p}(\mathbb{Z})$

d) moyens mnémotechniques

"i ligne ; j colonne"

" $M_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow M \& M^t \rightarrow$ "



2) Addition

Si $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose

$$A+B := (a_{ij} + b_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix}$$

Cela définit une l.a.d

On pose $O_{n,p} := (0)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}}^{n \text{ lignes}}$$

Fait : $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, O_{n,p})$ est un groupe abélien.

⚠ $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens

3) Scalarisation

Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$\lambda A := \left(\lambda a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

noté aussi λA

Ex : $4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 16 & 20 & 24 \end{pmatrix}$

4) Matrices élémentaires

a) déf

Déf : Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et soit $j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$

On note $E_{i_0, j_0}^{[n,p]}$ la matrice

à n lignes et p colonnes

dont tous les coeff sont nuls sauf celui d'indice (i_0, j_0) qui vaut 1

Rq: ie on pose $E_{i_0, j_0}^{[n, p]} := \left(\delta_{i, i_0} \times \delta_{j, j_0} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

• On les appelle matrices élémentaires

• qd le contexte est clair, on note E_{i_0, j_0}

b) exemples

$$\text{On a } E_{2,3}^{[4,4]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } E_{i,1}^{[i,1]} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} i\text{-ième} \\ \text{ligne} \end{matrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

c) décomposition à l'aide des matrices élémentaires

Fait $\textcircled{+}$: On a

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} \cdot E_{i,j}^{[n,p]}$$

D/ $\nearrow$ On écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$= a_{1,1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + a_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

5) colonnes et lignes d'une matrice.

Notation : Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $C_j(A)$ la j -ième colonne de A si $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $L_i(A)$ la i -ième ligne de A si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Ex : On a $L_2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \right) = (4 \ 5 \ 6)$

On a $\textcircled{D}$ $C_j : M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$

$$L_i : M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{1,p}(\mathbb{K})$$

II Multiplication entre matrices

1) Déf°

Déf° : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

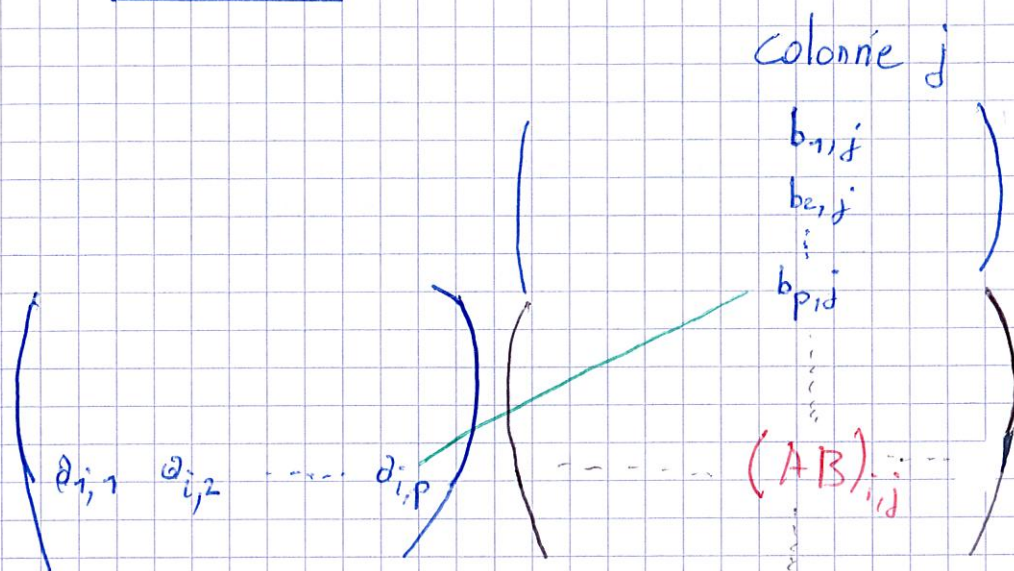
La matrice produit de A par B , notée $A \times B$ ou

AB est la matrice à n lignes et q colonnes déf par :

$$(AB)_{i,j} := \sum_{k=1}^p a_{i,k} \times b_{k,j}$$

$$\text{si } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1, q \rrbracket$$

Schema



Ex: Posons $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

et $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

On a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

On voit que le produit n'est pas intègre

ie $AB = O_{2,2} \not\Rightarrow A = O_{2,2} \text{ ou } B = O_{2,2}$
en g l

Et il n'est pas commutatif : $AB \neq BA$ en g l.

Notation : On pose $O_n := O_{n,n} \in M_n(K)$

Rq : si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut calculer
 $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ $(AB)C$
 $C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$ et $A(BC)$

On montrera que $A(BC) = (AB)C$; on a)

$$(ABC)_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq p \leq q}} a_{ik} b_{kp} c_{pj}$$

Rq* Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Soient $A_1, A_2, \dots, A_N \in M_n(\mathbb{K})$

Alors $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N)_{i,j} =$

$$(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N)_{i,j} = \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_{N-1} \leq n} (A_1)_{i,k_1} (A_2)_{k_1,k_2} \dots (A_N)_{k_{N-1},j}$$

2) Propriétés

Prop $\oplus$

1) $(AB)C = A(BC)$

2) $A(B+C) = AB + AC$

3) $(A+B)C = AC + BC$

4) $(\lambda A) \times B = A(\lambda B) = \lambda(A \times B)$

$$\underline{D/} \quad 2) \textcircled{+} \quad \left(A \times (B+C) \right)_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} \times (B+C)_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^p a_{i,k} \times (b_{k,j} + c_{k,j})$$

$$= \sum_{k=1}^p a_{i,k} \times b_{k,j} + \sum_{k=1}^p a_{i,k} \times c_{k,j}$$

$$= (AB)_{i,j} + (AC)_{i,j} = (AB+AC)_{i,j}$$

^
Cela est vrai pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket$

$$\text{On a } A \times (B+C) = AB + AC$$

3) De $\hat{m}$

4) $\textcircled{AF}$

1) Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

$C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$

Soit $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,r \rrbracket$

On calcule

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{i,j} &= \sum_{k=1}^q (AB)_{i,k} \times C_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^q \left(\sum_{p=1}^p a_{i,p} \times b_{p,k} \right) \times C_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{p=1}^p a_{i,p} \cdot b_{p,k} \cdot c_{k,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A(BC))_{i,j} &= \sum_{k=1}^P a_{i,k} (BC)_{k,j} \\
 &= \sum_{k=1}^P a_{i,k} \sum_{p=1}^q b_{k,p} c_{p,j} \\
 &= \sum_{k=1}^P \sum_{p=1}^q a_{i,k} b_{k,p} c_{p,j} \quad (*)
 \end{aligned}$$

En échangeant dans (*) le nom des variables k et p , on conclut $\square$

3) Multiplication entre matrices élémentaires

$$\boxed{\text{Prop: } \textcircled{T} \quad E_{i,j} \times E_{k,p} = \delta_{j,k} \cdot E_{i,p}}$$

Rappel : $\delta_{j,k} = 1$ si $j=k$ Symbole de Kronecker
 0 sinon

Rq : ie $E_{i,j}^{[n,p]} \times E_{k,p}^{[p,q]} = \delta_{j,k} E_{i,p}^{[n,q]}$

D/ Soit $(a,b) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$. On a

$$(E_{i,j} \times E_{k,p})_{a,b} = \sum_{c=1}^P (E_{i,j})_{a,c} \times (E_{k,p})_{c,b}$$

Déjà, si $a \neq i$, on a $\forall c, (E_{i,j})_{a,c} = 0$ $\textcircled{AC}$

et donc $\sum_{c=1}^P (E_{i,j})_{a,c} \times (E_{k,p})_{c,b}$

De même, si $b \neq p$, on a aussi: $(E_{i,j} \times E_{k,p})_{a,b} = 0$

On traite le cas $a=i$ et $b=p$

On calcule

$$(E_{i,j} \times E_{k,p})_{i,p} = \sum_{c=1}^p (E_{i,j})_{i,c} \times (E_{k,p})_{c,p}$$

Si $c \neq j$, on a $(E_{i,j})_{i,c} = 0$

$$\text{Donc } (E_{i,j} \times E_{k,p})_{i,p} = 1 \times (E_{k,p})_{j,p} = \delta_{k,j}$$

. CCL

* Si $k=j$, on a $(E_{i,j} \times E_{k,p})_{i,p} = 1$

et $\forall (a,b) \neq (i,j)$, $(E_{i,j} \times E_{k,p})_{a,b} = 0$

Ainsi, $E_{i,j} \times E_{k,p} = E_{i,p}$

* si $k \neq j$, on a $(E_{i,j} \times E_{k,p})_{i,p} = 0$

Donc $\forall a,b$, $(E_{i,j} \times E_{k,p})_{a,b} = 0$

Le $E_{i,j} \times E_{k,p} = \mathbf{0}_{n,p}$ ie $E_{i,j} \times E_{k,p} =$

$\mathbf{0} \cdot E_{i,p}$



h) Techniques de calcul "en colonnes" !!

a) matrice $\times$ colonne = colonne

Fait - Rx : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ une colonne

Alors : 1) $AX \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est une colonne

2) Si $i \in [1, n]$, on a

$$(AX)_i = \sum_{k=1}^p a_{i,k} x_k$$

$$\textcircled{6} \quad \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \rightarrow a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p$$

D/ ok ■

Ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Rq : matrice $\times$ ligne : c'est impossible

(cf " $M_{n,p}(\mathbb{K}) \times M_{1,q}(\mathbb{K})$ ")

sauf si la matrice est une colonne

• On a matrice $\times$ colonne = colonne

• "D'ailleurs", ligne $\times$ matrice = ligne

b) base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$

Déf: Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$\varepsilon_i^{[n]} := \begin{matrix} \text{i-ième} \\ \text{ligne} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

et $\varepsilon_i := \varepsilon_i^{[n]}$ qd le contexte est clair.

La famille $(\varepsilon_1^{[n]}, \varepsilon_2^{[n]}, \dots, \varepsilon_n^{[n]})$
est appelée base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$

Ex : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

est la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{K})$

Rq: On a donc $\varepsilon_i^{[n]} = \varepsilon_{i,1}^{[n,1]}$
si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Fait:

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i^{[n]}$$

D/ ok

c) extraction de colonne

Ex : On a

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \text{---} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \text{---} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Fait - $R^X \textcircled{T}$

$$A \cdot \varepsilon_j = C_j(A)$$

D/ On a $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$
 $\varepsilon_j^{[p]} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

Donc $A \cdot \varepsilon_j^{[p]} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On calcule

$$\begin{aligned} (A \cdot \varepsilon_j^{[p]})_i &= \sum_{p=1}^n A_{i,p} \cdot \underbrace{(\varepsilon_j^{[p]})_p}_{= \delta_{j,p}} \\ &= A_{i,j} \cdot 1 = a_{i,j} = (C_j(A))_i \end{aligned}$$

Ainsi, on a mg

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (A \cdot \varepsilon_j)_i = (C_j(A))_i$$

cc/ : On a mg $A \cdot \varepsilon_j = C_j(A)$ m

d) AX est une combinaison linéaire (CL)
des colonnes de A

Prop - Rx !! ∞

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_p C_p(A)$$

ie

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^p x_j C_j(A)$$

Ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 C_1(A) + 0 C_2(A) + 1 C_3(A)$$

$$= C_1(A) + C_3(A)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \cancel{1 C_1(A)} + [C_3(A) - C_2(A)]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

D/⑦

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = A \sum_{j=1}^p x_j \epsilon_j = \sum_{j=1}^p x_j (A \times \epsilon_j)$$

cf II.2)

$$= \sum_{j=1}^p x_j \underbrace{(A \cdot \epsilon_j)}_{C_j(A)} = \sum_{j=1}^p x_j C_j(A)$$

e) multiplication colonne par colonne

Prop- R^X !! $^\infty$

1) Le produit matriciel (à droite) se fait
colonne par colonne.

2) ⑦ La j -ième colonne de AB se calcule
en multipliant A par la j -ième colonne
de B

3) ⑧ $\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, C_j(AB) = A C_j(B)$

h) $A \cdot (C_1 | C_2 | \dots | C_q) = (A C_1 | A C_2 | \dots | A C_q)$

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 8 & -6 \\ 8 & 14 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 14 & 4 \\ 6 & 23 & 7 \end{pmatrix}$$

D/ Jolie

(T)

$$\begin{aligned} C_j(AB) &= (AB) \varepsilon_j = A(B \cdot \varepsilon_j) \\ &= A \times C_j(B) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

b) Cas "colonne x ligne" (cas Chlorique; cf CP)

Prop (CP)

$$\begin{aligned} C \cdot L &= C \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 C & a_2 C & \dots & a_p C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D/ ok $\blacksquare$

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

5) Technique de calcul "en ligne"

Tout ce qui précède par la droite pour les colonnes
est vrai à gauche pour les lignes

Notation : $(0 \dots 0 \underset{j\text{-ième position}}{\overset{\nearrow}{1}} 0 \dots) \in M_{1,p}(K)$

noté $\hat{E}_j$

o) ligne $\times$ matrice = ligne

Prop :

$$1) \hat{E}_i \cdot A = L_i(A)$$

$$2) (a_1 \dots a_n) \cdot A = a_1 L_1(A) + \dots + a_n L_n(A)$$

$$3) L_i(AB) = L_i(A) \cdot B$$

D/ ok ■

Ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ -2 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

6) Matrice identité

Def^o: La matrice identité notée I_n est

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Fact^o

$$1) A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \Rightarrow A I_p = A$$

$$2) A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \Rightarrow I_n A = A$$

DL 1) Démonstration: $A \cdot I_p \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Ensuite: soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a

$$C_j(A I_p) = A C_j(I_p) \stackrel{\text{Astuce}}{=} \varepsilon_j^{[p]} = A \varepsilon_j = C_j(A)$$

CC: $A I_p$ et A ont les $\hat{m}$ colonnes

$$\text{Donc } A I_p = A$$

2) De $\hat{m}$ sur les lignes puisqu^o $L_i(I_n) = \hat{\varepsilon}_i$

7) Produit par bloc

On peut multiplier les matrices par blocs

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \overset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} & \overset{A_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \\ \overset{A_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & \overset{A_4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overset{B_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & \overset{B_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \\ \overset{B_2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & \overset{B_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_2 & A_1 B_3 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_2 & A_3 B_3 + A_4 B_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

- Rq :
- On utilisera cette technique quand les matrices ont des formes remarquables par bloc.
 - De même avec plus de 2 blocs.

En particulier.

Prop

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{qq} \downarrow \\ \text{qq} \uparrow \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \xleftarrow{n_1} & \xleftarrow{n_2} \\ A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} \xrightarrow{qq} & \xrightarrow{qq} \\ B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right) \begin{array}{c} \uparrow n_1 \\ \uparrow n_2 \end{array} \\
 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ \hline A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{array} \right)
 \end{array}$$

III Transposition

1) Déf

Déf°

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A notée A^T est la matrice dans $M_{p,n}(\mathbb{K})$ déf par :

$$\forall (i,j) \in [1,n] \times [1,p], (A^T)_{ji} = A_{ij}$$

Ex ⊕

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \text{ on a } A \in M_{3,2}(\mathbb{K})$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

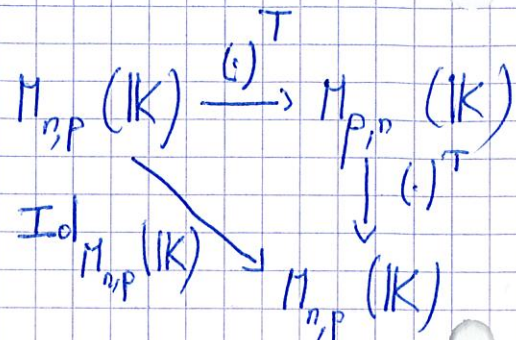
2) Propriétés

Fait $\oplus$

$$(A^T)^T = A$$

D/ ok $\blacksquare$

Rq : Ainsi, le diagramme commute



Dans $M_n(\mathbb{K})$, $(\cdot)^T$ est une endo application, ie on a $(\cdot)^T : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ et on a

$$(\cdot)^T \circ (\cdot)^T = \text{Id}_{M_n(\mathbb{K})}$$

• I.e la transposition dans $M_n(\mathbb{K})$ est une involution

Rq : on note aussi ${}^t A$ au lieu de A^T

Fait :

$$1) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$2) (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$\textcircled{\text{exo}}^*$ Traduire 1) et 2) en termes de diagrammes commutatifs.

D/ ok $\blacksquare$

Prop : ⑦

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T$$

D/ Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

On a $AB \in M_{n,q}(\mathbb{K})$

Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. On a

$$\left((AB)^T \right)_{ki} = (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk}$$

$$\text{et } (B^T \times A^T)_{ki} = \sum_{j=1}^p \underbrace{(B^T)_{kj}}_{b_{jk}} \times \underbrace{(A^T)_{ji}}_{a_{ij}}$$

■

Corollaire : les colonnes de A^T correspondent aux lignes de A

D/ Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{On a } C_i(A^T) = A^T \cdot \varepsilon_i = A^T (\varepsilon_i^T)^T$$

$$= (\varepsilon_i^T A)^T$$

$$= (\hat{\varepsilon}_i A)^T$$

$$= L_i(A)^T$$

cd :

$$C_i(A^T) = L_i(A)^T$$

■

IV Matrices carrées

Grand avantage des matrices carrées :

si A est carrée, on peut élever A à une puissance.

$$\left(\text{si } A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \right. \\ \left. n \neq p \right\} \Rightarrow A \times A \text{ n'a pas sens}$$

Rq : De $\bar{m}$ si $f \in \mathcal{T}^p(E, E)$, $f \circ f$ a un sens.

1) Structure d'anneau

On a une application $M_{n,p}(\mathbb{K}) \times M_{p,q}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n,q}(\mathbb{K})$
 $(A, B) \mapsto A \times B$

Ainsi, on a $M_n(\mathbb{K})^2 \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$
 $(A, B) \mapsto A \times B$

C'est une loi associative

Fait : $(M_n(\mathbb{K}), +, \times, 0_n, I_n)$

est un anneau (non commutatif, non intègre si $n \geq 2$)

2) Commutation

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

On note $\mathcal{C}(A) := \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$

C'est le commutant de A

1°) $I_n \in \mathcal{C}(A)$

2°) $A \in \mathcal{C}(A)$

3°) $\text{Faît: } \left. \begin{array}{l} M \in \mathcal{C}(A) \\ N \in \mathcal{C}(A) \end{array} \right\} \Rightarrow M + N \in \mathcal{C}(A)$

D/ $\textcircled{T}$ $A \times (M + N) = A \times M + A \times N$
 $= M \times A + N \times A$
 $= (M + N)A$ ■

4°) $\text{Faît} \textcircled{T}$: $M \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow \lambda M \in \mathcal{C}(A)$

D/ $\textcircled{AF}$ ■

5°) Si A^{-1} existe alors $A^{-1} \in \mathcal{C}(A)$

D/ $A \cdot A^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$

6°) Faît $\left. \begin{array}{l} M \in \mathcal{C}(A) \\ N \in \mathcal{C}(A) \end{array} \right\} \Rightarrow M \times N \in \mathcal{C}(A)$

D/ $\textcircled{T}$ $A(MN) = A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN)$
 $= M(NA) = (MN)A$

7°) Faît : $\mathcal{C}(A)$ sous-anneau de $M_n(K)$

8°) Rappel!

Si $A \in M_n(K)$ et si $P \in K[X]$ qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ (avec $\forall k, a_k \in K$), alors

on peut évaluer P en A , c'est $P(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $P = 3x^2 - 2x + 8$

On a $P(A) = 3A^2 - 2A + 8I_2$

Rq: Mieux, on dispose de

$$\begin{aligned} \text{éval}_A : K[X] &\longrightarrow M_n(K) \\ P &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

On a $\text{éval}_A \in \text{Hom}_{(\text{Ann})}(K[X], M_n(K))$

ie $\oplus$
$$\begin{cases} \text{éval}_A(P+Q) = \text{éval}_A(P) + \text{éval}_A(Q) \\ \text{éval}_A(PQ) = \text{éval}_A(P) \times \text{éval}_A(Q) \end{cases}$$

ie $\oplus$
$$\begin{aligned} (P+Q)(A) &= P(A) + Q(A) \\ (PQ)(A) &= P(A) \times Q(A) \end{aligned}$$

9°)

Corollaire

$$\forall p \in \mathbb{K}[X], p(A) \in \mathcal{C}(A)$$

Ex: $8A^2 - 13A + 8I_n \in \mathcal{C}(A)$

Tout polynôme en A commute avec A

D/ $\textcircled{\text{exo}} \approx \textcircled{\text{+}}$

B) On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Calculons $\mathcal{C}(A)$

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Je pose $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On a les équivalences suivantes (OALÉS)

$$M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AM = MA$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+hc & 3b+hd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b+ad & 2a+hb \\ c+3a & 2c+hd \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{a} + 2c = \cancel{a} + 3b & L_1 \\ b + 2d = 2a + hb \\ 3a + hc = c + 3a \\ 3b + \cancel{hd} = 2c + \cancel{hd} & L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b + 2c = 0 \\ 2a + 3b - 2d = 0 \\ 3a + 3c - 3d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c - d = 0 \\ 2a + 3b - 2d = 0 \\ -3b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c - d = 0 \\ 2a + 3b - 2d = 0 \\ -3b + 2c = 0 \end{cases}$$

(n) J'aligne les inconnues

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c - d = 0 \\ 3b - 2c = 0 \\ -3b + 2c = 0 \end{cases}$$

(n) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} + \boxed{c} - \boxed{d} = 0 \\ \boxed{3b} - \boxed{2c} = 0 \end{cases}$$

(n) Ici, a et b sont les inconnues principales

Donc c et d sont les paramètres

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = d - c \\ b = \frac{2}{3}c \end{cases}$$

CC :

On a $\mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} d-c & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix} ; (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Rq! : Méthode mystère

Ici, on a 2 paramètres : c et d

Imaginons qu'on ait 3 paramètres : u, v, w

On a l'ensemble : $\left\{ M(u, v, w) ; (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

(R^x) On considère les valeurs élémentaires des paramètres

ie $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$

Ici, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
||

$$\text{Donc } \mathcal{C}(A) = \left\{ c \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d I_2; (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \left\{ \lambda I_2 + \mu \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ie $\mathcal{C}(A)$ est l'ens des combinaisons linéaires
de I_2 et $\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(exo) $M_q \mathcal{C}(A) = K[A]$

Notation: $K[A] := \{P(A); P \in K[X]\}$

(exo) $\hat{=}$ A-t-on $\forall A \in M_n(K), \mathcal{C}(A) = K[A]?$

11°) Fait: $M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{C}(M)$

12°) Fait: $A \in \mathcal{C}(B) \Rightarrow \forall k, p \in \mathbb{N}, A^k \in \mathcal{C}(B^p)$

D/ (déf) ■

3) Fles de Newton et Bernoulli

Prop: Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tq $AB = BA$

Alors

$$1) (A+B)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$$

$$2) A^N - B^N = (A-B) \times \sum_{k=0}^{N-1} A^k B^{N-1-k}$$

D/ ok ■

V Matrices inversibles

Rappel: Si R anneau, on a défini
 $(R, +, \times, 0, 1)$

le groupe des inversibles de R : c'est

$$(U(R), \times, 1)$$

noté égal^t $(R^\times, \times, 1)$

Déf^o: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A
est inversible ssi $\exists B \in M_n(\mathbb{K}) : AB = BA = I_n$.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ens des matrices
carrées de taille n inversible

Rq:

- On a $GL_n(\mathbb{K}) = U(M_n(\mathbb{K}))$
- On a $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot, I_n)$ est un groupe
- Il est non-commutatif
- On l'appelle groupe linéaire d'ordre n à coeff dans $\mathbb{K}$.

Exemple: • $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$
et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Rappel: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Ⓢ $\exists ? A \in M_2(\mathbb{R}) : A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$

- On a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

⚠ $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par somme

2) Premières propriétés

Prop: $\left. \begin{matrix} A \in GL_n(\mathbb{K}) \\ B \in GL_n(\mathbb{K}) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} AB \in GL_n(\mathbb{K}) \\ \text{et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{matrix}$

D/ok

Prop: $\left. \begin{matrix} A \in GL_n(\mathbb{K}) \\ \lambda \in \mathbb{K}^* \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lambda A \in GL_n(\mathbb{K})$
et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

D/⑦ on a

$$\lambda A \cdot \frac{1}{\lambda} A^{-1} = \lambda \frac{1}{\lambda} A A^{-1} = I_n$$

$$\text{et de m. } \frac{1}{\lambda} A^{-1} \lambda A = I_n \quad \blacksquare$$

Clrex

$$A \text{ inv} \longrightarrow -A \text{ inv} \text{ ; or } A + (-A) = O_n$$

et O_n n'est pas inversible

Ainsi : $GL_n(K)$ n'est pas stable par + $\blacksquare$

Fait ⑦

$$A \text{ inv} \Rightarrow A^k \text{ inv et } (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k \\ k \in \mathbb{N}$$

D/rec sur k

$$k=0, 1 \text{ ok.}$$

$$(H)^e : \text{Osq } A^k \text{ inv et } (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

$$\hat{C} \quad A \text{ inv, on a } A A^k \text{ inv et}$$

$$(A A^k)^{-1} = (A^k)^{-1} A^{-1}$$

$$= (A^{-1})^k A^{-1} = (A^{-1})^{k+1} \quad \blacksquare$$

3) Transposition et inversibilité

Prop :

Soit $A \in M_n(K)$. Alors
 $A \text{ inv} \Rightarrow \begin{cases} A^T \text{ inv} \\ \text{et } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \end{cases}$

D/ Qsq A inversible.

$$\text{On a } (A \cdot A^{-1} = I_n)^T$$

$$\text{Donc } (A \cdot A^{-1})^T = (I_n)^T$$

$$\text{Donc } (A^{-1})^T A^T = I_n$$

$$\text{De m : } A^T (A^{-1})^T = I_n$$

$$\text{Par déf : } A^T \text{ inv et } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

4) Reconnaître facil.^{nt} une matrice non inversible

a) lignes / colonnes nulles

Prop - Rx : 1) A possède 1 colonne nulle

$\Rightarrow A$ non inv.

2) ligne

Ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ non inv.}$$

D 1) $\textcircled{T}$ Fixons $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tq $C_{j_0}(A) = \mathcal{O}_{n,1}$

$$O_n \cap A \cdot \varepsilon_{j_0} = O_{n,1}$$

ORPA et osq A inv

Donc $\boxed{A^{-1}A} \varepsilon_{j_0} = A^{-1}0_{n,1} = 0_{n,1}$

$$\underbrace{I_n}_{\varepsilon_j}$$

$$(n \text{ importe qui}) \times 0 = 0$$

Donc $\varepsilon_{j_0} = 0_{n,1}$ Absurde

2) $O_{sq} \quad L_{i0}(A) = O_{1,n}$

Donc $C_{io}(A^T) = O_{n,1}$

Donc A^T non inversible.

Or A non inv $\Leftrightarrow A^T$ non inv.

Donc A non inv.

b) lignes / colonnes égales

Prop- $\mathbb{R}^X$

1) A possiede 2 colonnes égales

$\Rightarrow A$ non inv.

2) _____ lignes _____

$$\underline{D/} \quad 1)^\oplus \quad C_{j_0}(A) = C_{j_1}(A)$$

$$A \varepsilon_{j_0} = A \varepsilon_{j_1}$$

⊕ Astuce $A(\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_1}) = 0_{n,1}$

Donc ORPA

$$A^T A (\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_1}) = 0_{n,1}$$

Ie $\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_1} = 0_{n,1}$

Donc $\varepsilon_{j_0} = \varepsilon_{j_1} : \textcircled{\text{Abs}}$

2) (...)

■

Ex : $\begin{pmatrix} 1 & \text{---} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{---} & 1 \end{pmatrix}$ non inv.

c) relation de liaison (RL) entre lignes/colonnes.

Prop - R^x

1) S'il y a une RL entre les colonnes de A,
alors A non inv

2) Dual.

Ex : On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

D/ $\textcircled{D}$ On a $C_2(A) - C_1(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $C_3(A) - C_2(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\textcircled{D}$ $C_2 - C_1 = C_3 - C_2$

I.e $C_3 - 2C_2 + C_1 = O_{3,1}$

D/ $\textcircled{CR}$

1) Orq il existe une relation de liaison non nulle entre les colonnes de A

Fixons donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls

tg $\lambda_1 C_1(A) + \lambda_2 C_2(A) + \dots + \lambda_n C_n(A) = O_{n,1}$

or, $\overset{M}{R^X}$, on a

$$\underbrace{\lambda_1 C_1(A) + \lambda_2 C_2(A) + \dots + \lambda_n C_n(A)}_{CL \text{ des } C_j(A)}$$

$$= A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, On a $A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = O_{n,1}$

ORPHA et orq A inv on a donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} O_{n,1} = O_{n,1}$$

Donc $\textcircled{AC}$ $\forall i, \lambda_i = 0$ Absurde

2) OK $\blacksquare$

5) Noyau d'une matrice

a) Déf°

Déf°: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

Le noyau de A , noté $\text{Ker}(A)$, est l'ens def par

$$\text{Ker}(A) = \left\{ X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1} \right\}$$

Rq: on verra ⊕ tard le lien avec les noyaux des morphismes

Fait !! : On a tjrs $0_{n,1} \in \text{Ker}(A)$

b) interprétation du noyau

Le noyau de A rassemble toutes les RL entre les colonnes de A

!! ∞

Par exemple, posons $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

On a vu que $C_1(A) - 2C_2(A) + C_3(A) = 0$

Donc $\overset{M}{(R^X)}$, on a : $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$

Ie on a $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$

c) Calcul

Calculons $\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Déjà, on sait que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$

Modèle de rédaction

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ On pose $X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

OALLES

$$X \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3y - 6z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ -6y - 12z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-3} \end{cases}$$

$$\text{car } L_3 = 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

Donc, on a $\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}; z \in \mathbb{R} \right\}$

③ pour $z=1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ie $\text{Ker}(\dots) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Rq: Dans ce cas, on note, $\neq \oplus$ l'ord

d) une matrice inv a un noyau nul

Prop - $\mathbb{R}^n$

1) $A \text{ inv} \Rightarrow \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$

2) En contraposant: $\text{Ker}(A) \neq \{0_{n,1}\} \Rightarrow A \text{ non inv.}$

D/ ① 1) Osg $A \text{ inv}$

Mq $\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$

Soit $X \in \text{Ker}(A)$

On a $AX = 0_{n,1}$ Donc $A^{-1}AX = 0_{n,1}$

Ie $X = 0_{n,1}$

Donc $\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$

2) ok ■

6) $\square$ Critère nucléaire d'inversibilité

$\square$ Th : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

1) Orsq $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$

Alors A inv

2) ie : $\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\} \Rightarrow A$ inv.

3) Ainsi : A inv $\Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$

D/ admise pour l'instant

7) Théorème d'inversibilité unilatérale

Th : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

1) $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$

2) Dans ce cas, A inv et $A^{-1} = B$

D/ 1) Orsq $AB = I_n$

Hq B est inv. $\textcircled{R^X}$ Je calcule $\text{Ker}(B)$

Soit $X \in \text{Ker}(B)$

(mq $\text{Ker } B = \{0_{n,1}\}$)

On a $BX = 0_{n,1}$ donc $ABX = A 0_{n,1} = 0_{n,1}$

$\hat{=}$ $AB = I_n$, on a $X = 0_{n,1}$

Donc $\text{Ker}(B) = \{0_{n,1}\}$

Donc B inv

Donc $AB B^{-1} = I_n B^{-1}$ ie $A = B^{-1}$

Donc $BA = B B^{-1} = I_n$

2) ok ■

Ctrex :

(exo) Trouver $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}} \\ f \circ g \neq \text{Id}_{\mathbb{R}} \end{cases}$

VI Ensemble de matrices remarquables.

1) Matrices scalaires

Ce sont des matrices du type λI_n

Fait : Soit $\lambda \in K$

1) λI_n commute avec toute $A \in M_n(K)$

2) ie $\forall A, \lambda I_n \in \mathcal{C}(A)$

Rq : cf $\lambda AB = A(\lambda B)$

D/ 1) $\oplus \quad \lambda I_n \cdot A = I_n \lambda A = \lambda A$

$$A \lambda I_n = \lambda A I_n = \lambda A \quad \blacksquare$$

2) ok

2) Matrices diagonales

a) défⁿ

Notatⁿ $\textcircled{r}$: On note

$$\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \dots \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

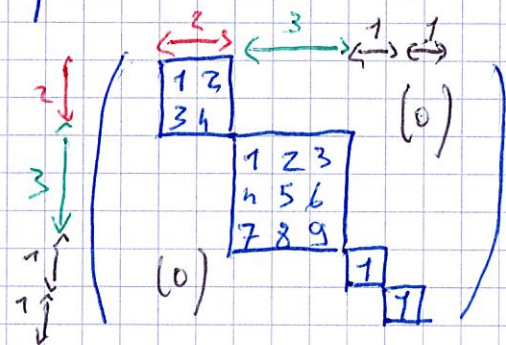
Ces matrices sont dites diagonales

On note $D_n(K) := \left\{ \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n); (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \right\}$

l'ens des matrices diagonales.

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \in D_3(\mathbb{R})$

Rq: On parle aussi de matrices diagonale par blocs.

P. ex: 

est diag par blocs de structure $(2, 3, 1, 1)$

b) action.

1) A. $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice déduite de A après multiplication des colonnes de A par les λ_i correspondants

$$\text{ie } A \text{ Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(\lambda_1 C_1(A) \mid \lambda_2 C_2(A) \mid \dots \mid \lambda_n C_n(A) \right)$$

$$z) \text{ Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) A : \text{dvd}.$$

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & (0) \\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

c) Produit

Fait - R^X $\textcircled{T}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_n & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_n & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & & \\ & \lambda_n \mu_n & \end{pmatrix}$$

Ok grâce à b) et b) est csq des techniques en colonne $\blacksquare$

Rq!!: c'est encore vrai pour les matrices diagonales par blocs de m structure.

$\textcircled{\text{exo}}$ Énoncer le résultat ou donner un exemple

d) inversibilité et inverse

Prop : (T)

1) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ inv} \iff \forall i, \lambda_i \neq 0$

2) Dans ce cas, on a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$

D/ $(\Rightarrow)$ On mq la contraposée

ie $\text{non}(\forall i, \lambda_i \neq 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ non inv}$

D/ Osg $\exists i_0 \text{ s.t. } \lambda_{i_0} = 0$; on fixe un tel i_0

On a $C_{i_0}(\dots) = 0_{n,1}$; donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ non inv.}$

$(\Leftarrow)$ Osg $\forall i, \lambda_i \neq 0$

On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$

On a bien $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = I_n$

Rq!! Le résultat est encore vrai pour les mat diag. par blocs

(exo) Démontrer

Prop : Soit $r \in \mathbb{N}$ (= nb de blocs)

Soit $(m_1, m_2, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ (= taille des blocs)

Soient $A_1 \in M_{m_1}(\mathbb{K}), A_2 \in M_{m_2}(\mathbb{K}), \dots, A_r \in M_{m_r}(\mathbb{K})$

Alors : 1) $\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_r \end{array} \right)$ inv $\Leftrightarrow \forall i, A_i$ inv.

2) Dans ce cas, on a $\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_r \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_r^{-1} \end{array} \right)$

D/ (exo) m

(exo) Tester un exemple.

3) Matrice triangulaires sup

a) déf^o

Déf^o : Ce sont les matrices du type $\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & * \end{pmatrix}$

• On note $T_n^+(K)$ l'ens de ces matrices

• On dit que M est triangulaire supérieure stricte

ssi M est du type $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$

• On note $T_n^{++}(K)$ l'ens de ces matrices

b) Produit

Prop

- 1) Le produit de deux mat. triang. sup est triang. sup.
- 2) $\text{Ie } T_n^+(\mathbb{K})$ est stable par produit.
- 3) De plus, les coeff diag. du produit sont les produits des coeff. diag. correspondants
Ie, on a $\textcircled{+}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ (0) & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & * \\ (0) & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

D/ $\textcircled{+}$ lin.

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rq: Ceci se généralise aux matrices triang. sup. par blocs. On pose

$$T_{(n_1, n_2, \dots, n_r)}^+(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{} & * & \\ \vdots & \ddots & \\ (0) & \boxed{} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \boxed{} \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{matrix} \xleftarrow{n_1} & \xleftarrow{n_2} & & \xleftarrow{n_r} \end{matrix}$

Prop : $\oplus$

1) $T_{(n_1, \dots, n_r)}^+ (\mathbb{K})$ est stable par produit

$$2) \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & * \\ & \boxed{A_2} & \\ (0) & & \ddots \\ & & \boxed{A_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & * \\ & \boxed{B_2} & \\ (0) & & \ddots \\ & & \boxed{B_r} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1 B_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \end{pmatrix}$$

c) inverse !!

Prop - Rx !!

$$1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ inv } \Leftrightarrow \forall i, \lambda_i \neq 0$$

$$2) \text{ Dans ce cas, } \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & * \\ (0) & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

D/ 1) $\oplus$ loin

2) $\oplus$ tard



Rq :

• $T_n^+(K)$ est évidemment stable par +

De (4) $T_n^+(K)$ est stable par $\times$

Et $I_n \in T_n^+(K)$

sc : $T_n^+(K)$ est un sous-anneau de $M_n(K)$

• De $\hat{m}$ $D_n(K)$ est un sous-anneau de $T_n^+(K)$

•* De $\hat{m}$ $T_{(n_1, \dots, n_r)}^+(K)$ est un sous-anneau de $M_n(K)$

$$(n_1 + \dots + n_r = n)$$

• Et, montrant :

$$T_n^+(K) \subset T_{(n_1, \dots, n_r)}^+(K)$$

$$\left(\text{cf } \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cc} * & * \\ (0) & * \end{array} \\ \hline \end{array} & & * \\ & \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cc} * & * \\ (0) & * \end{array} \\ \hline \end{array} & * \\ & & \ddots \\ & & \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} \right)$$

Si on note $\text{Scal}(K)$ l'ens des matrices scalaires.

C'est un sous-anneau de $D_n(K)$

cc1: O_n a le schéma

$$\text{Scal}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\text{commutatif}} D_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\text{commutatif}} T_n^+(\mathbb{K}) \begin{cases} \xrightarrow{T_{(n_1, \dots, n_r)}^+(\mathbb{K})} M_n(\mathbb{K}) \\ \xrightarrow{T_{(n_1, \dots, n_s)}(\mathbb{K})} M_n(\mathbb{K}) \end{cases}$$

(dans (Ann))

Rq: ① $\text{Scal}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$ en tant qu'anneau

via $\varphi: \mathbb{K} \xrightarrow{\simeq} M_n(\mathbb{K})$
 $\lambda \mapsto \lambda I_n$

② $D_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$ dans (Ann)

Corollaire

$T_n^{++}(\mathbb{K})$ est stable par produit

$$\underline{D/} \quad \begin{pmatrix} \circ & * \\ (o) & o \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \circ & (*) \\ (o) & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{oxo} & (*) \\ (o) & \text{oxo} \end{pmatrix}$$

Rq: De plus, $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est stable par +
 $\hat{c} I_n \notin T_n^{++}(\mathbb{K})$, ce n'est pas un sous-anneau

Rq: La propos^o sur les inverses dans $T_n^+(\mathbb{K})$ se généralise aux matrices triang. sup. par blocs.

I.e

Prop :

$$1) \left(\begin{array}{c|c} \boxed{A_1} & (*) \\ \hline (0) & \boxed{A_r} \end{array} \right) \text{ inv} \iff \forall i, A_i \text{ inv.}$$

$$2) \text{ Alors } \left(\begin{array}{c|c} \boxed{A_1} & * \\ \hline (0) & \boxed{A_r} \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{A_1^{-1}} & * \\ \hline (0) & \boxed{A_r^{-1}} \end{array} \right)$$

4) Espaces $T_n^{(p)}(\mathbb{K})$

a) réécriture de $T_n^+(\mathbb{K})$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$\text{On a } A \in T_n^+(\mathbb{K}) \iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$\text{Et. } A \in T_n^{++}(\mathbb{K}) \iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \geq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$\textcircled{\text{B}^0} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{array} \right) \iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j-1 \Rightarrow a_{ij} = 0$$

b) déf

$$\text{On pose } \textcircled{\text{B}^0} T_n^{(p)}(\mathbb{K}) := \left\{ A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j-p \Rightarrow a_{ij} = 0 \right\}$$

Rq: O_n et $\begin{cases} T_n^{(0)}(K) = T_n^+(K) \\ T_n^{(1)}(K) = T_n^{++}(K) \end{cases}$

Ex: O_n et $T_n^{(2)}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overset{\text{1ère sur diagonale}}{\#} \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Fait: $T_n^{(n)}(K) = \{O_n\}$

c) Exemple

O_n pose $N := \begin{pmatrix} 0 & \overset{1}{\swarrow} & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$

O_n et $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overset{1}{\swarrow} & (0) \\ & \ddots & & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$

D/ O_n et $\begin{cases} \forall j \geq 1, C_j(N) = \bigoplus_{i=j}^n R^{\times} \text{ "petit n"} \\ C_1(N) = O_{n,1} \end{cases}$

O_n calcule $C_j(N^2) = N \times C_j(N)$

$= N \times \varepsilon_{j-1} = C_{j-1}(N) = \varepsilon_{j-2} \text{ si } j \geq 2$

et $C_2(N^2) = N(C_2(N)) = N \cdot \varepsilon_1 = C_1(N) = O_{n,1}$

et $C_1(N^2) = N C_1(N) = N(O_{n,1}) = O_{n,1}$

De $\hat{m}$ $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \overset{1}{\swarrow} & (0) \\ & \ddots & & & \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix}$

Fait:

$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^n = O_n$$

d) Produit

Prop ^(T) $\left. \begin{array}{l} M \in T_n^{(p)}(\mathbb{K}) \\ N \in T_n^{(q)}(\mathbb{K}) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \in T_n^{(p+q)}(\mathbb{K})$

D/ Soient $M \in T_n^{(p)}$ et $N \in T_n^{(q)}$

$$M, N \in T_n^{(p+q)}$$

$$\text{On a } i > j-p \Rightarrow m_{ij} = 0$$

$$i > j-q \Rightarrow m_{ij} = 0$$

$$M, N \in T_n^{(p+q)} \Rightarrow i > j-p-q \Rightarrow (MN)_{ij} = 0$$

$$M, N \in T_n^{(p+q)}$$

$$\text{ie } M, N \in T_n^{(p+q)} \Rightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j - (p+q) \Rightarrow (MN)_{ij} = 0$$

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tq $i > j - (p+q)$

On a

$$(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik} n_{kj}$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

On distingue deux cas

1^{er} cas : Orsq $i > k-p$

On a $m_{ik} = 0$ car $M \in T_n^{(p)}(IK)$

Donc $m_{ik} \cdot n_{kj} = 0$

2^e cas : Orsq $i \leq k-p$

Or, on a $i > j-p-q$, Ie on a $k-p > i > j-p-q$

Donc $k-p > j-p-q$

Donc $k > j-q$

Donc $n_{kj} = 0$ car $N \in T_n^{(q)}(IK)$

Donc $m_{ik} \times n_{kj} = 0$

CC on a

$\forall k \in [1, n], m_{ik} \times n_{kj} = 0$

Donc $\sum_{k=1}^n m_{ik} \times n_{kj} = 0$

Ie $(MN)_{ij} = 0$

Donc $MN \in T_n^{(p+q)}(IK)$ $\blacksquare$

Corollaire : $\textcircled{T}$

$$\left. \begin{array}{l} M \in T_n^{+}(\mathbb{K}) \\ N \in T_n^{+}(\mathbb{K}) \end{array} \right\} \Rightarrow M \times N \in T_n^{+}(\mathbb{K})$$

D/ ok

Rq : Soient $M, N \in T_n^{+}(\mathbb{K})$

Alors

$$\begin{aligned} (MN)_{ii} &= \sum_{k=1}^n m_{ik} \times n_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{m_{ik}}_{=0} \underbrace{n_{ki}}_{=0} + m_{ii} \times n_{ii} + \sum_{k=i+1}^n m_{ik} \underbrace{n_{ki}}_{=0} \\ &= \text{ok} \end{aligned}$$

Rq : Dans $T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ et dans la proposition sur le produit, on peut prendre $p, q < \infty$

Rq : $\textcircled{\infty}$

Traditionnell^{nt}, on travaille avec les matrices triang. sup.

À retenir : TOUT ce qui marche avec $T_n^{+}(\mathbb{K})$ marche de même avec les matrices triang. inf. ($T_n^{-}(\mathbb{K})$)

5) Matrices symétriques et anti-symétriques

a) Déf

Déf: Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$

• On dit que M est symétrique Δ ssi $M^T = M$

On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ens de ces matrices

• On dit que M est antisymétrique Δ ssi $M^T = -M$

On note $A_n(\mathbb{K})$...

Ex:
$$\begin{pmatrix} 13 & 1 & 8 \\ 1 & 14 & 5 \\ 8 & 5 & 15 \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R})$$

Rq: Soit K un corps, on dit que K est de caractéristique différente de 2.

$$\Delta$$

 Δ ssi $1_K + 1_K \neq 0_K$

$$\text{ie } \Delta$$

 Δ ssi $2 \neq 0$ dans K

Rq: Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $n=0$. Ainsi:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ n'est pas de caractéristique } \neq 2$$

Prop :

Soit $M \in A_n(K)$ Alors : $\forall i, m_{ii} = 0$

D/ Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{On a } (M)_{ii} = m_{ii} \text{ et } (M^T)_{ii} = m_{ii}$$

$$\hat{=} M^T = -M, \text{ on a } m_{ii} = -m_{ii}$$

$$\text{Donc } 2 m_{ii} = 0$$

or $2 \neq 0$ et K corps ; donc 2 est inversible

$$\text{Donc } \frac{1}{2} 2 m_{ii} = \frac{1}{2} 0 \quad \text{Donc } m_{ii} = 0$$

Rq : Cette prop est vraie si K est un corps
quq de caractéristique $\neq 2$

Ex :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -10 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix} \in A_3(\mathbb{R})$$

b) propriétés

Fort : $S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont stables par CL

ie 1) $\forall A, B \in S_n(K), \forall \lambda, \mu \in K$

$$\lambda A + \mu B \in S_n(K)$$

2) De $\hat{m}$ pour $A_n(K)$

$$\underline{D/} \text{ 1) } \oplus (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$$

$$2) \text{ ok } = \lambda A + \mu B$$

c) Une propriété fausse

$$\triangle A, B \in S_n(\mathbb{K}) \not\Rightarrow AB \in S_n(\mathbb{K})$$

Contre-ex: On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

• ou $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $A, B \in S_2(\mathbb{K})$
et $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

• On pose $A' := \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B' := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $A'B' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) Un cas important

Fait - R^x:

Soit M qq
Alors $M^T M$ et $M M^T$ sont symétriques

D/ Soit $M \in M_n(\mathbb{P})(\mathbb{K})$ On a $M^T \in M_{\mathbb{P}}^n(\mathbb{K})$

On a $MM^T \in M_n(\mathbb{K})$

On calcule $(MM^T)^T = (M^T)^T (M)^T = MM^T$

• Donc $M^T(M^T)^T$ est symétrique ie $M^T M$ est

VII Trace d'une matrice

1) Déf°

Déf°: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ La trace de A notée $\text{tr}(A)$ est

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ex: $\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$

2) Propriétés

Prop: $\text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B)$

D/ (AF) ■

3) trace du produit

Prop- $(R^X)!!$ $(\textcircled{F})$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Rq:

• $\Delta \text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ en g^{el}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 580 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\text{tr}(A) = 580$ $\text{tr}(B) = 1$

Mais $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{tr}(AB) = 0$

• $(\textcircled{F}) \text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(ACB)$

$$\begin{aligned} \text{On a } \text{tr}(ABC) &= \text{tr}((AB)\textcircled{C}) \\ &= \text{tr}(\textcircled{CA}B) \\ &= \text{tr}(BCA) \end{aligned}$$

CC: $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$

contrex: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\text{tr}(ABC) = 1$ mais $ACB = O_2$

D/ Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$

$$\text{On calcule } \text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p d_{ij} b_{ji}$$

$$= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n d_{ij} b_{ji} \\ = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} d_{ij} \right) = \text{tr}(BA)$$

(n)

C'est $(BA)_{jj}$

VIII Systèmes linéaires et matrices.

1) Algorithme du pivot de Gauss

ok

Ex: Résolvons

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - y + z + t = 2 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences suivantes

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ -y + 2z - 2t = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - y + z + t = 2 \\ \boxed{y} + z - t = -1 \\ 3\boxed{z} - \cancel{3t} = -3 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

inconnues principales
paramétrique

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = 0 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

cd:

Notons $\mathcal{P}_{(s)}$ l'ens des sol^o de (s)

$$(\text{ie posons } \mathcal{P}_{(s)} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R}) \mid (s) \right\}$$

$$\text{Alors on a } \mathcal{P}_{(s)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t+3 \\ 0 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ie } \mathcal{P}_{(s)} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Ex ①:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 6x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 6z = -1 \\ -6y - 12z = -6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y + 2z = \frac{1}{3} \\ y + 2z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-3} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-6} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y + 2z = \frac{1}{3} \\ 0 = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Ainsi ①: $\mathcal{S}(s) = \emptyset$ On dit que (s) est incompatible

2) interprétation matricielle des système linéaires

Plaçons-nous dans le cas général
Considérons le système de n équations à p inconnues suivant :

$$(s) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_p \end{cases}$$

On pose $A := (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

et $B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

Soient $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$

Posons $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

Fait fal : ①

$(x_1, \dots, x_p)$ solution de (S) $\Leftrightarrow AX = B$

D/ ②

b) Cas inversible.

Où $n=p$. Ainsi $A \in M_n(\mathbb{K})$

On note $\mathcal{S}_{A,B} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (S) \right\}$

Prop : 1) A inversible $\Rightarrow$ (S) possède une unique sol^o.

2) Cette unique sol^o est alors $A^{-1}B$

D/ Esq A inv. Soit $X \in \mathcal{L}_{A,B}$. On a

$$AX=B$$

Donc $A^{-1}AX = A^{-1}B$ i.e. $X = A^{-1}B$

3) Caractérisation des matrices inv.

a) Systèmes de Cramer

Prop ■ Soit $A \in M_n(K)$. Alors

A inv $\Leftrightarrow \dots$, $\forall B \in M_{n,1}(K)$, $AX=B$ possède au plus 1 sol^o.

$\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(K)$, $AX=B$ possède au moins 1 sol^o

$\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(K)$, $AX=B$ possède une unique sol^o.

D/ A inv $\Rightarrow$ Uniq sol^o $\Rightarrow$ ou $\oplus$ 1 sol^o.
 $\Rightarrow$ ou $\ominus$ 1 sol^o

$\Leftrightarrow^{\oplus}$ Esq $\forall B$, $AX=B$ possède ou $\oplus$ une sol^o

En particulier, $AX = 0_{n,1}$ possède ou $\oplus$ une sol^o. Or $\ominus$ $0_{n,1}$ est sol^o !

$$\underline{\text{CCL}} : \mathcal{L}_{A, 0_{n,1}} = \{0_{n,1}\}$$

$$\text{Or } \mathcal{L}_{A, 0_{n,1}} = \left\{ X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1} \right\} \\ = \ker(A)$$

D'après le CNI. : $A \text{ inv.} \Leftrightarrow$ ①

② Assez mignon

Où $\forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ possède au moins une sol^o. $\Leftrightarrow A \text{ inv.}$

💡 Astuce on fixe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on pose $B := E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

D'après (*), fixons $X_i \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tq $AX_i = E_i$

💡 Astuce Posons $M := (X_1 | X_2 | \dots | X_n)$

Calculons $A \cdot M$

$$\text{Soit } j \in \llbracket 1, n \rrbracket. \text{ On a } G_j(AM) \stackrel{\text{💡}}{=} A \cdot G_j(M) \\ = AX_j = E_j = G_j(I_n)$$

$$\text{ccl: } \forall j, C_j(AM) = G_j(I_n)$$

$$\text{ccl: } AM = I_n$$

Donc par inversibilité unilatérale; A_{inv} $\square$

b) application du calcul de A^{-1}

Posons $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ et soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

1) On va voir que $AX = B$ possède une unique sol^o

2) pour ce faire, on va calculer cette unique solution.

(en résolvant un système)

3) C'est l'unique sol^o est donc $A^{-1}B$, on en déduit A^{-1}

On a $AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = \alpha \\ x + y + 2z = \beta \\ x + y + z = \gamma \end{cases}$

AC IR^3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = M\alpha + N\beta + P\gamma \\ y = Q\alpha + R\beta + S\gamma \\ z = T\alpha + U\beta + W\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} M & N & P \\ Q & R & S \\ T & U & W \end{pmatrix} B$$

↖ c'est A^{-1}

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha - 2\beta + 5\gamma \\ y = \alpha + \beta - 3\gamma \\ z = \beta - \gamma \end{cases}$$

$$R^x \quad \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot B$$

On en déduit q :

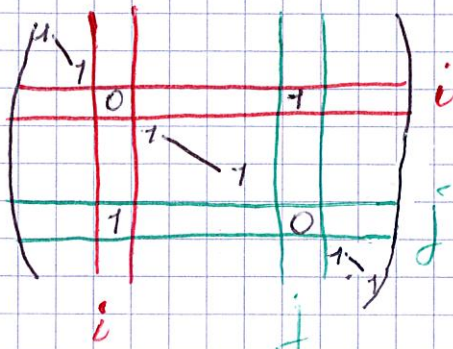
$$\begin{array}{l} 1) A \text{ inv} \\ 2) A^{-1} = \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(AF) Calculer les inverses de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

h) Matrices d'opérations élémentaires (opélem)

a) def°

Def $\textcircled{1}$: $X_{ij} =$  $\in M_n(K)$

appelée matrice d'échange.

$$T_{ij}(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{ligne } i \\ \text{colonne } j \end{matrix}$$

$$= I_n + \lambda E_{ij} \quad \text{si } i \neq j$$

appelée matrice de transvection

$$D_i(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{ligne } i \\ \text{colonne } i \end{matrix}$$

appelée matrice de dilatation

Prop $\textcircled{1}$: Elles sont inversibles

$$1) X_{ij}^{-1} = X_{ij}$$

$$2) T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$$

$$3) D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

D/ 1) Mg $X_{ij}^2 = I_n$

On a $C_k(X_{ij}^2) = X_{ij} C_k(X_{ij})$

$k \neq i, j : C_k(X_{ij}^2) = \varepsilon_k (\dots) \text{ ok}$

* $k=i$ $X_{ij} \underbrace{C_i(X_{ij})}_{\varepsilon_j} = X_{ij} \neq \varepsilon_j$
 $= C_j(X_{ij}) = \varepsilon_i$

donc $C_i(X_{ij}^2) = \varepsilon_i$

* $k=j$ De $\vec{m}$

cal : $X_{ij}^2 = I_n$ (AC)

3) $D_i(\alpha) \cdot D_j(\frac{1}{\alpha}) = I_n$ (ok)

2) $(I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{ij})$
 $= I_n - \lambda E_{ij} + \lambda E_{ij} - \lambda^2 \overbrace{E_{ij} \times E_{ij}}^{\sum_{ji} E_{ij}}$
 $= I_n$ (ok) $\quad \quad \quad = 0_n \text{ or } i \neq j$

c) action à gauche et à droite

Prop fondamentale :

1) Action de X_{ij}

a) $A X_{ij}$ échange les colonnes $C_i(A)$ et $C_j(A)$

b) $X_{ij} A$ ————— lignes $L_i(A)$ et $L_j(A)$

2) Action de $D_i(\alpha)$

a) $A D_i(\alpha)$ remplace $C_i(A)$ par $\alpha C_i(A)$

b) $D_i(\alpha) A$ ————— $L_i(A)$ ————— $\alpha L_i(A)$

" $C_i \leftarrow \alpha C_i$ "
 $L_i \leftarrow \alpha L_i$

3) Action de $T_{ij}(\lambda)$

a) $A T_{ij}(\lambda)$ effective $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

b) $T_{ij}(\lambda) A$ effective $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

ie : On ajoute à la i -ème ligne λ fois la j -ième ligne.

D/ok (AC) grâce aux techniques colonnes/lignes

Ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc $M(\text{op} \bar{e}_2) M(\text{op} e_1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Je $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Puis je fais $L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-2}$ et $L_2 \leftarrow -L_2$

D'où

$D_3 \left(-\frac{1}{2}\right) \times D_2(-1) \times T_{3,1}(-1) \times T_{2,1}(-2) \times A$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B$

Puis $D_3 \left(-\frac{1}{1}\right) T_{3,2}(-1) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C$
 $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

Sur C: (But: arriver à I_3)

on fait $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$ ie en d
 $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$

$T_{1,3}(-3) \times T_{2,3}(-5) \times C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on fait $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

CU: $T_{1,2}(-2) T_{1,3}(-3) \times T_{2,3}(-5) \cdot C = I_3$

$$T_{1,2}(-2) \cdot T_{1,3}(-3) \cdot T_{2,3}(-5) \cdot D_3(-\frac{7}{4}) \cdot T_{3,1}(-7) \cdot$$

$$D_3(-\frac{1}{2}) \cdot D_2(-7) \cdot T_{3,1}(-1) \cdot T_{2,1}(-2) \cdot A \\ = I_3$$

cc1: $\bar{A}^{-1} = T_{1,2}(-2) \dots T_{2,1}(-2)$

Comment calculer ce produit ?  Astuce

$$T_{1,2}(-2) \times \dots \times T_{2,1}(-2) = T_{1,2}(-2) \times \dots \times T_{2,1}(-2) \times I_3$$

D'où $A \xrightarrow{op_1} \dots \xrightarrow{op_q} I_3$

et $I_3 \xrightarrow{op_1} \dots \xrightarrow{op_q} A^{-1}$

5) Invariance de l'inversibilité par opélem.

a) les opélem

C'est: les échanges de ligne / colonne ou les dilatactions de ligne / colonne

et les opélem du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

avec $i \neq j$ et $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

b) le principe

Principe

On ne change pas le caractère inversible d'une matrice en effectuant des opérations dessus

D/ [⊕]

• Orq A inv. : alors $A T_{ij}(\lambda)$ est aussi inv.

Rappel :

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ inv.} \\ B \text{ inv.} \end{array} \right\} \Rightarrow AB \text{ inv.}$$

• Orq $A T_{ij}(\lambda)$ inv. Alors $A T_{ij}(\lambda) T_{ij}(\lambda)^{-1}$ inv.

i.e. A inv.

(...)

c) application au calcul de l'inverse d'une matrice

Faisons-le sur un exemple.

Calculons

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$\begin{aligned} \longleftrightarrow L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 3L_1 \end{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \longleftrightarrow L_2 &\leftarrow -L_2 \\ L_3 &\leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \longleftrightarrow L_3 &\leftarrow L_3 - L_2 \end{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow L_3 \leftarrow -L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

CC: A est inv et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

où " $\longleftrightarrow$ " signifie "équivalence par ligne"

d) retour sur les matrices triang sup.

Soit $M \in T_n^+(\mathbb{K})$

Alors $M \text{ inv} \Leftrightarrow \forall i, m_{ii} \neq 0$

($\Rightarrow$) Par contraposition, si $\exists i : m_{ii} = 0 \Rightarrow M \text{ pas inv.}$

Fixons i_0 minimal tq $m_{i_0 i_0} = 0$

(En effet : $\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid m_{ii} = 0\} \neq \emptyset$
 $\subset \mathbb{N}$)

Donc cet ensemble admet un $\oplus$ petit él^{mt} i_0

On écrit

$$\begin{pmatrix} m_{11} & & & \\ & m_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{i_0-1, i_0-1} & \\ & & & & \begin{matrix} \circ & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Astuce : faire des op^{er}at^{ions}

$$\text{On a } M \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \begin{matrix} \circ & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{matrix} \end{pmatrix}$$

" $\sim_c$ " : équivalent par colonnes

(on a fait $C_i \leftarrow \frac{1}{m_{ii}} C_i$ pour $i \in \llbracket 1, i_0-1 \rrbracket$) " $\sim_L$ " — ligne

$$\sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

(On a fait $C_j \leftarrow C_j - m_{1j} C_1$ pour $j \geq 2$)

$$\sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

C_{10} est nulle donc M pos inv

$\Leftrightarrow$ OSq $\forall i, m_{ii} \neq 0$. Je fais pareil et j'obtiens:

$$M \sim_c I_n \quad \text{Donc } M \text{ inv}$$

Rq: Les opélem utilisées sont:

$$* D_i(\alpha)$$

$$* T_{ij}(\lambda) : \begin{cases} \cdot T_{1j}(\lambda) \text{ avec } j \geq 2 \text{ (pour gérer } L_1) \\ \cdot T_{2j}(\lambda) \text{ avec } j \geq 3 \text{ (pour gérer } L_2) \end{cases}$$

De façon globale, on utilise des

$$T_{i,j}(\lambda) \text{ avec } j > i$$

or, si $j > i$, on a $T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$
 $\in T_n^+(\mathbb{K})$

Donc M^{-1} est le produit de matrices de telles
opérations

$$\text{Donc } M^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K}) \quad \square$$

