Chapitre 18

Espaces vectoriels

Hermann GRASSMANN
(1809–1877)

Richard DEDEKIND
(1831–1916)

Giuseppe PEANO
(1858–1932)

Hermann WEYL
(1885–1955)

Le long travail d'abstraction et de formalisation qui aboutit à la théorie des espaces vectoriels commença par les travaux révolutionnaires de Hermann Grassmann. Ses recherches ne furent pas remarquées à leur juste valeur en son temps, et Grassmann fut plus célèbre à son époque en tant que linguiste qu'en tant que mathématicien.

Ils furent repris et peaufinés par de nombreux mathématiciens ensuite, parmi lesquels Richard Dedekind (grand représentant de l'école algébriste allemande), Giuseppe Peano (grand mathématicien italien) et Hermann Weyl (mathématicien et physicien théoricien allemand, émigré aux USA).

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

18
Espaces vectoriels

plan de cours et principaux résultats

I. Définition et exemples

24.14

1) Définition

a) définition
b) vocabulaire
c) conventions

2) Combinaisons linéaires

3) Premières propriétés

Proposition-Réflexe 18.1 Ⓣ **(simili-intégrité des espaces vectoriels)**

$$\lambda \cdot x = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \big(\lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad ou \quad x = 0_E\big)$$

4) Exemples

5) Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel

6) Espace vectoriel produit

7) Algèbres

a) définition
b) exemples
c) algèbres et polynômes

II. Familles finies de vecteurs

24.11
24.2
24.10

1) Familles liées

a) définition
b) réflexes

Fait-Réflexe 18.2
Si l'un des vecteurs de la famille est nul, alors elle est liée.

Fait-Réflexe 18.3
Si la famille contient deux fois le même vecteur, alors elle est liée.

Fait-Réflexe 18.4 Ⓣ
Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée alors l'un des x_i est combinaison linéaire des autres.

c) exemples

2) Familles libres

a) définition

b) en pratique

Fait-Réflexe 18.5 Ⓣ
La famille $(x_1, \dots, x_p)$ *est libre si, et seulement si,*

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0.$$

c) exemples

3) Familles génératrices

a) définition

Définition 18.6 Ⓣ
La famille $(x_1, \dots, x_p)$ *est génératrice* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x \in E,\ \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i.$$

b) exemple

4) Bases

a) définition

b) caractérisation

Proposition-Définition 18.7
Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ *une famille de vecteurs de* E *à* p *éléments.*

1) *On a*

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ base de } E \iff \forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i.$$

2) *On dit alors que* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les coordonnées de x dans la base $(x_1, \dots, x_p)$.

c) exemples

III. Familles dans $\mathbb{K}^n$

24.8 ⁂

1) Une notation

Notation 18.8 Ⓣ
On note

$$\boxed{\underline{\mathbb{K}^n} := \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ ;\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\}}.$$

*On dit qu'*on a identifié $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2) Cas des familles de $\underline{\mathbb{K}}^n$ « de bonne taille »

Théorème 18.9
Soient $X_1, \dots, X_n \in \underline{\mathbb{K}}^n$. On pose

$$A := \big(X_1 \,\big|\, X_2 \,\big|\, \cdots \,\big|\, X_n\big) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(X_1, \dots, X_n)$ *libre*
(ii) $(X_1, \dots, X_n)$ *génératrice dans* $\underline{\mathbb{K}}^n$
(iii) $(X_1, \dots, X_n)$ *base de* $\underline{\mathbb{K}}^n$
(iv) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

3) Une petite famille ne peut pas être génératrice

Théorème 18.10
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \dots, X_p \in \underline{\mathbb{K}}^n$. Alors,

$$(X_1, \dots, X_p) \text{ génératrice dans } \underline{\mathbb{K}}^n \implies p \geqslant n.$$

4) Une grande famille ne peut pas être libre

Théorème 18.11
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \dots, X_p \in \underline{\mathbb{K}}^n$. Alors,

$$(X_1, \dots, X_p) \text{ libre} \implies p \leqslant n.$$

5) Bases de $\underline{\mathbb{K}}^n$

Proposition 18.12 Ⓣ

$$(X_1, \dots, X_p) \text{ base de } \underline{\mathbb{K}}^n \implies p = n.$$

IV. Familles quelconques

24.12
24.13

1) Familles presque nulles
2) Combinaisons linéaires presque nulles
3) Familles libres
4) Familles génératrices
5) Bases

a) définition
b) exemples

V. Sous-espaces vectoriels

24.17
24.25
24.24

1) Définition
2) Caractérisation

Proposition 18.13 Ⓣ

$$F \text{ sev } E \iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ x + \lambda y \in F. \end{cases}$$

3) Exemples

4) Premières propriétés

Fait 18.14 Ⓣ **(Statibilité des sev par CL)**
Soit F sev E. *Alors,*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in F^p,\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in F.$$

5) Somme de sous-espaces vectoriels

a) définition

Définition 18.15 Ⓣ
Soient F, G sev E. *On pose*

$$F + G := \Big\{ x + y \ ;\ x \in F \text{ et } y \in G \Big\}.$$

b) généralisation
c) quelques faits
d) exemples

6) Sous-espaces vectoriels de $\underline{\mathbb{R}}^2$ et $\underline{\mathbb{R}}^3$

7) Sous-espace vectoriel engendré par une partie

a) définition
b) exemples
c) caractérisation de Vect(A)

Proposition 18.16 Ⓣ
Vect(A) *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *qui contient* A.

d) propriétés
e) lien avec les familles génératrices

VI. Sommes directes

24.20

1) Cas de deux espaces vectoriels

a) définition

Définition 18.17 Ⓣ
Soient F, G sev E.
On dit que F et G sont en somme directe $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall (x_F, y_F) \in F^2, \forall (x_G, y_G) \in G^2, \quad x_F + x_G = y_F + y_G \implies \begin{cases} x_F = y_F \\ x_G = y_G. \end{cases}$$

b) caractérisation

Proposition-Réflexe 18.18 Ⓣ

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \iff F \cap G = \{0_E\}.$$

c) dessin
d) exemples

2) Cas général

a) définition

b) caractérisation

Proposition-Réflexe 18.19 Ⓣ

$$F_1, \dots, F_p \text{ sont en somme directe}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \qquad x_1 + \dots + x_p = 0_E \implies \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i = 0_E.$$

3) Supplémentaire

a) définition

Définition 18.20 Ⓣ

Soit F sev E. *Soit* G sev E. *On dit que* G est un supplémentaire de F dans E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$E = F \oplus G.$$

b) exemples

4) Bases et sommes directes

Ch 18 : Espaces Vectoriels

$\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

((X-ENS) tout fonctionne pour K corps)
(ex : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, ..., $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

I Déf^o et exemples

1) Déf^o

a) déf^o

Déf^o : Soit $(E, +, 0_E, \cdot)$ un quadruplet tel que

1) E ens
2) $+$ lci sur E
3) $0_E \in E$
4) $\cdot \in \mathcal{F}(\mathbb{K} \times E, E)$

ie $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$

(Ainsi, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si $x \in E$ on dispose de $\lambda \cdot x$
On dit que $\cdot$ est une loi externe)

1

On dit que $(E, +, 0_E, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

et on note# E $\mathbb{K}$ev ou E ev $\underset{ssi}{\Delta}$

(ev_1) $(E, +, 0_E)$ est un groupe abélien (commutatif)

(ev_2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

(ev_3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu \cdot x$

(ev_4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$

(ev_5) $\forall x \in E, \ 1 \cdot x = x$

b) Vocabulaire et notations

Les éléments $x \in E$ sont appelés vecteurs
$\lambda \in \mathbb{K}$ scalaires

L'expression " $\lambda \cdot x$ " est aussi notée " λx " et est lue " λ scalaire x "

c) Conventions

- 0_E est aussi 0 ; c'est le vecteur nul.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on note " $\frac{x}{\lambda}$ " le vecteur " $\frac{1}{\lambda} \cdot x$ "

⚠ On peut "diviser" par un scalaire $\neq 0$

JAMAIS par un vecteur

2) Combinaisons linéaires

Déf : Soit E ev
Soient $x_1, \dots, x_p \in E$

Une CL des x_i est un vecteur s'écrivant

$$\boxed{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$

Rq : L'idée c'est qu'un ev est un lieu où l'on peut faire des CL

3) Premières propriétés

Soit E ev, soient $x, y, z \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$

Lemme : $x + y = x + z \Rightarrow y = z$

D/ c'est vrai pour tout groupe $(G, \cdot, e)$

Osq $xy = xz$; donc $x^{-1}xy = x^{-1}xz$

donc $ey = ez$ donc $y = z$

On l'applique dans $(E, +, 0_E)$

$$\boxed{\text{Fait - R}^{\times} : \quad \lambda 0_E = 0_E}$$

*/2

D/ (T) On a $0_E = 0_E + 0_E$

Donc $\lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot 0_E + 0_E$
(ev$_3$)

D'après le lemme $\lambda 0_E = 0_E$ ∎

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Fait-R}^x \text{ (T)} \\ 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E\end{array}}$$

D/ (...)

On a $0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}$ anneau)

Donc $(0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$ (ax$_3$)

et $0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_E$ (ax$_1$)

D'après le lemme : $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ ∎

Fait-R^x (T)

$(-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = -x$

D/ On a $1 + (-1) = 0_{\mathbb{K}}$ par déf° de (-1)

Donc $(1 + (-1)) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} x$

ie $1 \cdot x + (-1) \cdot x = 0_E$

Or $0_E = x + (-x)$ (ax 1)

Donc $x + (-1)\cdot x = x + (-x)$

D'après le lemme, $(-1)\cdot x = -x$ ■

Prop - R^x (Simili-intégrité des ev) (T)

$$\lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$$

D/ Osq $\lambda \cdot x = 0_E$ et osq $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$

Mq $x = 0_E$

Ĉ $\mathbb{K}$ corps : λ inversible. ie on dispose de $\frac{1}{\lambda}$

Ĉ $\lambda \cdot x = 0_E$, on a $\frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} 0_E = 0_E$

donc (ax 4) $\left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right)\cdot x = \frac{1}{\lambda}(\lambda \cdot x) = 1 \cdot x = x$

Donc $x = 0_E$ ■

4) Exemples

- L'ensemble des vecteurs du plan est un $\mathbb{R}$-ev

  ("D/ $\cdot\ \vec{v}+\vec{w}$: ok
  $\cdot\ \lambda\cdot\vec{v}$: ok)

- De même : l'ens des vecteurs de l'espace
- $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-ev

  (D/ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

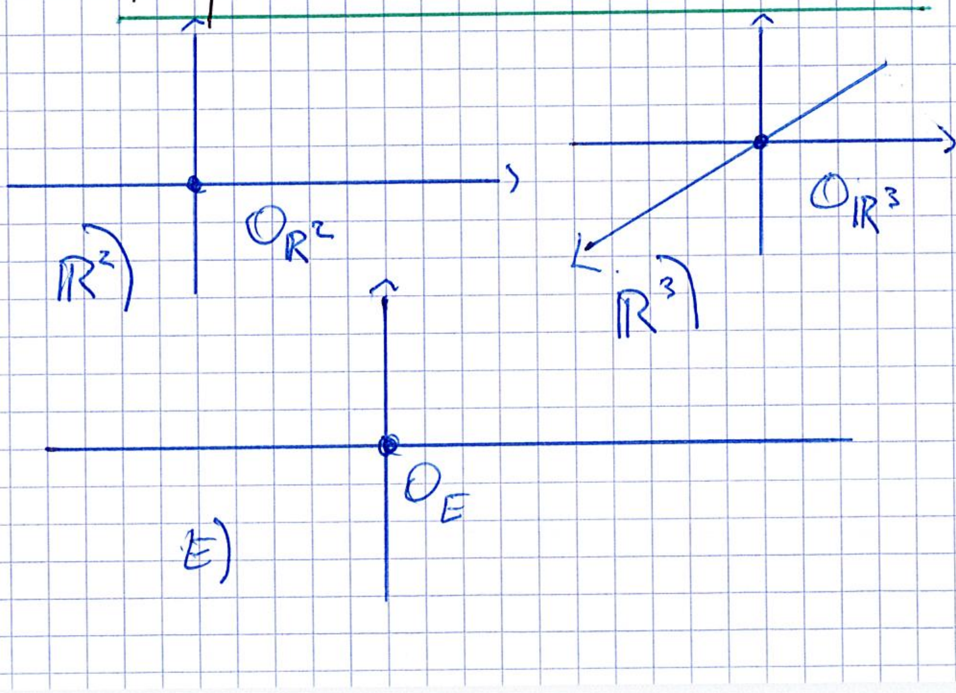
  $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

  Puis, il faudrait vérifier que $(ev_1), \dots, (ev_5)$ sont ok)

- $\mathbb{R}^3$, de même, est un $\mathbb{R}$-ev
- Si $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev. Dans ce chapitre, on écrira plutôt : $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

  C'est l'espace réel de dimension n

Dn



• $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, 0_{n,p}, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev

Dans ce cadre, je peux voir une matrice comme un vecteur !!

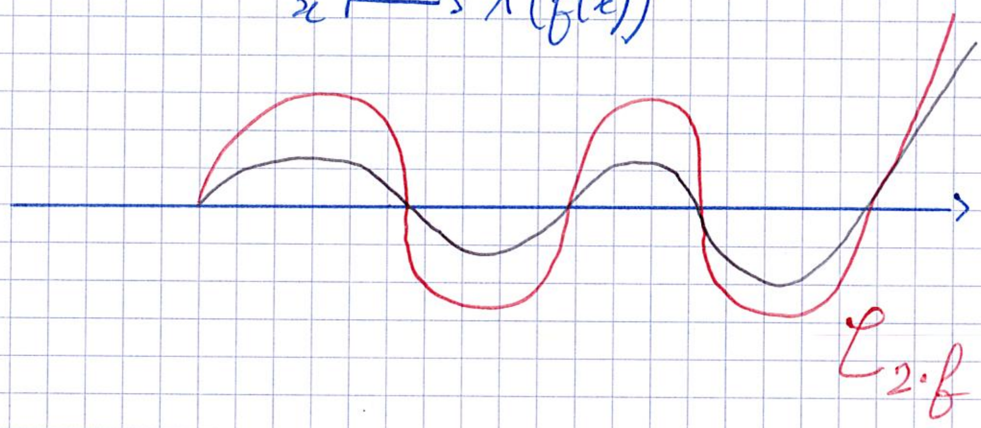
• $(\mathbb{R}[X], +, 0_{\mathbb{R}[X]}, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev

• $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \tilde{0}, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev

Rq : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\lambda \cdot f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda(f(x)) \end{array}$$

d^n



Ainsi : $\lambda \cdot f = \tilde{0} \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } f = \tilde{0})$

• $\mathbb{Q}[X]$ n'est pas un $\mathbb{R}$-ev

(D/ $P := X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

Mais $\sqrt{2} \cdot P = \sqrt{2} \cdot X^2 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[X]$)

• Mais $\boxed{\mathbb{Q}[X] \text{ est un } \mathbb{Q}\text{-ev}}$

- $(T_n^+(\mathbb{R}), +, O_n, \cdot)$
- $(D_n(\mathbb{R}))$ est un $\mathbb{R}$-ev
- L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-ev

Bilan : exemples typiques

$\mathbb{R}^n$

espaces de matrices $M_{n,p}(\mathbb{R})$

espaces polynomiaux $\mathbb{R}[X]$

$\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

espaces des suites

De m̄ pour $\mathbb{C}$:

1) $\mathbb{C}^n$: c'est l'analogue complexe de $\mathbb{R}^n$

2) $M_{n,p}(\mathbb{C})$

etc

- $\{0_{\mathbb{R}}\}$ est un $\mathbb{R}$-ev

.* $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev $\quad$ $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev

.** $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev ! D/ $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

$\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda z \in \mathbb{C}$

.*** E $\mathbb{C}$-ev $\Rightarrow$ E $\mathbb{R}$-ev

Ie $(E, +, 0_E, \cdot)$ $\mathbb{C}$-ev

$\Rightarrow (E, +, 0_E, \cdot|_{\mathbb{R}\times E})$

****

Soient K un corps et soit K' un sous-corps de K

Alors E K-ev $\Rightarrow$ E K'-ev

Ex : E $\mathbb{C}$-ev $\Rightarrow$ E $\mathbb{R}$-ev $\Rightarrow$ E $\mathbb{Q}$-ev

5) Fonctions à valeurs dans un ev

Soit X un ens $\neq \emptyset$

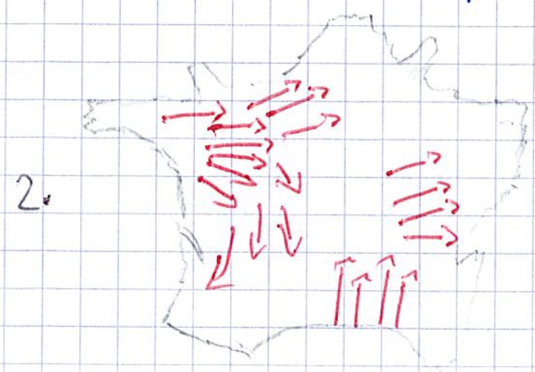
Soit E un $\mathbb{K}$-ev

$$\boxed{\text{Fait : } \left(\mathcal{F}(X,E), +, \tilde{0}_E, \cdot\right) \ \mathbb{K}\text{-ev}}$$

Rq : Si $f : X \longrightarrow E$ on dit que f est une fonction vectorielle.

Ex : X = France (continentale) $E = \mathbb{R}^2$

Ex : le vent



5

Rq ⓘ : si $f, g : X \longrightarrow E$, on pose

$$f+g := \begin{array}{l} X \longrightarrow E \\ x \longmapsto \underbrace{f(x)}_{\in E} +_E \underbrace{g(x)}_{\in E} \end{array}$$

$$\lambda \cdot f := \begin{array}{l} X \longrightarrow E \\ x \longmapsto \lambda \cdot_E f(x) \end{array}$$

Ex : 1) $\mathcal{F}([0,1], M_n(\mathbb{R}))$ $\mathbb{R}$-ev

(Ex : $\begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 & e^t \\ \sin(t) & \arctan(t) \end{pmatrix} \end{array}$

$\in \mathcal{F}([0,1], M_2(\mathbb{R}))$)

2) AF

b) ev produit

Soient E, F des $\mathbb{K}$ ev

Alors $E \times F$ (rappel : $\{(x,y) \ ; \ x \in E$ et $y \in F\}$)

peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-ev

a) $(x, y) + (x', y') := (x +_E x', y +_F y')$
$\quad E \qquad\qquad F$

b) De neutre $(0_E, 0_F)$

c) $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda \cdot_E x, \lambda \cdot_F y)$

<u>Def°</u> : C'est le $\mathbb{K}$-ev produit de E par F

<u>Rq :</u> Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $E_1, E_2, \dots, E_p$ ev,

alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ ev

Si E ev, alors E^p est un ev

7) $\mathbb{K}$- algèbres (!!)

a) Déf°

Les structures math étudiées jusqu'ici sont :

ensembles $\longrightarrow$ ens ordonnés

ensembles $\longrightarrow$ magma $\longrightarrow$ semi groupes $\longrightarrow$ monoïdes $\longrightarrow$ GROUPES

groupes $\longrightarrow$ groupes abéliens

grapes $\longrightarrow$ anneaux $\longrightarrow$ anneaux commutatifs $\longrightarrow$ corps $\downarrow$

groupes abéliens $\nearrow$ anneaux

ens. ordonnés $\longrightarrow$ corps ordonnés

groupes abéliens $\searrow$ $\mathbb{K}$-ev

"loi externe" avec $\mathbb{K}$ $\nearrow$ $\mathbb{K}$-ev

idée : Une $\mathbb{K}$-algèbre, c'est un anneau muni d'une structure de $\mathbb{K}$-ev

Déf° : Soit $(\mathcal{A}, +, \times, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}}, \cdot)$ un 6-uplet tel que :

1) $(\mathcal{A}, +, \times, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ est un anneau

2) $(\mathcal{A}, +, 0_{\mathcal{A}}, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev

3) $\forall x, y \in \mathcal{A}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x \times y)$$

On dit alors que $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre

Idée : C'est un endroit où on dispose
- de $+$, donc de Σ
- de $\times$ donc $(\cdot)^k$
- de $\lambda \cdot x$

Rq : Si $(\mathcal{A}, +, \times, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ est un anneau commutatif, on dit que l'algèbre $\mathcal{A}$ est commutative.

b) Exemples

- $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (Commutative)
- $M_n(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre
- $\mathbb{R}[X]$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative
- * $\mathbb{C}$, est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative
- $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algebre commutative (X-ENS qcq)

$$\left(f \times g := \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \times g(x) \end{array} \right)$$

avec $1_{\mathcal{F}(X,\mathbb{R})} = \tilde{1}$)

c) algèbres et polynôme

(!) idée : une algèbre est un lieu où on peut évaluer les polynômes

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre et soit $\alpha \in \mathcal{A}$

On définit alors :

$$\begin{array}{rcl} \overline{ev}_\alpha \quad \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ P & \longmapsto & P(\alpha) \end{array}$$

On a (T) $\overline{ev}_\alpha(P+Q) = \overline{ev}_\alpha(P) + \overline{ev}_\alpha(Q)$

$\left(\text{ie} \quad \underset{\mathbb{K}[X]}{(P+Q)}(\alpha) = P(\alpha) +_{\mathcal{A}} Q(\alpha)\right)$

$\overline{ev}_\alpha(\underbrace{PQ}_{\text{produit de 2 polynômes}}) = \overline{ev}_\alpha(P) \times_{\mathcal{A}} \overline{ev}_\alpha(Q)$

la multiplication (d'algèbre) de $\mathcal{A}$

$\left(\text{ie} \quad (PQ)(\alpha) = P(\alpha) \times_{\mathcal{A}} Q(\alpha)\right)$

$\overline{ev}_\alpha(1_{\mathbb{K}[X]}) = 1_{\mathcal{A}}$

$\overline{ev}_\alpha(\lambda P) = \lambda \cdot \overline{ev}_\alpha(P)$ ie $\left((\lambda P)(\alpha) = \lambda P(\alpha)\right)$

On dit que $\overline{ev}_\alpha : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{A}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres (AF : écrire la déf°)

On note $\overline{ev}_\alpha \in \mathrm{Hom}_{(\mathbb{K}\text{-alg})}(\mathbb{K}[X], \mathcal{A})$

II Familles finies de vecteurs

Cadre : E $\mathbb{K}$-ev

$p \in \mathbb{N}^*$

$(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs.

Rq : Pour $p = 0$, il existe une unique famille d'éléments de E à 0 vecteurs : c'est la famille vide notée $()$

1) Familles liées

a) Def°

Def° : • On dit que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\exists\, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$:

non tous nuls

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$$

• On dit aussi qu'on a une relation de liaison (une RL) non nulle entre les x_i

<u>Déf°</u> : Soient $x, y \in E$

On dit que x et y sont colinéaires $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ (x,y) liée

<u>Rq</u> : Soit (x,y) liée

Fixons donc $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tq $\lambda x + \mu y = 0_E$

<u>1er cas</u> : Osq $\lambda \neq 0$. On a alors $\boxed{x = -\frac{\mu}{\lambda} y}$

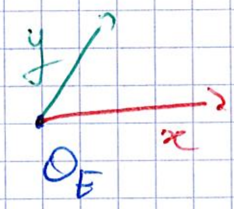
<u>2e cas</u> : Osq $\mu \neq 0$. Alors $\boxed{y = -\frac{\lambda}{\mu} x}$

d^n

- E)

x, y colinéaires

- E)



(x,y) non liée

b) réflexes

<u>Fait-R^x</u>

Si l'un des vecteurs de la famille est nul, elle est liée

<u>D/ ①</u> Fixons i_0 tq $x_{i_0} = 0_E$, on a alors

$$0_{\mathbb{K}} x_1 + 0_{\mathbb{K}} x_2 + \dots + 0_{\mathbb{K}} x_{i_0-1} + 1 x_{i_0}$$

$$+ 0_{\mathbb{K}} x_{i_0+1} + \dots + 0_{\mathbb{K}} x_p = 0_E$$

Donc, il existe une $RL_{\neq 0}$ entre les x_i.

Donc $(x_1, \dots, x_p)$ liée ■

Fait - R*

Si la famille contient deux fois le m̄ vecteur, alors elle est liée

D/ (T) Fixons $i_0 \neq i_1$ tq $x_{i_0} = x_{i_1}$

Alors on a $1 \cdot x_{i_0} + (-1) x_{i_1} = 0_E$

On a une $RL_{\neq 0}$ entre les x_i ■

Fait - R*

Si une famile contient une "sous-famille" liée alors elle-m̄ est liée

D/ À l'oral (AC) ■

Fait-R*

Si elle est liée : un des vecteurs est CL des autres

D/ Osq $(x_1, \dots, x_p)$ liée

R* On effectivise cette liaison

Fixons donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{0, 0, \dots, 0\}$

tq $\boxed{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \qquad RL \neq 0}$

Ĉ $(\lambda_i)_i \neq (0, \dots, 0)$: fixons $i_0 \in [\![1, p]\!]$

tq $\boxed{\lambda_{i_0} \neq 0}$

On a $\lambda_{i_0} x_{i_0} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} \lambda_i x_i$

Donc $\boxed{x_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i}$

CR

c) Exemples

- $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)$ famille à 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

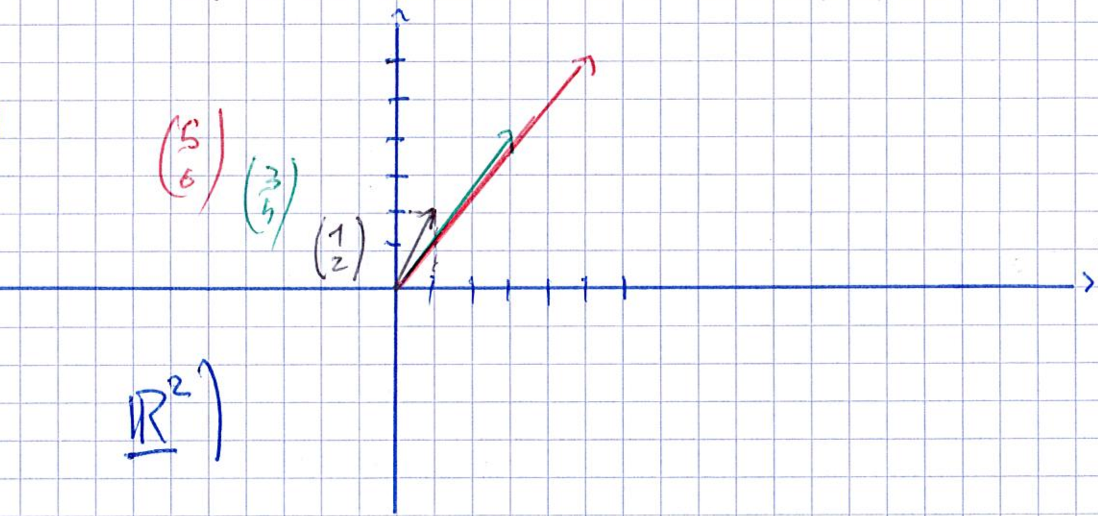
(Rq : ① rigoureusement : dans $M_{2,1}(\mathbb{R})$)

Elle est liée, En effet

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Donc $1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

d^n



- $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right)$

Est-elle liée

$$\exists\ (\lambda, \mu, \theta) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} : \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

HR

Soient $\lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R}$. OALES

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + 2\mu + 4\theta = 0 \\ 2\lambda + 3\mu + 3\theta = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + 2\mu + 4\theta = 0 \\ -\mu - 3\theta = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 2\theta \\ \mu = -3\theta \\ \theta = \theta \end{cases} \iff \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \theta\end{pmatrix} \in \left\{ t \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\theta = 1$

Ainsi, on a $\quad 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Donc elle est liée

- Dans $E := \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

La famille $(\exp, \cosh, \sinh)$ liée

(D/ $\quad 2\cosh + 2\sinh = 2\exp$)

2) Familles libres

a) déf°

Déf : La famille (à p vecteur dans E) $(x_1, \dots, x_p)$ est libre $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ elle n'est pas liée

b) En pratique

Fait-R*

$(x_1, \dots, x_p)$ libre ssi

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!] \; \lambda_i = 0 \right)$$

ie la seule RL entre les x_i est la relation de liaison nulle

D/ On a

$$\text{non}(*) \equiv \exists (\lambda_1, \dots \lambda_p) \in \mathbb{K}^p :$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \quad \text{et} \quad \exists i_0 \in [\![1,p]\!] : \lambda_{i_0} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\} :$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_p) \text{ liée } \blacksquare$$

b) exemples !! (à connaître)

Modèle de R° pour mq $(x_1, \dots, x_p)$ libre !!

- Mq $(x_1, \dots, x_p)$ libre

ie mq $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$,

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E\right) \Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0$$

- Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$$

- Mq $\forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0$

facile
réc
absurde
bidouille

- Dans $E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $(\cos, \sin)$ libre

D/ soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\lambda \cos + \mu \sin = \tilde{0}$

Mq $\lambda = \mu = 0$

D'/ idée : R* on évalue (*)

En 0 : $\lambda = 0$; en $\frac{\pi}{2}$: $\mu = 0$

D^2 ORPA et osq $\lambda \neq 0$

idée : on dérive

On a $\begin{cases} (-\lambda \sin + \mu \cos = \tilde{0}) \times \mu \\ (\mu \sin + \lambda \cos = \tilde{0}) \times \lambda \end{cases}$

En sommant : $(\mu^2 + \lambda^2) \cos = \tilde{0}$

En 0 : $\mu^2 + \lambda^2 = 0$

T

- $P_i : x \longmapsto x^i \in E$

Mod R^0 Mq $(P_0, P_1, \dots P_N)$ libre

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=0}^{N} \lambda_i p^i = \tilde{0}$

ie $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x^i = 0$

CRN

Posons $P := \sum_{i=0}^{N} \lambda_i X^i \in \mathbb{R}[X]$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$ Donc P a une infinité de racines.

Donc $P = 0$ AC Donc $\forall i, \lambda_i = 0$ ■

ccl : $(P_0, \dots P_N)$ libre

- On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$

Soit $(P_1, \dots, P_N) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$

12

On dit que $(P_1, \dots, P_N)$ est échelonnée (en degré)

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $0 \leq \deg P_1 < \deg P_2 < \dots < \deg P_N$

Ex : $\left(8, 2X-5, X^3 + \frac{2}{3}, 5X^5 - X^2 + 8, X^6 - X^5, 50X^{18} - 13X^{13} - 51 \right)$

est échelonnée

Prop : $(P_1, \dots, P_N)$ échelonnée $\Rightarrow$ $(P_1, \dots, P_N)$ libre

D/ Osq $(P_1, \dots, P_n)$ échelonnée

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i = 0_{\mathbb{R}[X]}$

ORPA, osq $\exists i_0 : \lambda_{i_0} \neq 0$ RL

On fait un absurde optimal

Fixons $i_0 \in [\![1, N]\!]$ le + grand k tq $\lambda_k \neq 0$

AC !! On a donc $\forall k \geq i_0 + 1$, $\lambda_i = 0$

Donc (RL) se réécrit $\sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i P_i = 0_{\mathbb{R}[X]}$

ie $P_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0 - 1} - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} P_i$

Astuce : On utilise le $\mathbb{R}_n[X]$

Si $i_0 > i$, on a $\deg P_i < \deg P_{i_0}$

Notons $d := \deg P_{i_0}$ On a

$\forall i < i_0 \ , \ P_i \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$

Or $\mathbb{R}^x$ $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ est stable par CL

Donc $\sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} P_i \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ ie $P_{i_0} \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$

absurde

3) Familles génératrices

a) def°

Def° : $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice dans E ssi

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

b) Exemple

Mq $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$

(ie dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$)

Soit $X \in \mathbb{R}^3$ Mq $\exists (\lambda, \mu, \theta) \in \mathbb{R}^3$:

$$X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Soient $\lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R}$.

OALES

$$X = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ système d'inconnues λ, μ, θ $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \theta = x \\ \lambda + 2\mu = y \\ \lambda + 3\mu + \theta = z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \theta = x \\ \mu - \theta = y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2\mu = z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \theta = x \\ 2\mu = z - x \\ -\theta = (y-x) - \frac{1}{2}(z-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - \frac{z-x}{2} - \frac{1}{2}z + y - \frac{1}{2}z \\ \mu = \frac{z-x}{2} \\ \theta = -x - y + 2z \end{cases}$$

On pose $\lambda_0 := \frac{x}{2} + y - z$
$\mu_0 := \frac{z}{2} - \frac{x}{2}$
$\theta_0 := \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2}$

On a alors $\lambda_0 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu_0 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = X$

<u>ccl</u> : $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right)$ est génératrice dans $\underline{\mathbb{R}^3}$

4) Bases

a) déf°

Déf° : On dit que $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de E $\underset{ssi}{\Delta}$

$(x_1, \dots, x_p)$ et $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice dans E

b) Caractérisation

Prop - déf°

On a $(x_1, \dots, x_p)$ base $E \iff$

$\forall x \in E, \ \exists! \, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \, ; \ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

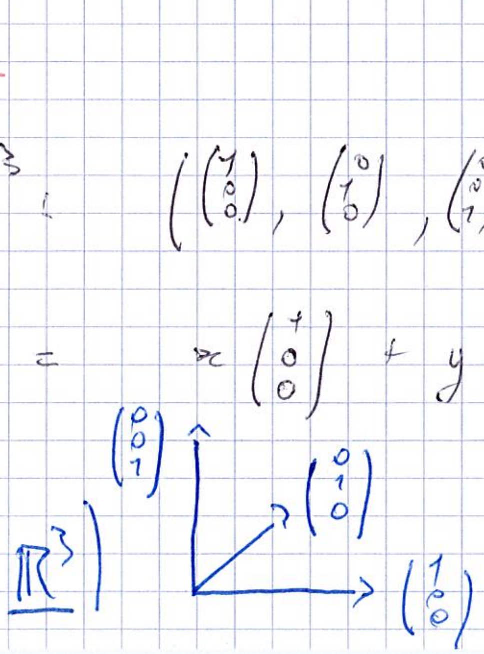
• Les λ_i sont appelés les coordonnées de x dans la base $(x_1, \dots, x_p)$

c) Exemples

• Dans $\mathbb{R}^3$: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base

D/ ⓣ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✱

ⓓⁿ



• La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

D/ On a ~~une~~ montré que

$$\lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x}{2} + y - \frac{z}{2} \\ \mu = \frac{z}{2} - \frac{x}{2} \\ \theta = \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} \end{cases}$$

Donc $\forall X \in \mathbb{R}^3 : \exists ! (\lambda, \mu, \theta) : X = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

a) Les coordonnées de $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ dans $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

sont 4, 5, 6

b) Les coordonnées de $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ dans $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

sont 4, 1, 0

• $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (canonique)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

• $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

• $\left(E_{i,j}^{[n,p]}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$

III Familles dans $\mathbb{K}^n$

1) Une notation

On note # $\underline{\mathbb{K}^n} := M_{n,1}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$

On le lit "$\mathbb{K}^n$ en colonne"

On dit qu'on a identifié $\mathbb{K}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{K})$

2) Familles de $\underline{\mathbb{K}}^n$ de bonne taille :

Th. : Soient $X_1, \dots, X_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ (ie $\in \underline{\mathbb{K}}^n$)

On pose $A := (X_1 | X_2 | \dots | X_n) \in M_n(\mathbb{K})$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(X_1, \dots, X_n)$ libre

(ii) $(X_1, \dots, X_n)$ génératrice dans $\underline{\mathbb{K}}^n$

(iii) $(X_1, \dots, X_n)$ base de $\underline{\mathbb{K}}^n$

(iv) $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ie A inv

D/ Déjà : On a

$(X_1, \dots, X_n)$ libre $\iff \operatorname{Ker} A = \{0_{n,1}\}$

D¹/ déjà fait grâce au pt de vue sur les colonnes

■

D²/ $\Rightarrow$ Osq $(X_1, \dots, X_n)$ libre

mq $\operatorname{Ker} A = \{0_{n,1}\}$

Soit $X \in \operatorname{Ker} A$ qu'on écrit (n)

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où $\forall i, x_i \in \mathbb{K}$

R^x $\hat{C}$ $AX = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j(A) = \sum_{j=1}^{n} x_j X_j = 0_{\mathbb{K}^n}$

$(= 0_{n,1})$

$\hat{C}$ $(X_1, \dots, X_n)$ libre, on a $\forall j, x_j = 0$

Donc $X = 0_{n,1}$ Donc $\operatorname{Ker} A = \{0_{n,1}\}$

$\Leftarrow$ Osq $\operatorname{Ker} A = \{0_{n,1}\}$

Mq $(X_1, \dots, X_n)$ libre

Mod R^0 Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n$ tq

$\sum_{i=1}^{n} x_i X_i = 0_{n,1}$

On a donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i(A) = 0_{n,1}$$

On pose $X := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

On a $AX = 0_{n,1}$ Or $\operatorname{Ker} A = \{0_{N,1}\}$

On a $X = 0_{n,1}$ i.e $\forall i, \lambda_i = 0$

CCL : $(X_1, \ldots, X_n)$ libre

- On a $(X_1, \ldots, X_n)$ génératrice dans $\mathbb{K}^n$

$\Longleftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, l'eq° $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n = B$

possède au ⊕ 1 sol°.

$\Longleftrightarrow \forall B$, l'eq° $AX = B$ possède au ⊕ une sol°.

On a vu dans le cours que cela est $\Longleftrightarrow A$ inv.

D'où $(i) \Longleftrightarrow (iv)$ et $(ii) \Longleftrightarrow (iv)$

D'où $(iv) \Longleftrightarrow ((i) \text{ et } (ii)) \Longleftrightarrow (iii)$ ■

3) Une petite famille ne peut pas être génératrice

Th Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(X_1, \dots, X_n) \in (\mathbb{K}^n)^p$

Alors : $(X_1, \dots, X_p)$ génératrice dans $\mathbb{K}^n$

$\Longrightarrow$ $p \geq n$

⚠ La réciproque est F^{∞} en g^{al} : AC

Par contraposition, mq

$$p < n \Longrightarrow (X_1, \dots, X_p) \text{ n'est pas génératrice dans } \mathbb{K}^n$$

Osq $p < n$; ORPA et osq $(X_1, \dots, X_p)$ génératrice dans $\mathbb{K}^n$.

$\hat{C}$ $p < n$; je complète $(X_1, \dots, X_p)$ en une famille $(X_1, \dots, X_p)$ de "bonne taille" en posant

$$X_{p+1} := 0_{n,1}$$

$$\vdots$$

$$X_n := 0_{n,1}$$

AC $\hat{C}$ $(X_1, \dots, X_p)$ est génératrice dans $\mathbb{K}^n$: il en est de $\hat{m}$ pour $(X_1, \dots, X_n)$

D'après 2), en posant $A := (X_1 | \dots | X_n)$, on a

A inv

C'est absurde car $C_n(A) = 0_{n,1}$ ■

4) Une grande famille ne peut pas être libre.

Th Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \dots, X_p \in \mathbb{K}^n$

$(X_1, \dots, X_p)$ libre $\Longrightarrow p \leq n$

Rq : rcpq F : AC ctrex.

D/ Par contraposition : mq

$$p > n \Longrightarrow (X_1, \dots, X_p) \text{ liée}$$

Osq $p > n$ Mq $(X_1, \dots, X_p)$ liée

ORPA et Osq $(X_1, \dots, X_p)$ libre

idée : on agrandit les vecteurs avec des "0"

On pose pour $i \in [\![1,p]\!]$: $\widetilde{X_i} = \begin{pmatrix} \boxed{X_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$

n, p

$p-n>0$ zéros

Fait : $\hat{C}$ $(X_1, \dots, X_p)$ libre, on a aussi :
$(\widetilde{X_1}, \dots, \widetilde{X_p})$ libre

D/ Fait (AC) ∎

Bilan : $(\widetilde{X_1}, \dots, \widetilde{X_p})$ famille libre de $\mathbb{K}^p$

En posant $\widetilde{A} := (\widetilde{X_1} | \cdots | \widetilde{X_p}) \in M_p(\mathbb{K})$

On a $\widetilde{A}$ inversible d'après 2)

Or $L_n(\widetilde{A}) = (0 \dots 0) = 0_{1,n}$

Donc $\widetilde{A}$ pas inv : Absurde ∎

5) Base de $\mathbb{K}^n$

Prop : $(X_1, \dots, X_p)$ base $\mathbb{K}^n \implies p = n$

D/ (T7) (T) $\hat{C}$ elle est libre : $p \leq n$
génératrice : $p \geq n$ ∎

IV Familles quelconques.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev

Soit I un ensemble non vide quelconque

Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteur de E indexée par I

<u>Ex :</u> $E = \mathbb{R}[X]$

$I = \mathbb{N}$

$(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où $P_i := (X-1)^i$

1) Familles presque nulles

a) Déf° : Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires indexée par I. On dit que $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle.

$\underset{ssi}{\Delta}$ $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est fini

<u>Ex :</u> Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- $(1, 2, 3, \ldots)$ n'est pas presque nulle
- $(1, 0, 1, 0, 1, 0 \ldots)$ ———

Ici : $\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i \neq 0\} = 2\mathbb{N}$, qui n'est pas fini

18

- $(1,1,1,0,\dots,0)$ est presque nulle.

- <u>Fait :</u> Soit $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

  Alors $(x_n)_n$ presque nulle $\iff \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0,$
  $x_n = 0$

  $\iff x_n = 0$ APCR

- On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ens des familles presque nulles

- <u>Généralisat° :</u>

  * Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. On dit qu'elle est presque nulle ssi $\{i \in I \mid x_i \neq 0_E\}$ est fini

  * l'ens de ces familles est noté $E^{(I)}$

b) propriétés

<u>Prop :</u> I fini $\Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{K}^{(I)} = \mathbb{K}^I \\ E^{(I)} = E^I \end{cases}$

<u>D/</u> ok ■

<u>Fait :</u> $E^{(I)}$ $\mathbb{K}$-ev.

2) CL presque nulles

Si $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ et si $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$

je ne peux pas définir $\sum_{i\in I} \underbrace{\underbrace{\lambda_i}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{x_i}_{\in E}}_{\in E}$

car cette somme est potentiellement infinie

Mais : si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est presque nulle,

alors $(\lambda_i x_i)_{i\in I}$ est aussi presque nulle.

On peut faire la somme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ car il n'y a qu'un nombre fini de vecteurs $\neq 0_E$ dans cette somme Σ et potentiellement infinie

Notation : Si $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ et si $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$

on note $\sum_{(i\in I)} \lambda_i x_i$ cette somme finie

Rq : Ceci est encore possible si $(x_i)_i \in E^{(I)}$ et on note $\sum_{(i\in I)} x_i$

. ** Plus formell^{nt}, On pose

$$\sum_{(i\in I)} x_i := \sum_{i\in\{k\in I \mid x_k\neq 0_E\}} x_i$$

Fait

Soient $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$

On a $\displaystyle\sum_{(i\in I)} x_i+\lambda y_i = \sum_{(i\in I)} x_i + \lambda\sum_{(i\in I)} y_i$

D/ non

3) Familles libres

Déf^{o} : $(x_i)_{i\in I}\in E^I$ est libre $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}, \left(\sum_{(i\in I)}\lambda_i x_i = 0_E\right)$$

$$\Rightarrow \forall i\in I, \lambda_i=0$$

Prop - f^{dle}

$(x_i)_{i\in I}$ libre $\Longleftrightarrow \forall J$ fini $\subset I$, $(x_j)_{j\in J}$ libre

D/ $(\Rightarrow)$: ok AF par contraposition

$(\Leftarrow)$ Osq $\forall J$ fini $\subset I$, $(x_j)_{j\in J}$ libre

Mq $(x_i)_{i\in I}$ libre

Mod R° Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ tq

$$\sum_{(i\in I)} \lambda_i x_i = 0_E$$

On pose $J := \{i\in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ fini $\subset I$

- Déjà, on a : $\forall i \notin J$, $\lambda_i = 0$ AC
- Par hypothèse : on a $(x_j)_{j\in J}$ libre

Or AC, on a $\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0_E$

Donc AC : $\forall j \in J$, $\lambda_j = 0$

ccl : $\forall i \in I$, $\lambda_i = 0$ ccl : $(x_i)_{i\in I}$ libre $\blacksquare$

4) Familles génératrices

idem

<u>Déf°</u> : On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est <u>génératrice dans E</u> $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} : x = \sum_{(i\in I)} \lambda_i x_i$$

exo* Quelle est la prop duale de la prop fond$^{\text{ale}}$?

5) bases

a) déf°

<u>Déf°</u> : $(x_i)_{i\in I}$ base de E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\begin{cases} (x_i)_{i\in I} \text{ libre} \\ (x_i)_{i\in I} \text{ génératrice } E \end{cases}$

b) exemples

La famille $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$

D/ • elle est génératrice : ok

• libre : ok car $\forall N,\ (1, X, X^2, \dots, X^N)$ libre.

Rq HP :

Tout espace vectoriel E possède une base $(x_i)_{i \in I}$ (avec I potentiellement énorme)

D/ Elle repose sur l'axiome du choix, plus précisément, elle emploie le lemme de Zorn ∎

V Sous-Espaces vectoriels.

Soit E $\mathbb{K}$-ev

1) Définition

Déf° : Soit $F \subset E$. On dit que F est un sous espace vectoriel de E

ssi
1) $0_E \in F$

2) $\forall x, y \in F, \ x+y \in F$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in F, \ \lambda x \in F$

On note # F sev E

2) caractérisation

Prop

$$F \text{ sev } E \iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x,y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x+\lambda y \in F \end{cases}$$

D/ $\Rightarrow$ ok

$\Leftarrow$ Osq $(\cdots)$ Mq F sev E

- Déjà 1) est ok
- On prend dans $(\cdots)$ $\lambda = 1$
- On prend dans $(\cdots)$ $x = 0_E$ ■

Rq** : F sev$(E, +, 0_E, \cdot)$

Alors $\left(F, +|_{F\times F}^{F}, \cdot|_{\mathbb{K}\times F}^{F}, 0_E\right)$ $\mathbb{K}$-ev

3) Exemples

a) fonctionnels

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ sev } \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ sev } \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ sev } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

b) Spéciaux

⚠ $\mathbb{Q}^n$ n'est pas un $\mathbb{R}$-ev

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 2x \right\} \text{ noté } D$$

Soient $X, X' \in D$ qu'on écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$

où $x, x' \in \mathbb{R}$ $X' = \begin{pmatrix} x' \\ 2x' \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ Mq $X + \lambda X' \in D$

C'est ok car $X + \lambda X' = \begin{pmatrix} x + \lambda x' \\ 2x + 2\lambda x' \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x + \lambda x' \\ 2(x + \lambda x') \end{pmatrix} \in D$$

De plus : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in D$

ccl : D sev $\mathbb{R}^2$

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

C'est l'ens des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont la somme des coordonnées est nulle

22 Ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in F$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \in F$

On a F sev $\underline{\mathbb{R}^n}$

Prop : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

On note

$$\mathcal{S}_{AX=0} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \;\middle|\; \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases} \right\}$$

Ainsi $\mathcal{S}_{AX=0}$ est l'ens des sol° du système

On a $\mathcal{S}_{AX=0}$ sev $\mathbb{K}^p$

D/ On a

$$\mathcal{S}_{AX=0} = \left\{ X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0_{n,1} \right\}$$

- Déjà : $0_{p,1} \in \mathcal{S}_{AX=0}$
- Soient $X, Y \in \mathcal{S}_{AX=0}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$

On a : $A(X + \lambda Y) = \underbrace{AX}_{= 0_{n,1}} + \underbrace{\lambda AY}_{= 0_{n,1}} = 0_{n,1}$

Ainsi $X + \lambda Y \in \mathcal{S}_{AX=0}$ ∎

Rq : On a $\operatorname{Ker} A = \mathcal{S}_{AX=0}$ Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker} A \text{ sev } \mathbb{K}^p}$

Ex matriciels

- $\{\lambda I_n \,;\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ sev $D_n(\mathbb{K})$ sev $T_n^+(\mathbb{K})$ sev $M_n(\mathbb{K})$

  l'ens des mat scalaires

- $S_n(\mathbb{K})$ sev $M_n(\mathbb{K})$; de m̄ $A_n(\mathbb{K})$ sev $M_n(\mathbb{K})$

- $\left\{ M \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \;\middle|\; m_{1,1} = 0 \right\}$ sev $M_{n,p}(\mathbb{K})$

- $\left\{ M \in M_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; tr(M) = 0 \right\}$ sev $M_n(\mathbb{K})$

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

  Alors $\mathcal{C}(A)$ sev $M_n(\mathbb{K})$

- $T_n^{(p)}(\mathbb{K})$ sev $T_n^+(\mathbb{K})$ si $p \in \mathbb{N}$

Exemples séquentiels

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$

  Posons $F_{a,b} := \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \right\}$

  Alors $\boxed{F_{a,b} \text{ sev } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

Notons $P := X^2 - aX - b$

Osq P possède 2 racines réelles $\alpha \neq \beta$

On a vu que $\exists ! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$\forall n, \; u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$

Notons $\alpha^\bullet := (\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\beta^\bullet := (\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$

On a $\alpha^\bullet, \beta^\bullet \in F_{a,b}$ (exo)$^{++}$

Prop : $(\alpha^\bullet, \beta^\bullet)$ base de $F_{a,b}$

Rq : Liberté et identification.

Prop : Soit E ev

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ libre

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p), (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ Alors

$$\sum_{i=}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i$$

$$\Longrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \; \lambda_i = \mu_i$$

D/ Osq $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i$ $: E$ (CR°)

$: \mathbb{K}$

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0_E$

ie $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0_E$

Ĉ $(x_1, \dots, x_p)$ libre, on a bien

$\forall i,\ \lambda_i - \mu_i = 0_{\mathbb{K}}$ ie $\forall i,\ \lambda_i = \mu_i$ ■

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \xrightarrow{} \mathrm{CV} \right\}$ sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \longrightarrow 0 \right\}$ sev $\left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \xrightarrow{} \mathrm{CV} \right\}$

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ piétine} \right\}$ sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$ et $N_0 \in \mathbb{N}$

  On note $G_{\alpha, N_0} := \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geq N_0,\ u_{n+1} = \alpha u_n \right\}$

  On a G_{α, N_0} sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ stationne} \right\}$ sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

  noté $F_{\text{stationne}}$

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n = 0 \text{ APCR} \right\}$ sev $F_{\text{stationne}}$

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ sommable} \right\}$ sev " $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\longrightarrow 0}$ "

- Si $(A_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n = o(A_n) \right\}$ sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

24

noté # "$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{o(A_n)}$"

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{piétine}}$ sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{o(n)}$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\to 0} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{o(1)}$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{o\left(\frac{1}{n_2}\right)}$ sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{o\left(\frac{1}{n}\right)}$ sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\to 0}$ sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\xrightarrow{CV}}$ sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{O(1)}$

  sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{o(n)}$ $(\ldots)$

Exemples polynomiaux

- Soit $a \in \mathbb{R}$.

  On note $N_a := \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(a) = 0 \}$

  Alors N_a sev $\mathbb{R}[X]$

- $\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \text{ impair}, \ \mathrm{coeff}_k(P) = 0 \}$

  sev $\mathbb{R}[X]$ noté $\mathbb{R}[X]_{\text{pair}}$

  exo ⊕ Mq $P \in \mathbb{R}[X]_{\text{pair}} \iff \widetilde{P}(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire

- $\mathbb{K}_n[X]$ sev $\mathbb{K}[X]$

Retour sur les ex. fonctionnels

- Fixons $T \in \mathbb{R}_+$

$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})_{T\text{-pér}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ T-périodique} \}$

sev $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- $\mathbb{R}_1[X] := \{ f^{o} \text{ affines} \}$

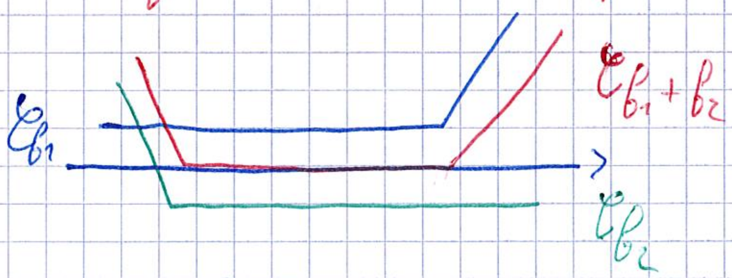
$= \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, a, b \in \mathbb{R} : \forall x,\ f(x) = ax + b \}$

sev $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- $\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ (im)paire} \}$ sev $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- ⚠ L'ens des f^{o} monotones n'est pas un sev

<u>ctrex</u>



Fixons $A \subset \mathbb{R}$

Posons $\mathcal{N}_A := \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in A,\ f(x) = 0 \}$

On a $\mathcal{N}_A$ sev $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- $\left\{ f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$ sev $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

4) Premières propriétés

__Fait :__ On a tjrs $\{0_E\}$ sev E

E sev E

On dit que ces sev sont triviaux

__Fait__ Soit F sev E

Alors F est stable par CL.

ie $\forall$ $\left.\begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \in F \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in F$

__D/__ rec ■

__Prop :__ $\left.\begin{array}{l} F \text{ sev } E \\ G \text{ sev } E \end{array}\right\} \Rightarrow F \cap G$ sev E

__D/__ $\textcircled{+}$

- $0_E \in F$, $0_E \in G$. Donc $0_E \in F \cap G$
- Soient $x, y \in F \cap G$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$
- Mq $x + \lambda y \in F \cap G$
  - Déjà, on a $x \in F$, de m̄ $y \in F$
  - Ĉ F sev E, on a $\underline{x + \lambda y \in F}$
  - De m̄ : $x + \lambda y \in G$ AF
  - Donc $\ulcorner x + \lambda y \in F \cap G$

D'après la caractérisat° des sev : on a bien $\boxed{F \cap G \text{ sev } E}$ ■

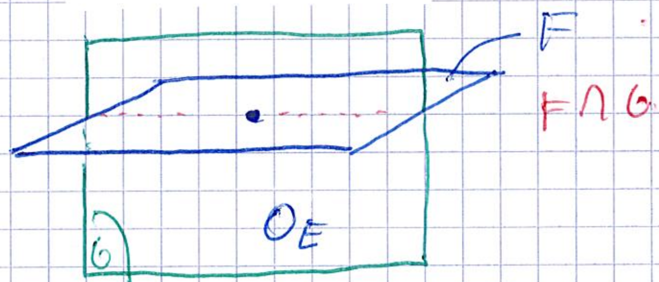
Rq : (I) gen^{dlnt} : si I ens $\neq \emptyset$, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sev de E indexée par I

Alors $\displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$ sev E

D/ (exo)

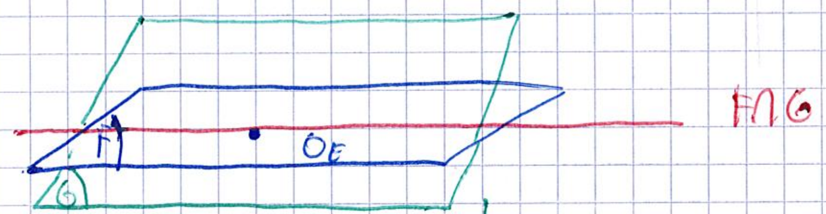
d^n

$E)$



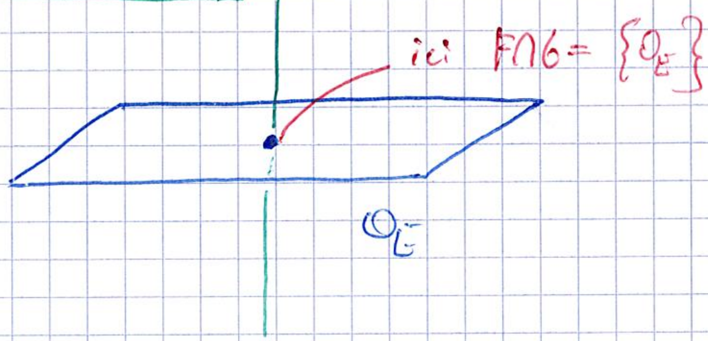
d^n

$E)$



d^n

$E)$



⚠ Parler d'union d'ev n'a $\emptyset$ pertinence

Une union de sev n'est jamais un sev, sauf dans les cas idiots

Ex Si D droite, si P est un plan (vectoriel) et si "$D \subset P$" : c'est idiot, on a $D \cup P = P$

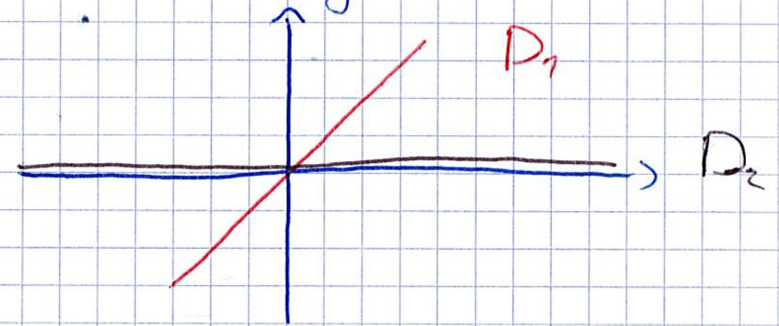
cf 24.17 et 24.18

ctrex :

On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère deux droites : "$D_1 : y = x$"

"$D_2 : y = 0$"

d° $\mathbb{R}^2$)



Formellement $D_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$

ie $x - y = 0$

On a AF D_1 sev $\mathbb{R}^2$

et $D_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$ sev $\mathbb{R}^2$

Mq $D_1 \cup D_2$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$

D/ on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in D_1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in D_2$

Mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin D_1$ (car $2 \neq 1$)

$\notin D_2$ (car $1 \neq 0$) ∎

5) Somme de sev

a) déf°

Déf° : Soit E ev. Soient F, G sev E

La somme de F et G, notée $F+G$,

est le sev de E déf par

$$F+G := \{ x+y \, ; \, x \in F \text{ et } y \in G \}$$

b) qq faits

Fait : Soit F, G sev E. Alors $F+G$ sev E

D/ • $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + 0_E \in G$

• Soit $z, z' \in F+G$ qu'on écrit

Mod R°

$$z = x+y \quad \text{et} \quad z' = x'+y'$$

avec $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

On a $z + \lambda z' = \underbrace{(x+\lambda x')}_{\substack{\in F \\ \text{car } F \text{ sev } E}} + \overbrace{(y+\lambda y')}^{\in G \text{ car } G \text{ sev } E}$

$\in F+G$

■

Fait (+) : 1) $F+G = G+F$

2) $F+(G+H) = (F+G)+H$

3) $\{0_E\} + F = F + \{0_E\} = F$

4) $F + E = E + F = E$

4bis) $F \subset G \Rightarrow F + G = G$

Rq: La somme est l'analogue vectorielle de l'union.

Prop: Soit $\mathcal{E}$ un ensemble
Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ parties $\mathcal{E}$

Alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est la + petite partie de $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{F}$ et qui contient $\mathcal{G}$

Prop: Soient F, G sev E

1) Alors $F + G$ est le + petit sev de E contenant F et G

2) Ie $\forall H$ sev E, $\left.\begin{array}{l} F \subset H \\ G \subset H \end{array}\right\} \Rightarrow F + G \subset H$

D/ prop: Cahier R°

Soit H sev E tq $F \subset H$ et $G \subset H$

Mq $F + G \subset H$

Soit $z \in F + G$ qu'on écrit $z = x + y$
avec $x \in F$ et $y \in G$
On a $x \in F$, or $F \subset H$ donc $x \in H$
De m̂ : $y \in H$

Or, A sev E. Donc $x+y \in A$; ie $z \in H$

Ainsi, on a $F+G \subset H$ ■

D/ Mq $F+(G+H) = (F+G)+H$

- Mq $F+(G+H) \subset (F+G)+H$

Soit $x \in F+(G+H)$

qu'on écrit $x = y+z$ avec $y \in F$
et $z \in G+H$

comme $z \in G+H$, on l'écrit

$z = a+b$ avec $a \in G$ et $b \in H$

$x = (y+a)+b$

Or $y+a \in F+G$ et $b \in H$

donc $x \in (F+G)+H$

(...)

c) exemples

On se place dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$D_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

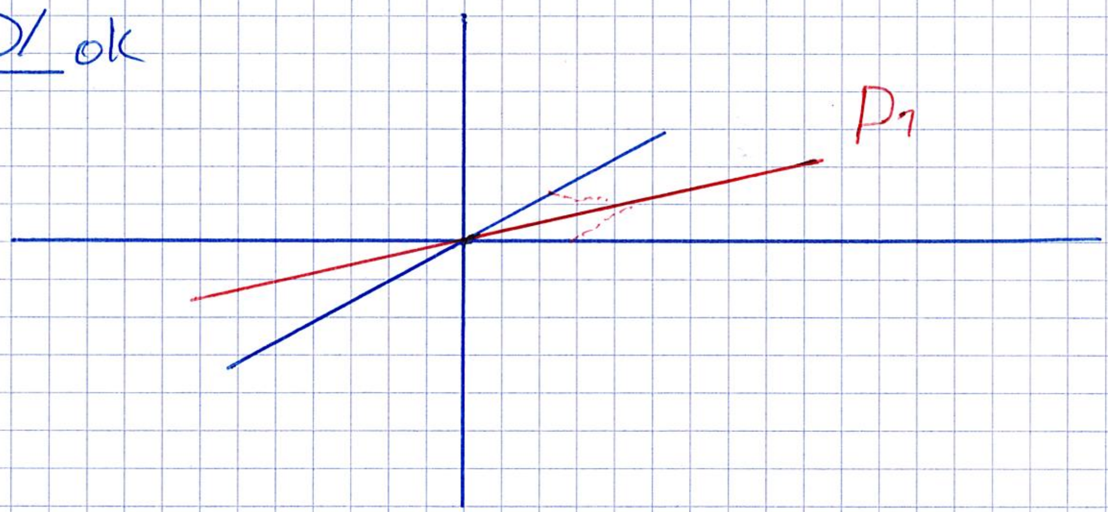
$$D_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$D_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

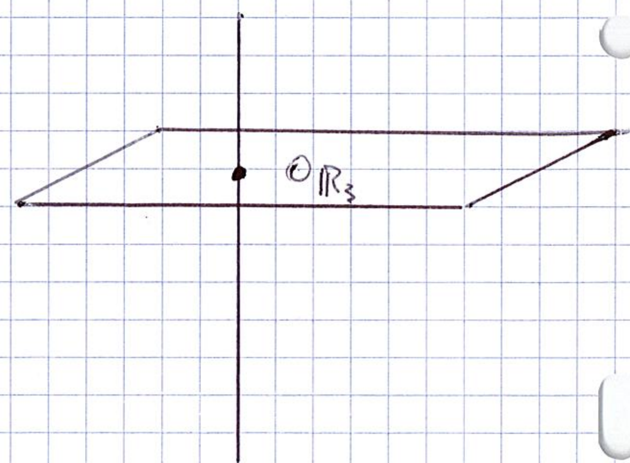
Fait : D_1, D_2, D_3 sev $\mathbb{R}^3$

D/ ok

d^n



Fait : $D_1 + D_2 =$



$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Rq : Plaçons nous dans $\mathbb{R}^n$. Si un sev peut être défini par p équations, il peut être défini à l'aide de n-p paramètres

exo ** Comment transformer ce principe en proposition

D/ Mq $D_1 + D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| z = 0 \right\}$ noté P_1

① On a $D_1 + D_2 \subset P_1$

En effet, on a $D_1 \subset P_1$ i.e D_1 sev P_1
et D_2 sev P_1

$$\boxed{R^* \quad \left.\begin{array}{l} F \text{ sev } H \\ G \text{ sev } H \end{array}\right\} \Rightarrow F + G \text{ sev } H}$$

Donc ici, on a bien $D_1 + D_2$ sev P_1

② Rcpt mq $P_1 \subset D_1 + D_2$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in P_1$. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^{\in D_1} + \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\in D_2}$$

ORPA S

Analyse soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

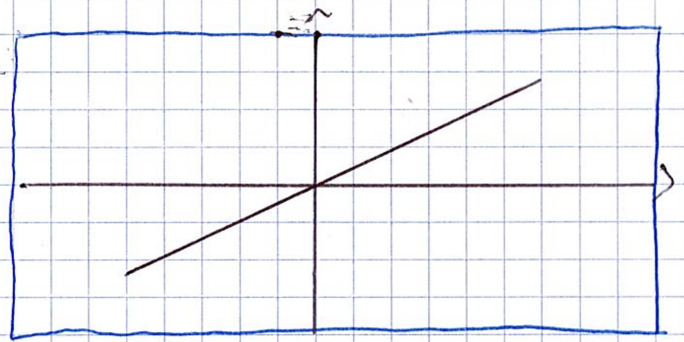
On a $y = \lambda + 0$ donc $\lambda = y$

Et $x = \lambda + \mu$, on en deduit $\mu = x - y$

Synthèse :

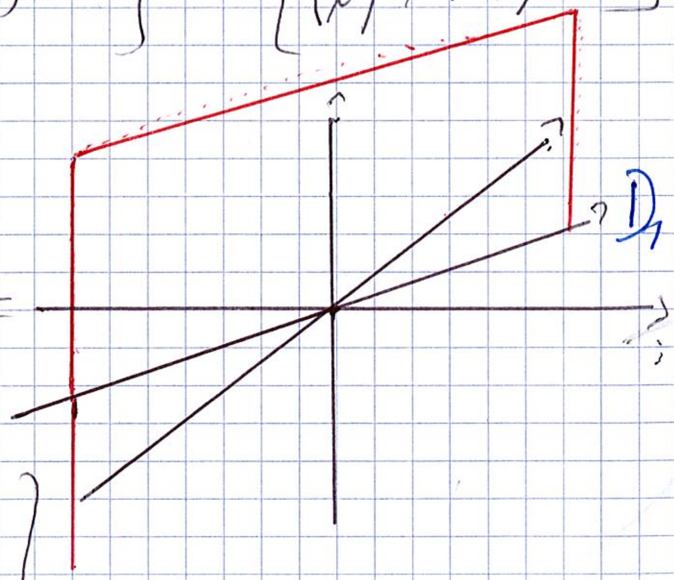
On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in D_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in D_2}$

III.

Fait : $D_2 + D_3 =$ 

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

D/ AF

Fait : $D_1 + D_3 =$ 

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ D/ AF

Fait :

$$D_1 + D_2 + D_3 = \mathbb{R}^3$$ ("l'espace plein")

D/ $\subset$: c'est ok
$\supset$: AF ■

d) Généralisation

T Si $F_1, \dots, F_p$ sev E ; on pose

$$F_1 + \dots + F_p = \left\{ x_1 + x_2 + \dots + x_p \, ; \, \forall i \in I, x_i \in F_i \right\}$$

exo * Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E

indexée par I

$$\sum_{i \in I} F_i := \; ?$$

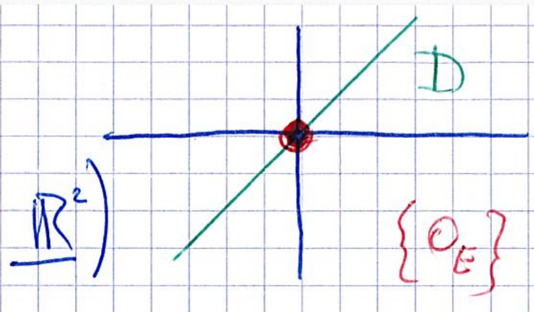
6) Sev $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

a) $\mathbb{R}^2$

Prop : Il y a trois types de sev dans $\mathbb{R}^2$:

1°/ $\{ 0_{\mathbb{R}^2} \}$ 2°/ les droites passant par l'origine 3°/ $\mathbb{R}^2$ "le sev plein"

d^n



D/ ok ■

b) $\mathbb{R}^3$

Prop : Les sev de $\mathbb{R}^3$:

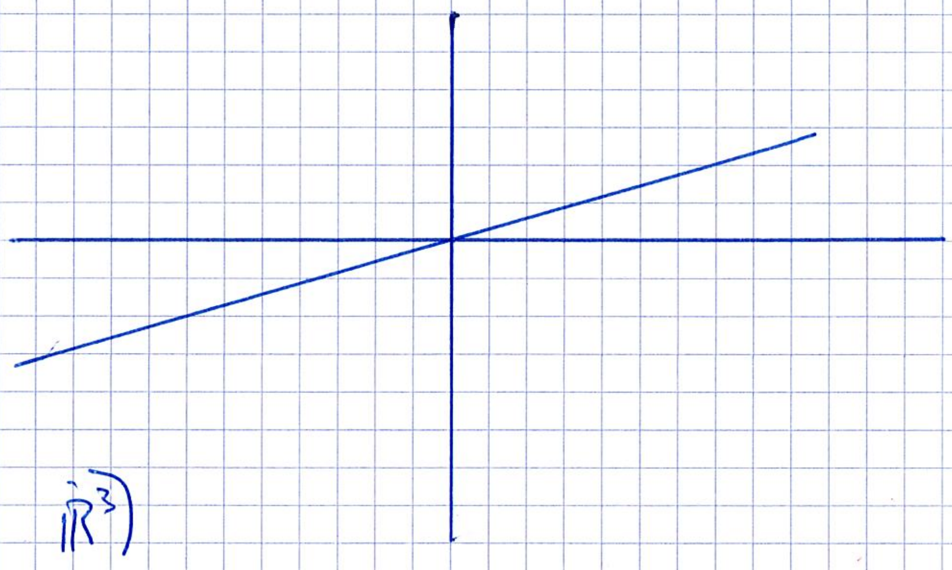
1°/ le sev nul

2°/ Les droites passant par $O_{\mathbb{R}^3}$

3°/ Les plans ______

4°/ Le sev plein

d^n



7) Sev engendré par une partie

a) def°

Def° : Soit $A \subset E$ une partie de E.

Le sev (de E) engendré par A, noté $\text{Vect}(A)$, est def par

$$\text{Vect}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \; ; \; n \in \mathbb{N}, (a_1, \dots, a_n) \in A^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Rq : Ainsi, vect(A) est l'ens des CL d'élé^{ts} de A

Rq : on dit qu'on a defini Vect A "par l'interieur"

⚠ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ n'a $\emptyset$ sens ici. On est dans E, ev abstrait

Les él^{ts} de E (appelés vecters) n'ont pas de coordonnées

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Fait-f}^{\text{dl}} : \\ \qquad A \subset \text{Vect}(A) \text{ sev}E \end{array}}$$

D/ • soit $a \in A$, on a $a = 1 \cdot a \in \text{Vect}(A)$

• $0_E \in \text{Vect}(A)$ car $0_E = \sum_{i=1}^{0} (\dots)$

• Soient $x, y \in \text{Vect}(A)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$

R* on écrit $\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j a'_j}$

avec $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots \mu_m \in \mathbb{K}$

et $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \in A$

On a $x + \lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda \mu_i a'_i$

Rq* : $\text{vect}(\emptyset) = \{0_E\}$

b) exemples

On poursuit l'exemple précédent

Fait : $D_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ $D_3 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$D_2 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

Déf° : Si $x \in E$, on pose $\mathrm{Vect}(x) := \mathrm{vect}(\{x\})$

Si $x_1, \dots, x_n \in E$, on pose

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) := \mathrm{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\})$$

Déf° : Soit E ev

Une droite vectorielle dans E

est un sev du type :

$$\mathrm{Vect}(x_0)$$

avec $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$

· On dit alors que x_0 est un vecteur directeur de cette droite.

· On note aussi $\mathbb{K} x_0 := \mathrm{vect}(x_0)$

Fait ①

1) $\mathrm{Vect}(x_0) = \{\lambda x_0 \, ; \, \lambda \in \mathbb{K}\}$

2) $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \, ; \, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$

D/ ok

Ex : On se place dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ noté E

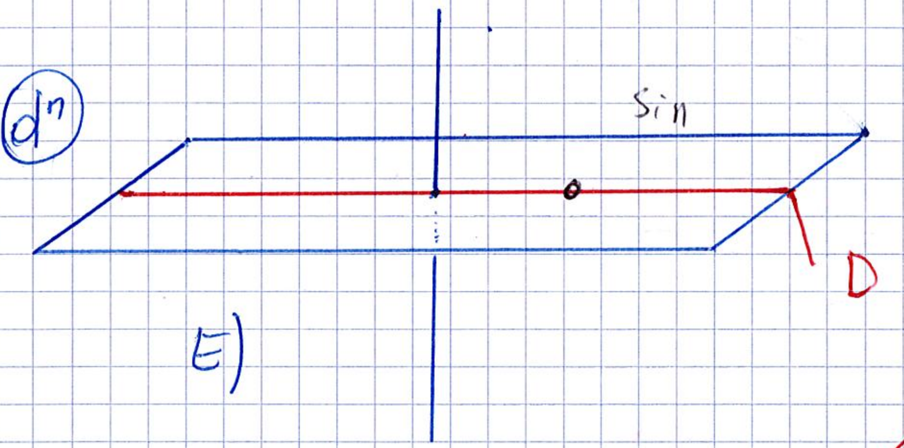
On considère $F := \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ } 2\pi \text{ periodique} \}$

ie on pose $F := E \cap \mathcal{F}_{2\pi per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

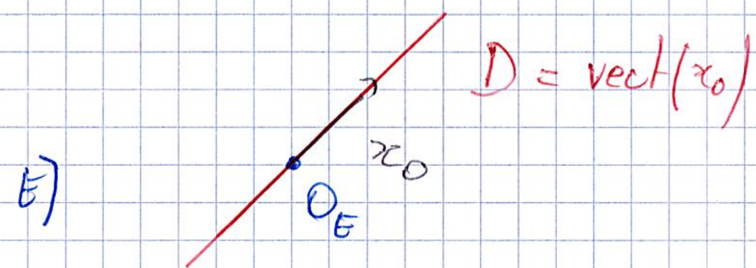
On pose $D := \mathrm{Vect}(\sin)$

Alors D est une droite

d^n



En g^{al}



Caractérisat° de Vect(A)

Prop : Vect(A) est le + petit sev de E contenant A

AF Donner l'assertion formelle

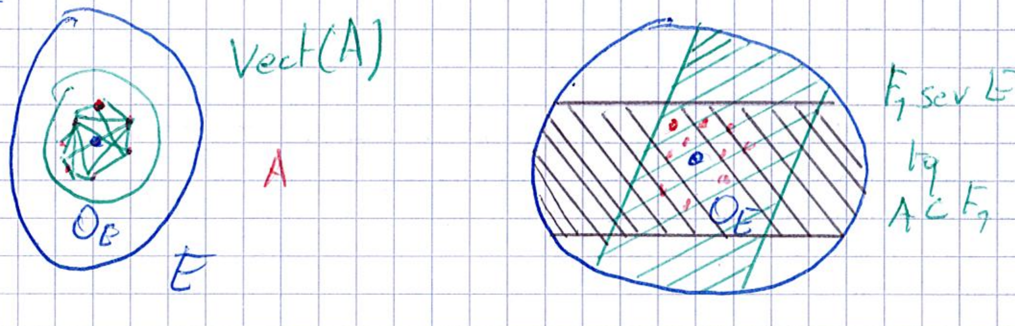
D/ exo

$\underline{Rq}^{\theta}$: On peut aussi définir vect(A) par l'exterieur.

On a

$$\mathrm{vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev } E \text{ tq} \\ A \subset F}} F$$

Schéma :



D/ $\subseteq$ Mq $\mathrm{vect}(A) \subset \bigcap_{\substack{F \text{ sev } E \text{ tq} \\ A \subset F}} F$

(...)

d) propriétés

Prop (T)

1) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{vect}(A)$ sev $\mathrm{vect}(B)$

2) $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$

3) A sev $E \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) = A$

4) $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_q) + \mathrm{Vect}(x_{q+1}, \dots, x_n)$

5) $$\boxed{\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{vect}(x_1) + \mathrm{vect}(x_2) + \dots + \mathrm{vect}(x_n)}$$

D/ 1) C'est la croissance de $\mathrm{vect}(\cdot)$

Osq $A \subset B$

D^1/ Toute CL d'él^{nts} de A est CL d'él^{nts} de B.

Donc $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$

D^2/ On a vu que $\left.\begin{array}{l} A \subset F \\ F \text{ sev } E \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{vect}(A) \subset F$

Ici, on a $A \subset B \subset \mathrm{Vect}(B)$

et $\mathrm{vect}(B)$ sev E

Donc $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$

2) Mq $\text{vect}(A \cup B) = \text{vect}(A) + \text{vect}(B)$

1°) Mq $\text{vect}(A) + \text{vect}(B) \subset \text{vect}(A \cup B)$

On a $A \subset A \cup B$

donc $\text{vect}(A)$ sev $\text{vect}(A \cup B)$

De $\overline{m}$ $\text{vect}(B) \subset \text{vect}(A \cup B)$

<u>Rappel</u> $\underset{(\text{sev } E)}{F}, \underset{(\text{sev } E)}{G} \subset H \Rightarrow F + G \underset{\text{sev}}{\subset} H$

Ici, $\hat{C}$ $\begin{cases} \text{vect}(A) \subset \text{vect}(A \cup B) \\ \text{vect}(B) \subset \text{vect}(A \cup B) \end{cases}$

on a bien $\text{vect}(A) + \text{Vect}(B) \underset{\text{sev}}{\subset} \text{vect}(A \cup B)$

2°) Récipᵗ mq $\text{Vect}(A \cup B) \subset \text{Vect}(A) + \text{vect}(B)$

Soit $x \in \text{vect}(A \cup B)$ qu'on écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$, $\forall i$, $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$ $(\cdots)$

$\hat{C}$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in \text{Vect}(A)$ et $\hat{C}$ $\sum_{i=1}^{m} \mu_i b_i \in \text{Vect}(B)$

On a bien $x \in \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ $\blacksquare_{2)}$

3) Si A sev E alors $\mathrm{Vect}(A) = A$

- Déjà, $A \subset \mathrm{vect}(A)$
- Notons $F := A$, on a $A \subset F$ et F sev E.

Donc, on a $\mathrm{vect}(A) \subset F$ i.e $\mathrm{vect}(A) \subset A$ (3)

4) On a $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{vect}(\{x_1, \dots, x_n\})$

$= \mathrm{vect}(\{x_1, \dots, x_q\} \cup \{x_{q+1}, \dots, x_n\})$

$= \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_q) + \mathrm{vect}(\{x_{q+1}, \dots, x_n\})$

5) rec $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{vect}(x_1) + \dots + \mathrm{vect}(x_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vect}(x_i)$

Mq $\mathrm{vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev } E \text{ tq} \\ A \subset F}} F$

$\subset$: Soit F un sev de E tq $A \subset F$

Par croissance de $\mathrm{vect}(\cdot)$ $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(F)$

or $\mathrm{vect}(F) = F$. CCl : on a $\mathrm{vect}(A) \subset F$

Ainsi, on a " $\forall F$ sev E tq $A \subset F$, $\mathrm{vect}(A) \subset F$ "

Donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \bigcap_{\substack{F \text{ sev } E \text{ tq} \\ A \subset F}} F$

$\supset$: Notons $F_0 := \text{vect}(A)$

On a F_0 sev E , $A \subset F_0$ Donc

$$\bigcap_{\substack{F \text{ sev } E \text{ tq} \\ A \subset F}} F \subset F_0$$

$\blacksquare$

e) Lien avec les familles génératrices

Prop (T) : Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs à p éléments.

Alors :

$(x_1, \dots, x_p)$ génératrice dans E

$\iff \text{vect}(x_1, \dots, x_p) = E$

D/ ($\Rightarrow$) Osq $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice.

Mq $\text{vect}(x_1, \dots, x_p) = E$

Déjà, on a $\text{vect}(x_1, \dots, x_p) \subset E$

Récipq$^{\text{nt}}$: Soit $x \in E$; $\hat{c}$ $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice dans E, fixons

$\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

On a donc $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$

$\Longleftarrow$ Osq $\text{vect}(x_1, \dots, x_p) = E$

Mq $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice dans E

Soit $x \in E$. $\hat{C}$ $E = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$

fixons $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ $\blacksquare$

VI Sommes directes.

1) Cas de 2 sev

a) Déf°

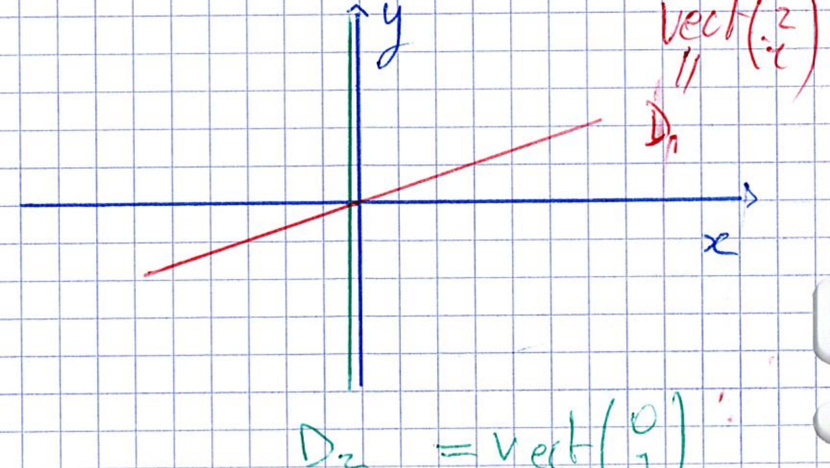
Déf° : Soit E ev. Soient F, G sev E

On dit que F et G sont en somme directe $\underset{ssi}{\Delta}$

$$\forall (x_F, x_G), (y_F, y_G) \in F \times G, \ x_F + x_G = y_F + y_G$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_F = y_F \\ x_G = y_G \end{cases}$$

Ex : • Dans $\mathbb{R}^2$)



$D_2 = \text{vect}\binom{0}{1}$

D/ Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in D_1 \times D_2$

On les écrit : $x_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y_1 = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad y_2 = \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Osq $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$

On a $\begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix}$

Donc $2\lambda_1 = 2\mu_1$ donc $\boxed{\lambda_1 = \mu_1}$

Ĉ $\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2$, on a $\boxed{\lambda_2 = \mu_2}$

Ainsi $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$

Ainsi : $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow$ je peux identifier

$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$

CCl : D_1 et D_2 sont en somme directe

• Dans $E := \mathbb{R}[X]$

Je prends $F := \mathbb{R}_2[X]$

On sait que $(1, X, X^2)$ est base de $\mathbb{R}_2[X]$

donc est génératrice dans $\mathbb{R}_2[X]$

Ainsi, $\mathbb{R}_2[X] = \text{vect}(1, X, X^2)$

Je prends $G := \mathbb{R}_3[X] \setminus \mathbb{R}_2[X]$ JAMAIS

L'opération $\setminus$ n'a $\emptyset$ pertinence

pour les evs

(Ici : $\mathbb{R}_3[X] \setminus \mathbb{R}_2[X]$ ne contient pas

$0_{\mathbb{R}[X]}$

Pire, ce n'est pas stable par somme.
Donc ce n'est pas un sev)

On prends $G = \text{vect}(X^3, X^4, X^5)$

Alors : <u>F et G sont en somme directe.</u>

<u>b) caracterisations</u>

On dispose de l'application $\varphi : F \times G \longrightarrow F + G$
$(x_F, x_G) \longmapsto x_F + x_G$

$\boxed{\text{Fait : } \varphi \text{ est surjective}}$

D/ Mq $\forall y \in F+G, \exists (x_F, x_G) \in F \times G$:

$\varphi(x_F, x_G) = y$

Soit $y \in F+G$ qu'on écrit $y = x_F + x_G$

avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$

On a $y = \varphi(x_F, x_G)$ ▪

Prop : F et G en somme directe

$\iff \varphi$ est injective

Prop :

F et G sont en somme directe $\iff F \cap G = \{0_E\}$

D/ ($\Leftarrow$) Osq $F \cap G = \{0_E\}$. Soient (x_F, x_G),

$(y_F, y_G) \in F \times G$ tq $x_F + x_G = y_F + y_G$

On rassemble

On a $x_F - y_F = y_G - x_G$

Ĉ F sev E, on a $x_F - y_F \in F$

De m̄, on a $y_G - x_G \in G$

Ainsi, l'élé^{nt} $x_F - y_F$ est dans

$F \cap G$.

ccl : il est nul. Donc $\begin{cases} x_F = y_F \\ x_G = y_G \end{cases}$

$\Leftarrow$ ■

$\Rightarrow$ Osq F et G sont en somme directe.

Mq $F \cap G = \{0_E\}$

Soit $x_{FG} \in F \cap G$. Mq $x_{FG} = 0_E$

Astuce : On écrit $\underbrace{x_{FG}}_{\in F} + \underbrace{(-x_{FG})}_{\in G}$

$= \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$

Ĉ F et G sont en somme directe,

On a $x_{FG} = 0_E$ ■

c) Une notation

Notation :

Si F et G sont en somme directe,

On note $F \oplus G$ leur somme.

exo Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ non nuls

$(x_1, \dots, x_n)$ libre $\Longleftrightarrow$ les vect (x_i) sont en $\oplus$

3) Supplémentaire ! ∞

a) déf°

Déf° : Soit E ev. Soit F sev E

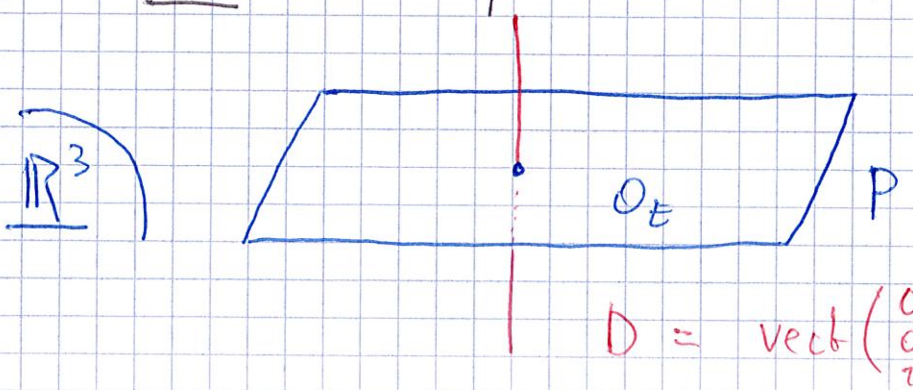
Un supplémentaire de F dans E est un sev G de E

tq $F \oplus G = E$

Rq : On dit que F et G sont en somme directe et pleine

b) Exemples

- Dans $\mathbb{R}_3[X]$, un supplémentaire de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\text{Vect}(X^3)$
- Dans $\mathbb{R}^3$. Je pose $P = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$



$D = \text{vect}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Fait : 1) $P \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

2) Ainsi P et D sont en $\oplus$

3) On a $P + D = \mathbb{R}^3$

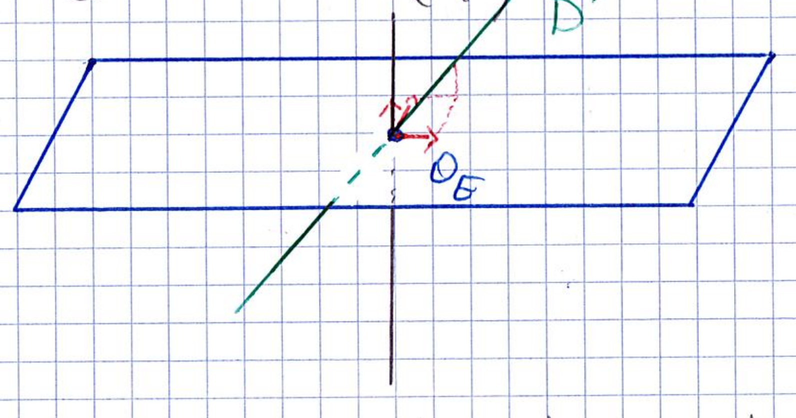
4) Ainsi D est un supplementaire de P dans $\mathbb{R}^3$

D/ AF ■

Attention : Ne jamais dire le supplémentaire car il n'y a pas unicité en g^{al}

Prenons $D' := \text{vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

d^n



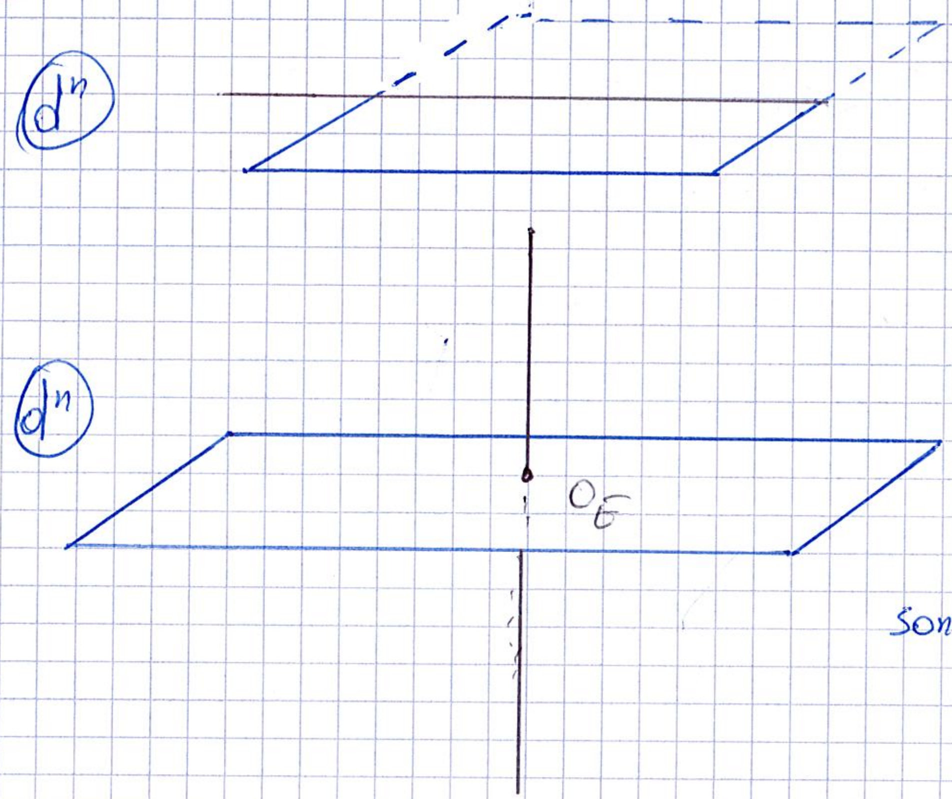
Prop : D' est un supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^3$

D/ AF ■

- On se place dans $E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

On considère $F := \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$

d) dessin



sont en $\oplus$

e) exemples

Fait : On se place dans $M_n(\mathbb{R})$

Alors $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont en $\oplus$

D/ $\mathbb{R}^*$ On calcule $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$ qui est un sev

Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$

On a $M^T = M$ et $M^T = -M$ Donc $M = -M$

Donc $M + M = 0_n$ ie $2M = 0_n$

Or $2 \neq 0$ Donc $M = 0_n$

On se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

⚠ $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ l'ens des suites à valeurs dans $\mathbb{Z}$ n'est pas un sev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$[0,1[^{\mathbb{N}}$ n'est pas stable par $+$

On pose $F := \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \longrightarrow 0\}$

$G := \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ est } 42\text{-périodique}\}$

(ie tq $\forall n$, $u_{n+42} = u_n$)

Prop : F et G sont en $\oplus$

D/ exo

Soit E ev ; soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$

Prop : vect(x) et vect(y) sont en $\oplus$ $\iff$ x et y ne sont pas colinéaires

D/ exo

2) Cas général

a) déf°

<u>Attention :</u> La caractérisation pratique et facile à étendre ne se généralise pas.

<u>Déf°</u> : Soit E ev

Soient $F_1, \dots, F_p$ sev E

On dit que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe $\underset{ssi}{\Delta}$

$$\forall (x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p,$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} y_i \Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], \quad x_i = y_i$$

Dans ce cas, on note

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p := F_1 + F_2 + \dots + F_p .$$

ou

$$\bigoplus_{i=1}^{p} F_i := F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_p$$

b) Caractérisation

Soit E ev

Soient $F_1, \dots, F_p$ sev E

Notons $\varphi : F_1 \times F_2 \times F_3 \times \dots \times F_p \longrightarrow F_1 + F_2 + \dots F_p$

$$(x_1, x_2, \dots x_p) \longmapsto x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

Fait évident : φ est surjective

Prop : les F_i sont en $\oplus$ $\Longleftrightarrow$ φ injective

Prop :

Les F_i sont en $\oplus$ $\Longleftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$,

$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E \Rightarrow \forall i, x_i = 0_E$

D/ $\Longrightarrow$ $\oplus$

$$\underset{F_1}{x_1} + \dots + x_p = 0_F = \underset{F_1}{0_E} + \dots + 0_E$$

donc $\forall i, x_i = 0_E$

$\Longleftarrow$ $\oplus$

$x_1 + \dots x_p = y_1 + \dots + y_p$ Mq $\forall i, x_i = y_i$

$$\underbrace{(x_1 - y_1)}_{F_1} + \underbrace{(x_2 - y_2)}_{F_2} + \dots (x_p - y_p) = 0_E$$

Donc $\forall i, x_i = y_i$

exo

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, un supplémentaire de $\{f \text{ paires}\}$ est $\{f \text{ impaires}\}$

2) $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$; ie $A_n(\mathbb{R})$ est un supplémentaire de $S_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$

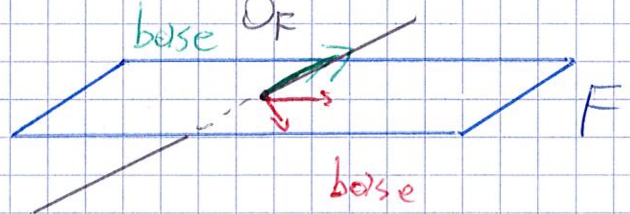
4) bases et sommes directes

E ev

On écrit $E = F \oplus G$ avec F, G sev E

Prop : (T)	$(x_1, \dots, x_n)$ base F $(y_1, \dots, y_p)$ base G	$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ base E

dn



$E)$

D/ (AF)^{H}

Generalisation (T)

$$\left.\begin{array}{l} E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \\ \\ B_i \text{ base } E_i \text{ pour tout } i \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_p \\ \text{base } E \end{array}$$

Rq : Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des familles de E, $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$ appelée la concaténation de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est la famille composée des éléments de $\mathcal{C}$ puis ceux de $\mathcal{D}$.

Ex : Si $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^3$

et si $\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$

alors $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^5$

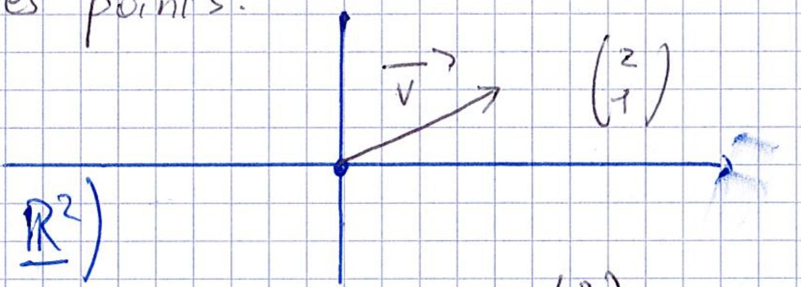
VII Sous-espaces affines

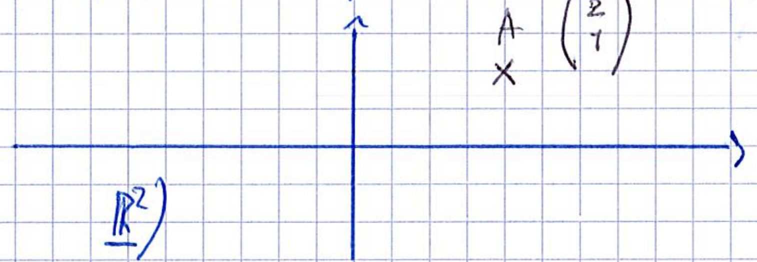
1) Deux représentation des élé^{nts} d'un ev

a) Dessins

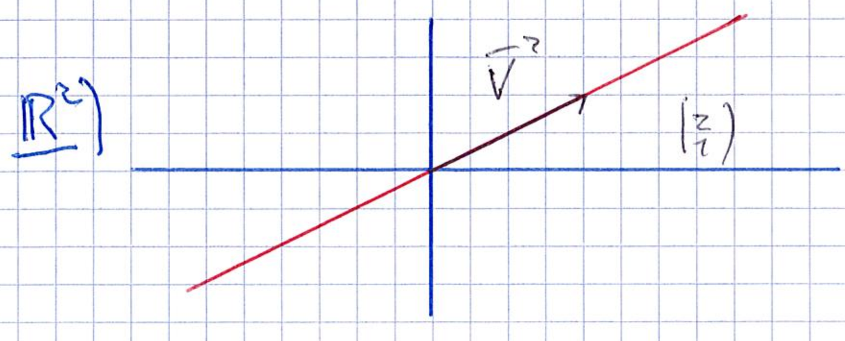
Si E est un ev, je peux représenter les élé^{nts} de E de deux façons : ĉ des vecteurs ou ĉ des points.

d^n





d^n Si $F = \text{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, je peux représenter $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en tant que vecteur, les él^{nts} de F en tant que points.



b) vecteur reliant 2 pts

<u>Notation</u> : Soit E ev
Soient $A, B \in E$

On note $\overrightarrow{AB} := B - A$

<u>Fait fondamental</u>

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

<u>Rq</u> ⊕ :
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} = 0_E \iff A = B$
- etc.

2) Sous-espaces affines

Soit E ev

a) une notation

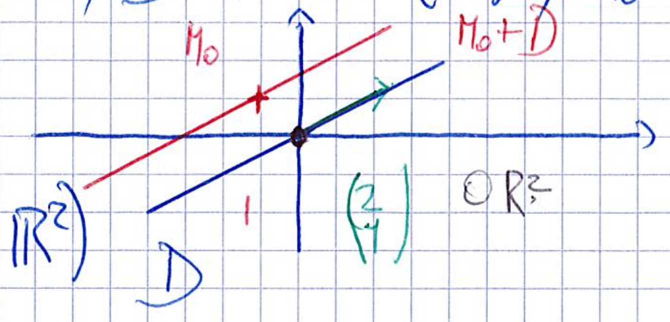
Soit F sev E
Soit $M_0 \in E$. Alors on pose

$$M_0 + F := \{ M_0 + x_F \ ; \ x_F \in F \}$$

Ex :

- $E = \mathbb{R}^2$; $D := \text{vect}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $M_0 := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

(d^1)



- $I_n + A_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$

- $\tilde{1} + F$ où $F := \{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \}$

  dans $E := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

b) déf°

<u>Déf° :</u> Un ss-espace affine de E est une partie de E de la forme $M_0 + F$ avec $M_0 \in E$, F sev E

<u>Rq :</u> On dit qu'il est dirigé par F

3) Solutions d'un système d'équations linéaires

$n, p \in \mathbb{N}^*$

$A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$; $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

On regarde l'eq° $AX = B$

On note $\mathcal{S}_{AX=B} := \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_p\end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = B \right\}$

Prop : Deux cas possibles :

1°) ou bien $\mathcal{S}_{AX=B} = \emptyset$

2°) ou bien $\mathcal{S}_{AX=B}$ est un sous espace affine de $\mathbb{K}^p$ dirigé par $\ker A$.

D/ Osq $\mathcal{S}_{AX=B} \neq \emptyset$ et on fixe $X_0 \in \mathbb{K}^p$ une sol° particulière de $AX=B$

Soit $X \in \mathbb{K}^p$

OALESOn a $X \in \mathcal{S}_{AX=B} \iff AX = B$

M$^{\text{d}}$ astuce de la solution-point

$$\begin{aligned}
&\iff AX = AX_0 \\
&\iff A(X - X_0) = 0_{n,1} \\
&\iff X - X_0 \in \ker(A) \\
&\iff X \in X_0 + \ker(A) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$