Lycée CHATEAUBRIAND
Colas Bardavid

Chapitre 19

Applications linéaires

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^3 \subset \cdots$$

La tour d'inclusion croissante des noyaux itérés

Les applications linéaires sont les applications $f : E \longrightarrow F$ entre espaces vectoriels qui sont « compatibles » avec les deux opérations fondamentales de la structure d'espace vectoriel : l'addition et la scalairisation.

Autrement dit, si E et F sont deux espaces vectoriels (au-dessus de $\mathbb{R}$ par exemple), alors une application $f : E \longrightarrow F$ sera appelée application linéaire de E dans F $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

1) $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Les applications linéaires sont très simples ; évidemment, à mesure que les espaces vectoriels se complexifient, elles deviennent de plus en plus dures à appréhender. Il n'en reste pas moins qu'il s'agit de fonctions parmi les plus élémentaires.

Dans ce chapitre, nous en commençons l'étude.

Colas Bardavid

19
Applications linéaires

plan de cours et principaux résultats

I. Définition et exemples

1) Définitions

2) Exemples

3) Premières propriétés

Proposition 19.1 Ⓣ **(Critère pour être linéaire)**

$$f \text{ est linéaire} \iff \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \; f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

4) Application linéaire canoniquement associée $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 19.2
Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A *est*

$$\mathsf{u}_A : \begin{cases} \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \longmapsto AX. \end{cases}$$

On a $\mathsf{u}_A \in \mathrm{L}\big(\underline{\mathbb{K}}^p, \underline{\mathbb{K}}^n\big)$.

5) Classification de $\mathrm{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

6) Classification de $\mathrm{L}\big(\underline{\mathbb{R}}^2, \mathbb{R}\big)$ et de $\mathrm{L}\big(\underline{\mathbb{R}}^2, \underline{\mathbb{R}}^2\big)$

a) classification de $\mathrm{L}\big(\underline{\mathbb{R}}^2, \mathbb{R}\big)$
b) classification de $\mathrm{L}\big(\underline{\mathbb{R}}^2, \underline{\mathbb{R}}^2\big)$
c) généralisation

II. Opérations sur les applications linéaires

25.14
25.41
25.15

1) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Fait 19.3 Ⓣ
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors,

$$\big(\mathrm{L}(E, F), +, \widetilde{0_F}\big) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}$$

2) Composition

3) Diagrammes

4) La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathrm{L}(E)$ des endomorphismes

a) structure de $\mathbb{K}$-algèbre sur $\mathrm{L}(E)$

> **Théorème 19.4**
> *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors,*
> $$\left(\mathrm{L}(E), +, \circ, \widetilde{0_E}, \mathrm{Id}_E\right) \text{ est une } \mathbb{K}\text{-algèbre}$$
> *non commutative en général.*

b) puissances, commutation

c) polynômes d'endomorphismes

> **Théorème 19.5** Ⓣ
> *Soit $f \in \mathrm{L}(E)$ et soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors,*
> $$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

d) formules de Newton et de Bernoulli

III. Noyau et image

25.11
25.19
25.23
25.27

1) Préliminaire

a) cadre

b) tiré-en-arrière

c) poussé-en-avant

2) Noyau d'une application linéaire

a) définition

> **Définition 19.6** Ⓣ
> *Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Le* noyau de f*, noté* $\mathsf{Ker}(f)$*, est le sous-espace vectoriel de E défini par*
> $$\mathsf{Ker}(f) := \left\{x \in E \;\middle|\; f(x) = 0_E\right\}.$$

b) exemples

c) noyau et injectivité

> **Proposition 19.7** Ⓣ
> *Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Alors*
> $$f \text{ injective} \iff \mathsf{Ker}\, f = \{0_E\}.$$

d) liberté et injectivité

> **Proposition 19.8** Ⓣ
> *Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E et soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$ injective. Alors,*
> $$\big(f(x_1), \dots, f(x_p)\big) \text{ libre.}$$

> **Proposition 19.9** Ⓣ
> *Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une base de E et soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Alors,*
> $$f \text{ injective} \iff \big(f(x_1), \dots, f(x_p)\big) \text{ libre.}$$

e) Cas $\underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n$

> ♛ **Proposition 19.10** Ⓣ
> $$\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{L}(\underline{\mathbb{K}}^p, \underline{\mathbb{K}}^n) \\ p > n \end{array}\right\} \implies f \text{ ne peut pas être injective.}$$

3) Image d'une application linéaire

a) définition

Définition 19.11 Ⓣ

Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. L'image de f *est le sous-espace vectoriel de* F *défini par*

$$\mathsf{Im}(f) := \Big\{ f(x) \ ; \ x \in E \Big\}.$$

b) exemples

c) image, surjectivité et caractère générateur

Fait-Réflexe 19.12 Ⓣ

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ *une famille génératrice dans* E *et soit* $f \in \mathrm{L}(E, F)$. *Alors,*

$$\big(f(x_1), \dots, f(x_p)\big) \textit{ est génératrice dans } \mathsf{Im}(f).$$

Fait-Réflexe 19.13 Ⓣ

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ *base de* E *et soit* $f \in \mathrm{L}(E, F)$. *Alors,*

$$f \textit{ surjective } \iff \big(f(x_1), \dots, f(x_p)\big) \textit{ est génératrice dans } F.$$

d) Cas $\underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n$

♛ **Proposition 19.14**

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{L}\big(\underline{\mathbb{K}}^p, \underline{\mathbb{K}}^n\big) \\ p < n \end{array}\right\} \implies f \textit{ ne peut pas être surjective.}$$

e) Composition des images

Fait-Réflexe 19.15 Ⓣ

On se place dans le diagramme d'espaces vectoriels $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. *On a*

$$\mathsf{Im}(g \circ f) = g\big(\mathsf{Im}(f)\big).$$

IV. Isomorphismes

25.16

25.28

1) Préliminaire

2) Définition

a) isomorphismes

b) espaces isomorphes

3) Exemples

4) Automorphismes

a) définition

b) $\mathrm{GL}(E)$

c) exemples

5) Cas $\underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n$

♛ **Théorème 19.16**

Soit $f : \underline{\mathbb{K}}^n \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n$ *une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est injective* ie $\mathsf{Ker}(f) = \{0_{\underline{\mathbb{K}}^n}\}$

(ii) f *est surjective* ie $\mathsf{Im}(f) = \underline{\mathbb{K}}^n$

(iii) f *est un isomorphisme* ie $f \in \mathrm{GL}(\underline{\mathbb{K}}^n)$

V. Définition d'une application linéaire dans une base

1) Deux applications linéaires coïncidant sur une base sont égales

2) Définition d'une application linéaire dans une base

a) principe
b) exemple
c) l'application $\mathsf{CL}_{\mathscr{F}}$

> **Définition 19.17**
> *Soit E un espace vectoriel.*
> *Soit I un ensemble et soit $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteurs indexée par I.*
> *L'application linéaire $\mathsf{CL}_{\mathscr{F}} : \mathbb{K}^{(I)} \longrightarrow E$ est définie par*
>
> $$\mathsf{CL}_{\mathscr{F}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{(I)} & \longrightarrow & E \\ (\lambda_i)_{i \in I} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{(i \in I)} \lambda_i x_i. \end{array} \right.$$

d) propriétés de $\mathscr{F}$ détectables sur $\mathsf{CL}_{\mathscr{F}}$
e) l'application $\mathsf{Coords}_{\mathscr{B}}$
f) l'énoncé précis
g) démonstration

3) Définition d'une application linéaire sur une somme directe

VI. Projecteurs et symétries 25.29

1) Définition des projecteurs 25.31

25.32

> **Définition 19.18**
> *Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.*
> Le projecteur sur F parallèlement à G *est l'endomorphisme p de E défini par*
>
> $$p(x) = x_F$$
>
> *pour $x \in E$ s'écrivant $x = x_F + x_G$ (avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$).*

2) Propriétés des projecteurs

a) réflexes
b) points fixes d'un endomorphisme
c) points fixes et noyau d'un projecteur

3) Caractérisation des projecteurs

> **Proposition 19.19**
> *Soit $p \in \mathrm{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Alors,*
>
> 1) *p est un projecteur ;*
> 2) *plus précisément :*
>   a) *on a $E = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Im}(p)$;*
>   b) *p est le projecteur de E sur $\mathsf{Im}(p)$ parallèlement à $\mathsf{Ker}(p)$.*

4) Symétries

a) définition
b) propriétés
c) caractérisation

VII. Formes linéaires

1) Les formes linéaires sont nulles ou surjectives

2) Hyperplans

a) définition

Définition 19.20
Soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan de E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists \varphi \in \mathrm{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \left\{0_{\mathrm{L}(E,\mathbb{K})}\right\} : \quad H = \operatorname{Ker} \varphi.$$

b) hyperplans dans $\underline{\mathbb{K}}^n$

c) supplémentaires des hyperplans

3) Formes linéaires associées à un même hyperplan

ch 19
Applications Linéaires

$\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

(rq : c'est ok aussi si $\mathbb{K}$ corps qcq ; (ex : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[i]$, ...))

I Déf° et exemples

1) Applications linéaires (AL) et endomorphismes (endo)

Déf° : Soient E, F ev

Soit $f : E \longrightarrow F$

On dit que f est une application linéaire ssi

1) $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

· On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ens des AL de E dans F

Fait : Si f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$

Rq : • Une AL est d'une certaine façon " un morphisme d'evs "

Rappel : $f \in \mathrm{Hom}_{(Gr)}(G,H) \Rightarrow f(e_G) = e_H$

•* $f \in \mathcal{L}(E,F) \Rightarrow f \in \mathrm{Hom}_{(Gr)}\big((E,+,0_E),(F,+,0_F)\big)$

D1/ csq des rq ∎

D2/ ⊕ $f(0_E) = f(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E) = 0_{\mathbb{K}} \cdot f(0_E)$

$= 0_F$.

Prop : CNS pratique pour être une AL.

Soit $f : E \to F$ Alors

f est linéaire $\Leftrightarrow \forall x,y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

D/ AF ∎

Déf° : Soit $f : E \longrightarrow E$

Si f est linéaire, on dit que f est un endomorphisme de E

On note $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$

2) Exemples

On considère $E := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$F := \mathbb{R}$

On considère
$$\begin{aligned} I : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt \end{aligned}$$

On a ⓣ
$$\begin{aligned} I(f + \lambda g) &= \int_0^1 f(t) + \lambda g(t)\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)\,dt + \lambda \int_0^1 g(t)\,dt \\ &= I(f) + \lambda I(g) \end{aligned}$$

Dem : $\begin{aligned} \varphi_0 : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(0) \end{aligned}$ est linéaire

- $\begin{aligned} D : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$

Un peu mieux :

$$D : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto f'$$

(+) gen$\underline{{}^{\text{alnt}}}$: $D \ \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$

Bcp mieux :

$$D : \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto f'$$

$$\left((f + \lambda g)' = f' + \lambda g' \right)$$

Si $a \in \mathbb{K}$; $\text{év}_a : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$
$$P \longmapsto P(a)$$

Or a $\text{év}_a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K})$

$(D/ \ (P + \lambda Q)(a) = P(a) + \lambda Q(a))$

Rq : Collège

$y = ax$ f° linéaires

$\swarrow$ 2 gen$^{\text{alo}}$ $\searrow$ f° affines

$E \xrightarrow{f} F$
$\mathbb{K}$-ev $\quad$ $\mathbb{K}$-ev
linéaire

$\searrow$ f° de degré 2

$\searrow$ $\overbrace{\mathbb{R}[X]} \longrightarrow \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$

- $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}_2[X]$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto aX^2 + bX + c$

AF : $\varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda \varphi\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

- $D : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$

$P \longmapsto P'$

- La trace est linéaire

$tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$

- $(\cdot)^T$ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

$M \longmapsto M^T$

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$f \longmapsto (f(n))_{n \in \mathbb{N}}$

- Notons $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{cv} := \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \xrightarrow{cv} \right\}$

Alors $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire

$(u_n)_n \longmapsto \lim_{n \to \infty} u_n$

- Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre

Soit $a_0 \in \mathcal{A}$ Notons λ_{a_0} : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

$x \longmapsto a_0 x$

3

$$\rho_{a_0} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$x \longmapsto x a_0$$

Alors $\lambda_{a_0}, \rho_{a_0} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$

D/ $\oplus$ $\lambda_{a_0}(x + \theta y) = a_0(x + \theta y) = a_0 x + \theta a_0 y$

$= \lambda_{a_0}(x) + \theta \lambda_{a_0}(y)$

Rq : D'où $\varphi_{M_0} : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$
$$A \longmapsto A M_0$$

etc ...

$$\cdot\ \Delta \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$(u_n)_n \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_n$$

La suite des pas
"dérivée discrète"
C'est l'analogue séquentiel de D

Alors $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

D/ $\Delta(u + \lambda w) = (u + \lambda w) - (u \lambda w)$

$= (u_{n+1} - u_n) + \lambda (w_{n+1} - w_n)$

$= \Delta(u) - \lambda \Delta(w)$

$$\cdot\ M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto M^2$$

⚠ n'est pas linéaire

(D/ $(AB)^2 \neq A^2 + B^2$)

3) Premières propriétés

Prop-R^x : Soit $f \in L(E,F)$ Alors ⓣ

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \overset{\mathbb{K}}{\lambda_i}\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overset{\mathbb{K}}{\lambda_j}\, \overset{F}{f(x_i)}$$

D/ rec ok ■

4) AL canoniquement associée à A

Déf^o Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

L'AL canoniq^t associée à $\mathbb{K}$ (l'ALCA) à A)

est $u_A : M_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$

$$X \longmapsto AX$$

Fait f^{al} : $u_A \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

D/ Soient $X, Y \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$u_A(X + \lambda Y) = A(X+\lambda Y) = AX + \lambda AY$$

$$= u_A(X) + \lambda u_A(Y) \quad ■$$

Ex : On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

On obtient
$$u_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

Ici, $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

5) Classification de $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Alors, il existe un unique $a_0 \in \mathbb{R}$ tq $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto a_0 x$$

D/ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

ORPAS : analyse (T)

On a $\lambda 1 = \lambda$ donc $f(\lambda) = \lambda f(1)$

Synthèse : On pose $a_0 := f(1)$

On a $f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = x a_0$ ☒

6) Classification de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

a) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

<u>Prop</u> : soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une AL

Alors $\exists! (a_0, b_0) \in \mathbb{R} : \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_0 x + b_0 y$$

<u>D/</u> (T) ORPAS

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \left(f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

; On pose $a_0 := f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b_0 := f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ■

b) Une remarque

Si $i_0 \in [\![1, n]\!]$, on définit : $p_{i_0} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_{i_0}$$

<u>C'est la i_0-ième projection canonique</u> de $\mathbb{K}^n$

On a $p_{i_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

c) Classification de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Alors

$$\exists ! (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

D/ Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Linéaire

On dispose de $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire

Donc $\mathbb{R}^2 \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}^2 \xrightarrow[p_1]{} \mathbb{R}$

ie $p_1 \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ permet de "selectionner la 1ère colonne"

$\hat{C}$ f, p_1 AL, on a $p_1 \circ f$ AL.

D'après a) fixons $a, b \in \mathbb{R}$ tq

$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $(p_1 \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax+by$ → c'est la 1e coordonnée de $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

De $\hat{m}$, fixons $c, d \in \mathbb{R}$ tq $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $(p_2 \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = cx+dy$

De $\overline{m}$

Ainsi : ⓣ :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Unicité : On a $a := p_1\left(f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

etc ... ∎

c) généralisation

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Alors, $\exists! \, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad f\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n .$$

D/ AF

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

Alors, $\exists! \, (a_{1,1}, a_{2,1}, \dots a_{n,1}, \dots)$:

$$\forall \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_p\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \quad f\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n \\ a_{2,1} x_1 + \dots + a_{2,n} x_n \\ \vdots \\ x_p \, a_{p,1} + \dots + a_{p,n} x_n \end{pmatrix}$$

ex : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ Alors, f s'écrit :

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix}$$

<u>Ex :</u> Soit $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \in M_2(\mathbb{R})$

Alors (AL CA où A) est

$$U_A : \underline{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}^2}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

<u>Th de classification de $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$</u>

Soit $f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

Alors $\exists!\ A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) : f = U_A$

• ie : $\forall$e <u>AL</u> de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est , en réalité, une multiplication matricielle

• <u>Ainsi :</u> fonctions linéaires en 1^e : $y = ax$

$f \in L(\underline{\mathbb{R}^p}, \underline{\mathbb{R}^n})_{MPSI}$: $f(X) = AX$

III Operation sur les AL

1) Structure de $\mathbb{K}$-ev

Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev

On dispose d'une AL nulle entre E et F.

C'est $\widetilde{0_F} : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto 0_F \end{array}$

Fait : Soient $f, g : E \longrightarrow F$ AL

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $f + \lambda g : E \longrightarrow F$ est une AL

D/ $(f + \lambda g)(x + \mu y) = f(x + \mu y) + \lambda g(x + \mu y)$

$= (f + \lambda g)(x) + \mu (f + \lambda g)(y)$

... AF.

$\blacksquare$

Fait : $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot, \widetilde{0_F})$ est un $\mathbb{K}$-ev

2) Composition

On se donne des ev et des AL :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$\boxed{\text{Prop 1 : } \quad g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)}$$

D/

$$(g \circ f)(x + \lambda y) = g\big(f(x + \lambda y)\big)$$

$$= g\big(f(x) + \lambda f(y)\big) = g(f(x)) + \lambda g(f(y))$$

$$= g \circ f(x) + \lambda\, g \circ f(y) \quad \blacksquare$$

3) Diagramme

C'est la donnée d'ev F_i et d'AL entre les F_i

Exemple :

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & E_2 \arrow[r, "f_2"] & E_3 \\ & F_1 \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd}$$

4) La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$

a) structure et $\mathbb{K}$-algèbre.

Déjà, on vient de voir que $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev

Il nous faut un produit sur $\mathcal{L}(E)$

On prend
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (f, g) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

- Déjà, $(\mathcal{L}(E), \circ, Id_E)$ est un monoïde
- Pour que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \tilde{0}_E, Id_E)$ soit un anneau, il nous faut les distributivités.

Fait ①

$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

D/ ① $((f+g) \circ h)(x) \underset{\text{def}^{\circ} \text{ de } \text{“} \circ \text{”}}{=} (f+g)(h(x))$

$$= f(h(x)) + g(h(x)) = (f \circ h + g \circ h)(x)$$ ▨

> **Prop :** Si f est linéaire alors
> $$f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$$

8

D/ ①, Ⓣ

$$\big(f \circ (g+h)\big)(x)$$

$$\overset{\text{def}^\circ \text{ de "}\circ\text{"}}{=} f\big((g+h)(x)\big) = f\big(g(x) + h(x)\big)$$

$$\overset{f \text{ AL}}{=} f(g(x)) + f(h(x)) = (f\circ g + f\circ h)(x) \blacksquare$$

Fait :

a) $(\lambda f)\circ g = \lambda f\circ g$

b) Si f AL : $f\circ(\lambda g) = (\lambda f)\circ g = \lambda(f\circ g)$

D/ AF $\blacksquare$

Th : $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot, \tilde{0}_E, Id_E)$

ie $\mathcal{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre

Exemples de $\mathbb{K}$-algèbre :

- $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre
- $\mathbb{K}$
- $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ avec la multiplication point par point

• Plus gen$^{\text{dt}}$: $\mathcal{F}(X, \mathcal{A})$

• $M_n(\mathbb{K})$

• Si E $\mathbb{K}$-ev : $L(E)$ est une algèbre

<u>Conséquence :</u>

$L(E)$ est un "lieu mathématique" où l'on fait du calcul.

Ainsi, si $f, g, h \in L(E)$, je peux écrire

$$-5 \underset{\substack{\downarrow \\ f \circ f}}{f^2}\, h\, g^3 h + \frac{(fgfg)^2 h^3}{8} \in L(E)$$

b) Puissance et commutation

<u>Ex :</u> Si $\underbrace{f \in L(E)}_{\text{est un endo. de } E}$, $f^0 := Id_E$

$f^p := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois.}}$

• Si $f \in L(E)$, $\mathcal{C}(f) := \{ g \in L(E) \mid \underbrace{fg}_{f \circ g} = gf \}$

9

Ex : Plongeons-nous dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$

On a $\rho_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$ est un endo

$D : P \longmapsto P'$ est un endo

A-t-on $\rho_X \in \mathcal{C}(D)$? ie $\rho_X \circ D = D \circ \rho_X$?

Fait :

$$D \circ \rho_X = \mathrm{Id} + \rho_X \circ D$$

D/ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On calcule :

$$\begin{aligned}(D \circ \rho_X)(P) &= D(\rho_X(P)) \\ &= D(XP) = (XP)' \\ &= X'P + XP' = P + XP' \\ &= \mathrm{Id}(P) + (\rho_X \circ D)(P) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

c) Polynômes d'endo

Si $f \in L(E)$ (où E $\mathbb{K}$-ev)

et si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(f) \in L(E)$

Exemple : Posons $P := X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$

et $D \in L(\mathbb{R}[X])$

Alors : $P(D) = D^2 + D + Id_{\mathbb{R}[X]}$

Rappel : Si $\mathcal{A}$ $\mathbb{K}$-algèbre et si $\alpha \in \mathcal{A}$

Alors $ev_\alpha : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{A}$

$P \longmapsto P(\alpha)$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.

(déf ① : $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre deux $\mathbb{K}$-algèbres

On dit que f est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

1) $f \in L(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

i.e $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

2) $f \in Hom_{(Ann)}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

ie $\begin{cases} f(xy) = f(x) \cdot f(y) \\ f(1_A) = 1_B \end{cases}$

(AC)

Théorème : (T) Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

$$\text{év}_f(PQ) = (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

$$\text{ev}_f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

d) Newton & Bernoulli

Prop : $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tq $fg = gf$ Alors

1) $$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$$

2) $$f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k} \right) (f-g)$$

(III) Noyau et Image

1) Preliminaire

a) Cadre

On se donne

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f \ \mathrm{AL}"] \arrow[d, dash, "\mathrm{sev}"] & F \arrow[d, dash, "\mathrm{sev}"] \\ E_0 & F_0 \end{tikzcd}$$

b) Tiré en arrière

Fait : $f^{-1}(F_0)$ sev E

Rq : $f^{-1}(E_0)$ c'est $f^{\langle -1 \rangle}[E_0]$

D/ :
- On a $0_E \in f^{-1}(F_0)$ car $f(0_E) \in F_0$

  car $\begin{cases} f(0_E) = 0_F \\ F_0 \text{ sev } F \end{cases}$

- Soient $x, y \in f^{-1}(F_0)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$

  A-t-on $x + \lambda y \in f^{-1}(F_0)$?

On a

$$f(x+\lambda y) \overset{f \text{ AL}}{=} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\in F_0 \text{ car } x \in f^{-1}(F_0)} + \lambda f(y)}_{\in F_0 \text{ car } F_0 \text{ sevF}} \in F_0 \text{ de } \overline{m}$$

Donc $x+\lambda y \in f^{-1}(F_0)$ ∎

c') Poussé en avant

Fait : $f(E_0)$ sev F

D/ AF ⊕ délicat ∎

2) Noyau

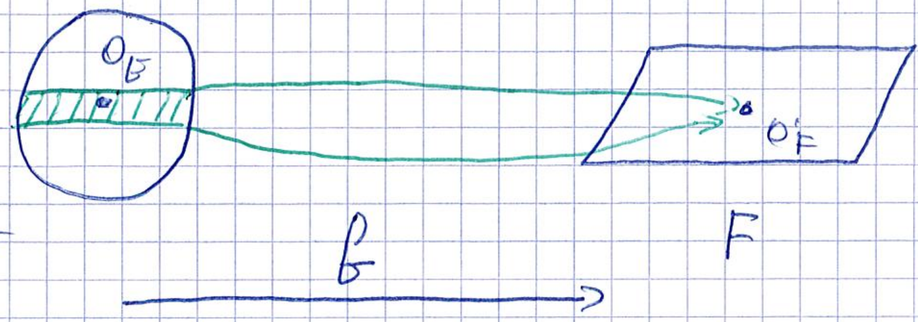
a) déf°

Déf° : Soit $f \in L(E,F)$ le noyau de f noté $\mathrm{Ker}(f)$ est le sev de E déf par :

$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_F\})$$

$$= \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

Schéma interdit



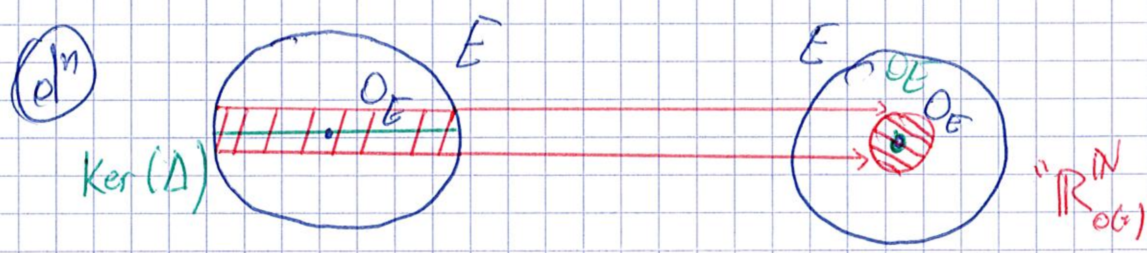
b) Exemples

- $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$(u_n)_n \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0}$$

Alors $\quad \operatorname{Ker} \Delta = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ constante} \right\}$

- On a $\quad \left\{ u \mid u \text{ piétine} \right\} = \Delta^{-1}\left(\text{"} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{o(1)} \text{"} \right)$



Rq : $\operatorname{Ker} \Delta$ est une droite ; on a

$$\operatorname{Ker} \Delta = \operatorname{Vect}\left((1)_{n \in \mathbb{N}} \right)$$

- $E := \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \longmapsto f'$

On a $\quad \operatorname{Ker} D = \operatorname{Vect}(\tilde{1}) = \left\{ f \in E \mid f \text{ cste} \right\}$

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ qu'on écrit

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}, \quad \forall k,\ a_k \in \mathbb{R}$$

Alors $\operatorname{Ker}(P(D)) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \mathcal{C}^\infty \;\middle|\; a_n f^{(n)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = \tilde{0} \right\}$

D/ Déjà, $D \in \mathcal{L}(E)$

Donc $P(D) \in \mathcal{L}(E)$

On a $P(D)(f) = a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f$

$f \in E$ ici : $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Alors $\operatorname{Ker}(P(D)) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \mathcal{C}^\infty \;\middle|\; a_n f^{(n)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = \tilde{0} \right\}$

est l'ensemble des sol° de l'ED

$$a_n f^{(n)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = 0$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

Posons $P := X^2 + aX + b$

Alors $\operatorname{Ker}(P(D)) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \mathcal{C}^\infty \;\middle|\; f'' + af' + bf = \tilde{0} \right\}$

ED linéaire d'ordre 2 (à coeff. cste)

Osq P possède 2 racines $\neq$: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

<u>Prop</u> (un bout de la résolution des EDL_2)

$$\mathrm{Ker}\, P(D) = \mathcal{S}_{y''+ay'+by=0}$$

$$= \mathrm{vect}\left(t \longmapsto e^{\alpha t}; t \longmapsto e^{\beta t}\right)$$

<u>N'écrivez pas</u>

$$\mathcal{S}_{y''+ay'+by=0} = \mathrm{vect}\left(e^{\alpha t}, e^{\beta t}\right)$$

$\in \mathbb{R}$ (-1)

(et qui est t ?)

Il y a un lien entre $\mathrm{Ker}\, P(D)$ et $Z_{\mathbb{C}}(P)$!!

- Changeons de cadre

$$E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

On considère le "shift" $S : E \longrightarrow E$
(= décalage)

déf par

$$S : E \longrightarrow E$$
$$(u_n)_{n\geq 0} \longmapsto (u_{n+1})_{n\geq 0} = (u_1, u_2, \dots)$$

13

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

Posons $P := X^2 - aX - b$

Alors qui est $\operatorname{Ker} P(s)$?

Déjà, on a $P(s) = \underbrace{S^2 - as}_{\text{vit dans } \mathcal{L}(E)} - \underbrace{b}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{Id_E}_{\in \mathcal{L}(E)}$

Soit $(u_n)_n \in E$ notée u

Alors

$$\underbrace{P(s)}_{\in \mathcal{L}(E)} \overbrace{(u)}^{\in E} = (u_{n+2} - a u_{n+1} - b u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

CCl $\operatorname{Ker} P(s) = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \right\}$

Prop

Osq $Z_{\mathbb{R}}(P) = \{\alpha, \beta\}$ avec $\alpha \neq \beta$

$\operatorname{Ker} P(s) = \operatorname{vect}\left((\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$

c) Lien entre le noyau des matrices et le noyau des AL.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

On a défini $\mathrm{Ker}(A) = \left\{ X \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; AX = 0_{n,1} \right\}$

Il correspond aux RL entre les $C_j(A)$

On a de plus $u_A : \begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{K}^n} & \longrightarrow & \underline{\mathbb{K}^n} \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$

et on a $u_A \in \mathcal{L}(\underline{\mathbb{K}^n})$

Fait : $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(u_A)$

D/ ok ▪

Corollaire : $\mathrm{Ker}(A)$ est un sev de $\underline{\mathbb{K}^n}$

Rq : si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on dispose de

$$u_A : \begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{K}^p} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \in \mathcal{L}(\underline{\mathbb{K}^p}, \underline{\mathbb{K}^n})$$

On pose $\mathrm{Ker} A := \mathrm{Ker}(u_A)$

Fait !!

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \;\middle|\; \lambda_1 C_1(A) + \cdots + \lambda_p C_p(A) = 0_{n,1} \right\}$$

d) Noyau et injectivité

Rq : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a donc (T)

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

en particulier

Donc $f \in \mathrm{Hom}_{(\text{Groupe})}((E,+,0_E),(F,+,0_F))$

et $\underset{(\text{au sens Gr})}{\mathrm{Ker}(f)} = \underset{(\text{au sens ev})}{\mathrm{Ker}(f)}$

D'où : f inj $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ Alors

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

$(R^x - R^0)$ Pour mq une AL est inj : on calcule son noyau

Ex :

On considère $\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$P \longmapsto \tilde{P}$

Alors : 1) Φ est linéaire (D/ Φ AF)

2) Calculons $\ker \Phi$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\Phi(P) = \tilde{0}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$

Donc P possède une qté de racines

Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

3) Bilan : on a mq Φ est inj.

exo

Considérons $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$
$P \longmapsto P - P'$

1) Mq $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$

2) A-t-on φ inj ?

D/ $\approx$ + (Modèle de K^c)

(⟹) Osq f inj. Calculons $\mathrm{Ker}(f)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a $f(x) = 0_F = f(0_E)$

$\hat{C}$ f inj, on a $x = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

(En effet, on a toujours $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$; c'est un sev E !)

(⟸) Osq $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Mq f est inj.

Soient $x, y \in E$ tq $f(x) = f(y)$

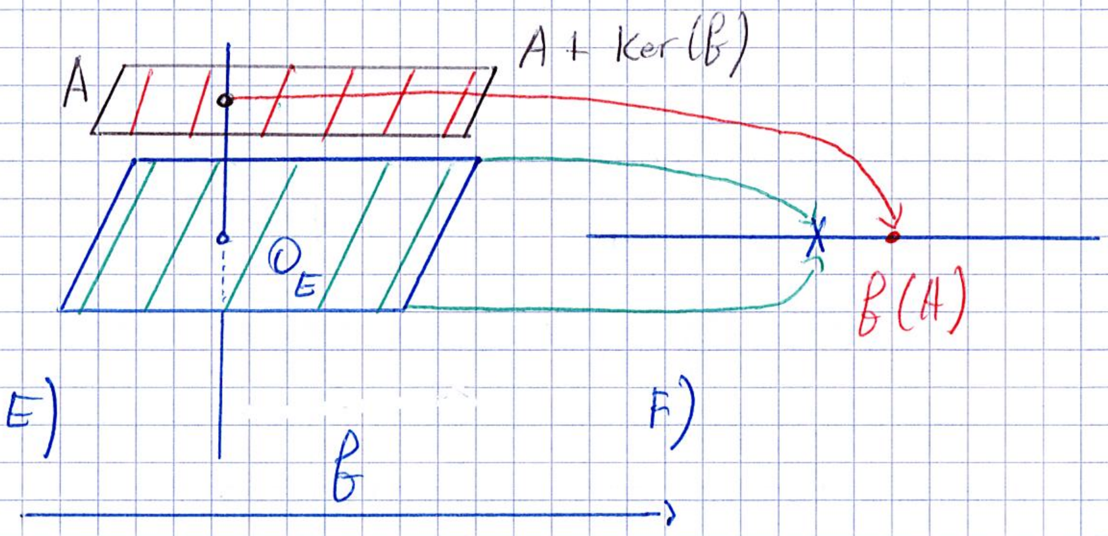
On a donc $f(x-y) = 0_F$ $\quad$ ⓘ idée

Donc $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$

$\hat{C}$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, on a $x - y = 0_E$

Donc $x = y$. Donc f inj ■

d^n



Rq : Osq $\ker f \neq \{0_E\}$

Soit $A \in E$ tq $A \notin \ker f$

On considère le sous espace affine

$A + \ker f$

Prop : $\forall M \in A + \ker(f)$, $f(M) = f(A)$

D/ Soit $M \in A + \ker f$ qu'on ~~é~~écrit

$M = A + x$ avec $x \in \ker(f)$

On a $f(M) = \ = f(A) + \underbrace{f(x)}_{=0_F}$ ■

e) liberté et injectivité

Prop : L'image d'une famille libre par une A L inj est libre

mod^P R^O

D/ Soit $f : E \to F$ AL inj.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ famille libre

Mq $(f(x_1), \dots, f(x_p)) \in F^p$ est libre

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) = 0_F$ (*)

Mq $\forall i, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$

On a d'après (*), $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = 0_F$

donc $\sum^{n} \lambda x_i \in \mathrm{Ker}(f)$ ĉ f inj, on a

$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$

ĉ $(x_1, \dots, x_p)$ libre, on a $\forall i, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$ ■

exo $f : E \longrightarrow F$ AL inj.

$E_1, \dots, E_p$ sev E en $\oplus$

Mq $f(E_1), \dots, f(E_p)$ est encore $\oplus$

Prop : Soient E, F ev

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ base de E

Soit $f \in L(E, F)$ Alors :

f injective $\Leftrightarrow (f(x_1), \dots, f(x_p))$ libre

D/ ($\Rightarrow$) ok : AC

($\Leftarrow$) Osq $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ libre

Mq f inj : calculons $\mathrm{Ker}(f)$

$(R^\times)$ Soit $x \in E$ tq $f(x) = 0_F$

idée : 1) Comment utiliser les hypothèses ?

2) OFAH les x_i !!

$\hat{C}$ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ base E $(R^\times)$, on écrit

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \quad \text{avec } \forall i, \lambda_i \in \mathbb{K}$$

$\hat{C}$ $f(x) = 0_F$, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) = 0_F$

$\hat{C}$ $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ libre, on a $\forall i, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$

Donc $x = 0_E$

Donc $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$ Donc f inj ■

f) Cas $\mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$

Prop ■

$$\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \text{ AL} \\ p > n \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ n'est pas injective}$$

D/ On munit $\mathbb{K}^p$ de sa bas canonique

$$\left\{\varepsilon_1^{[p]}, \dots \varepsilon_p^{[p]}\right\} \in \left(\mathbb{K}^p\right)^p$$

La famille $\left(f(\varepsilon_1^{[p]}), \dots, f(\varepsilon_p^{[p]})\right) \in (\mathbb{K}^n)^p$.

Or on a vu que les "grandes familles de $\mathbb{K}^n$" ne peuvent pas être libres.

Donc : $\left(f(\varepsilon_i^{[p]})\right)_{1 \leq i \leq p}$ n'est pas libre

D'après e) : f n'est pas injective ∎

3) Image d'une AL

a) déf°

Déf° : Soit $f \in L(E, F)$. L'image de f notée $\mathrm{Im}(f)$, est le sev de F déf par

$$\mathrm{Im}(f) := f(E) = \{ f(x) ; x \in E \}$$

D/ c'est un sev F d'après les préliminaires

∎

<u>Rq</u> : il y a un 6^e type d'ev : "les ev abstraits"

Soient E, F, G evs, Fixons f_0 $E \longrightarrow F$ <u>AL</u>

On définit alors $L(F,G) \longrightarrow L(E,G)$

par $\Phi_{f_0} : \begin{array}{ccc} L(F,G) & \longrightarrow & L(E,G) \\ g & \longmapsto & g \circ f_0 \end{array}$

$$\left(\text{cf} \quad E \xrightarrow[f_0]{} F \xrightarrow[g]{} G \right)$$

Vérifions que Φ_{f_0} <u>AL</u> :

- $\Phi_{f_0}(g_1 + \lambda g_2) = (g_1 + \lambda g_2) \circ f_0$

car algèbre $= \Phi_{f_0}(g_1) + \lambda \Phi_{f_0}(g_2)$

<u>CCl</u> : $\Phi_{f_0} \in L(L(F,G), L(E,G))$

- Considérons $\Phi : \begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & L(L(F,G), L(E,G)) \\ f_0 & \longmapsto & \Phi_{f_0} \end{array}$

Φ AL ?

$$\Phi(f_0 + \lambda f_1)(g) = g \circ (f_0 + \lambda f_1) = g \circ f_0 + \lambda g \circ f_1$$
$$= \Phi_{f_0}(g) + \lambda \Phi_{f_1}(g)$$
$$= (\Phi_{f_0} + \lambda \Phi_{f_1})(g)$$

Donc Φ <u>AL</u>

i.e $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F), \mathcal{L}(\mathcal{L}(F,G), \mathcal{L}(E,G)))$

- On regarde $\tilde{\ } : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

  L'image de $\tilde{\ }$ est l'ensemble des fonctions polynomiales.

- On regarde $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \longmapsto P'$

<u>Fait :</u> On a $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{R}[X]$

D/ i.e mq tout polynôme est la dérivée d'un autre polynôme.

i.e $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists Q \in \mathbb{R}[X] : Q' = P$

i.e Mq D est surj.

$P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $\quad Q := \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+1}}{a_{k+1}}$ ■

- Considérons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix} \end{array}$$

Rq : $f = u_A$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

On a par déf° $\mathrm{Im}(f)$ sev $\mathbb{R}^3$ $\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ droite plan

Notons $C_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$ $C_2 = \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$ $C_3 = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$

on a $^{(T)}$ $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\, C_1 + y\, C_2 + z\, C_3$

$\mathrm{Im}(f) = \{ x C_1 + y C_2 + z C_3 \ ; \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

Donc $\mathrm{Im}(f) =$ l'ens des CL entre les C_i
$= \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$

or, $C_2 - C_1 = C_3 - C_2$

Donc $C_2 = \dfrac{C_3 + C_1}{2}$

Donc AC^{++} $\forall$ CL entre C_1, C_2, C_3 est en particulier une CL entre C_1 et C_3

$$\boxed{\text{ccl : } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(C_1, C_3)}$$

Posons $\widetilde{C_3} := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, on a $C_3 = 3\widetilde{C_3}$

Donc AC $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(C_1, \widetilde{C_3}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$

Rq: On ne peut pas reduire plus car $C_1, \widetilde{C_3}$ non colinéaires.

Considérons

$D : \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Que peut-on dire de $\mathrm{Im}(D)$?

① Thm fdl de l'analyse :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est } \mathcal{C}^0 \Rightarrow \begin{cases} F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt \\ \text{est dérivable et } F' = f \end{cases}$$

d'où $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \underset{sev}{\subset} \mathrm{Im}(D)$

② $\exists\, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable tq g' n'est pas $\mathcal{C}^0$

(ie $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

Donc $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subsetneq \mathrm{Im}(D)$

c) Image surjectivité et caractère générateur.

Rq : • $\mathrm{Re}(\cdot) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est-elle linéaire ?

- Elle est additive : $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$
- Mais pas scalairisable : $\lambda = i$ $z := 1$,

$$\mathrm{Re}(i) = 0, \quad i\,\mathrm{Re}(1) = i$$

Fait : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$.

On dit que $\mathrm{Re}(\cdot)$ est $\mathbb{R}$-linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

On peut noter : $\mathrm{Re}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$

$\mathrm{Re}(\cdot) \notin \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$

Fait f^{al} : Soit $f \in L(E,F)$

f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$

Prop : Soit E, F ev

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille génératrice de E.

Soit $f \in L(E,F)$. Alors on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_p))$$

D/ AF^{++}

Fait R^x : Dans les mêmes conditions, $(f(u_1), \dots, f(u_p))$ est génératrice dans $\mathrm{Im}(f)$.

Fait-R^x : E, F evs, $(u_1, \dots, u_p)$ base de E, $f : E \to F$ AL

Alors : f surj $\Leftrightarrow (f(u_1), \dots, f(u_p))$ génératrice dans F.

D/ AF^{+as}

d) Cas des $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$

Prop : $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ et osq $p < n$

$\Rightarrow f$ n'est pas surjective

D/ On regarde $(\varepsilon_1^{[p]}, \dots, \varepsilon_p^{[p]}) \in (\mathbb{K}^p)^p$

La base canonique de $\mathbb{K}^p$

La famille image $\left(f(\varepsilon_i^{[p]})\right)_{i \in [\![1,p]\!]} \in (\mathbb{K}^n)$

est une famille "de petite taille" car $p < n$

On sait ■ qu'elle n'est pas génératrice

Donc AC : f n'est pas surj. ■

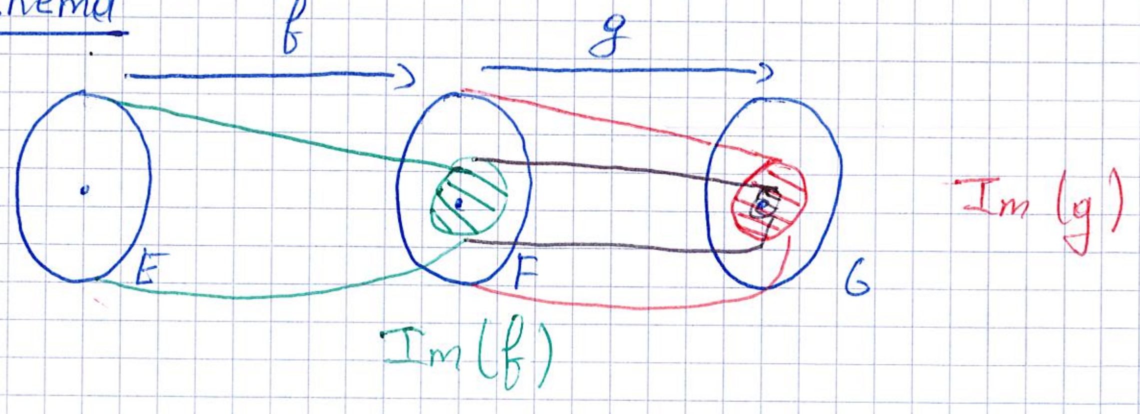
e) Composition des images

On se place dans le diagramme d'ev

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Fait - R^x : $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$

Schéma



Fait R^x 1) $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$

2) $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right)$

D/ 1) Mq $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset g(\mathrm{Im}(f))$

Soit $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ $R^x R^\oplus$ qu'on écrit

$z = (g \circ f)(x)$ avec $x \in E$

On a $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$

Donc $g(f(x)) \in g(\mathrm{Im}(f))$

ie $z \in g(\mathrm{Im}(f))$

idem pour $\supseteq$

2) On a $\mathrm{Im}\left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right) = g|_{\mathrm{Im}(f)}(\mathrm{Im}(f))$

puisque $g|_{\mathrm{Im}(f)} : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow G$

$\hat{C}$ $g|_{\mathrm{Im}(f)}(\mathrm{Im}(f)) = g(\mathrm{Im}(f))$,

on conclut ∎

IV Isomorphismes

1) Préliminaires

Prop ⓣ : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ Alors :

$$f \text{ bijective} \implies f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$$

D/ B°

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ x \ \ x' & & y \ \ y' \\ E & \xleftarrow[f^{-1}]{} & F \end{array}$$

Soient $y, y' \in F$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Mq

$$f^{-1}(y + \lambda y') = f^{-1}(y) + \lambda f^{-1}(y')$$

Posons $x := f^{-1}(y)$ et $x' := f^{-1}(y')$

On a $f(x + \lambda x') = f(x) + \lambda f(x')$

or $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$ et $f(x') = y'$

Donc $f(x + \lambda x') = y + \lambda y'$ On applique f^{-1}

On obtient $x + \lambda x' = f^{-1}(y + \lambda y')$

Or $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$

D'où le resultat ■

2) Définition

a) isomorphismes.

Déf° : Soit $f : E \longrightarrow F$ AL. On dit que f est un isomorphisme $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ f est bijective.

On a alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui est bijective, et linéaire.

On peut noter $E \xrightarrow[f]{\sim} F$

On note aussi # f iso

b) Espaces isomorphes

Déf° : Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev
On dit que E est isomorphe à F et on note $E \simeq F$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists f \in \mathcal{L}(E,F) : f$ iso

Rq : La relation "$\simeq$" est une relation d'équivalence.

Rq : L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas, de même,
L'ensemble de tous les $\mathbb{K}$-ev n'existe pas.

Cpt :

L'ens de tous les ens. n'existe pas.

ORPA et osq il existe et on note Ω l'ensemble de tous les ensembles.

Rq : On a donc $\Omega \in \Omega$

(En python c'est possible : P = []
P.append(P)

print(P in P)
→ True

puis P.append(1)

$P = [\underbrace{[[\ldots, 1], 1]}_{P}, 1]$)

$\mathcal{P}(\Omega) \in \Omega$

• On a aussi : $\forall x \in \mathcal{P}(\Omega), \quad x \in \Omega$

le type de x ? donc un ensemble

donc $\mathcal{P}(\Omega) \subset \Omega$

Donc $\mathcal{P}(\Omega) \preccurlyeq \Omega$: c'est absurde (cf DL 9)

Considérons $A := \{\underbrace{X \in \Omega}_{} \mid X \notin X\}$

A est un ensemble

ici j'utilise le fait que Ω est un ensemble

A-t-on $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$?

Les deux réponses mènent à une absurdité ■

On dit que Ω est une collection (ou une classe)

3) Exemples

- Déjà $\mathbb{K}^n \simeq M_{n,1}(\mathbb{K})$ i.e $\mathbb{K}^n \simeq \mathbb{K}^n$

D/ On prend $\mathbb{K}^n \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est un AL (ok) et c'est bij (ok)

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Prop : $M_{n,p}(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

D/ Ocsd

$$\Phi : \begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ A & \longmapsto & u_A \end{array}$$

1°) Φ est linéaire

Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$

On a

$$\underbrace{\Phi(A+\lambda B)}_{AL : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n}(X) = u_{A+\lambda B}(X) = (A+\lambda B)(X)$$

$$= AX + \lambda BX = u_A(X) + \lambda u_B(X)$$

$$= (u_A + \lambda u_B)(X)$$

$$= \left(\Phi(A) + \lambda\, \Phi(B)\right)$$

Ceci étant V pour $\forall X$, on a

$$\Phi(A + \lambda B) = \Phi(A) + \lambda\, \Phi(B)$$

<u>CCl :</u> Φ est linéaire

ie* : $ALCA \in \mathcal{L}\left(M_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)\right)$

2°) Mq $\Phi(\cdot)$ est inj.

R^x – Je calcule $\boxed{\ker \Phi}$ (Type : <u>Sev</u> $M_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soit $A \in \ker \Phi$

Donc on a $u_A = \tilde{0}$ (ie $0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)}$ ou $\widetilde{0_{n,1}}$)

Donc $\forall X \in \mathbb{K}^p$, $AX = 0_{n,1}$

<u>rq :</u> On a $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ tq

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{n,1}$$

Soit $X_0 \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ non nul.

On a donc $AX_0 = 0_{n,1}$ ĉ $X_0 \neq 0_{p,1}$, on a forcément $A = 0_{n,p}$

h !

<u>Ctrexemple :</u> $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Reprenons : On a $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{n,1}$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$, on a

$$C_j(A) = A \cdot \mathcal{E}_j^{[p]} = 0_{n,1}$$

Donc ttes les colonnes de A sont nulles

Donc $\boxed{A = 0_{n,p}}$

Donc $\ker \Phi = \{0_{n,p}\}$

Donc Φ est injective

Mq Φ est surjective

ie mq $\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n),\ \exists A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : f = u_A$

On l'a déjà vu. (I 6) c)

CCl : Φ est une bijection linéaire entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ ∎

4) Automorphismes

a) déf°

Auto = endo + iso

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un automorphisme (de E) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ f est bijectif.

b) $GL(E)$

Déf° : On pose

$$GL(E) := \left\{ f : E \to E \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ AL} \\ f \text{ auto morphisme} \end{array} \right\}$$

C'est le groupe linéaire de E

Fait : $(GL(E), \circ, Id_E)$ est un groupe

D/ C'est le groupe des inversibles de l'anneau $(L(E), +, \circ, 0_{L(E)}, Id_E)$ ■

Rq : ie $f, g \in GL(E) \Rightarrow fg \in GL(E)$

⚠ $f \circ g$

$\Rightarrow f^{-1} \in GL(E)$

Rq : Il est non abélien en génal

exo $E \simeq F$ (en tant qu'ev) $\Rightarrow GL(E) \simeq GL(F)$ (en tant que groupe)

⚠ Soient $f, g \in L(E)$; ie Ocsd $E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E$

En gal $g \circ f = Id_E \not\Rightarrow f \circ g = Id_E$

Fait - $f^{d'}$:

Soient E, F ev et soit $f : E \longrightarrow F$ AL

Alors

$$f \text{ iso} \iff \exists g \in L(F,E) : \begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_E \end{cases}$$

D/ $(\Rightarrow)$ Osq f iso ; f^{-1} existe ; de ⊕,

$f^{-1} \in L(F,E)$

Poser $g := f^{-1}$ suffit

$(\Leftarrow)$ (T) Fixons $g \in L(F,E)$ tq $\begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$

Ainsi f admet un rcpq, ainsi f est bij ; donc

f iso ■

Ctrex :

On se place sur $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Ocsd $\quad S : E \longrightarrow E \qquad (u_0, u_1, u_2 \cdots)$

$\qquad (u_n)_n \longmapsto (u_{n+1})_n \qquad (u_1, u_2, \cdots)$

On pose : $t : E \longrightarrow E$

$\qquad (w_n)_n \longmapsto (1, w_0, w_1, w_2, \cdots)$

⚠ t n'est pas linéaire !

D/ $t(0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}) = (1, 0, 0, 0 \cdots)$

Or f AL $\Rightarrow f(0_E) = 0_F$ ■

On pose plutôt $T : E \longrightarrow E$
$$(w_n)_n \longmapsto (0, w_0, w_1, \dots)$$

Soit $v, w \in E$, On calcule
$$s \circ T(w) = w$$
$$T \circ s(v) = (0, v_1, v_2, \dots)$$

Donc $s \circ T = Id_E$ mais $s \circ T \neq Id_E$ ∎

c) exemples

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ Alors
$$\underset{\underset{L(\mathbb{K}^n)}{\cap}}{u_A} \in GL(\mathbb{K}^n) \iff A \in GL_n(\mathbb{K})$$

(R) $GL(E)$ est le gp des automorphismes de E

Lemme : Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

On a donc
- $AB \in M_{n,q}(\mathbb{K})$
- $\mathbb{K}^q \xrightarrow{u_B} \mathbb{K}^p \xrightarrow{u_A} \mathbb{K}^n$
- $\mathbb{K}^q \xrightarrow{u_{AB}} \mathbb{K}^n$

Alors on a : $u_{AB} = u_A \circ u_B$

D/ Soit $X \in \mathbb{K}^q$

On a $u_{AB}(X) = AB \cdot X = A(\underbrace{BX}_{u_B(X)})$

$= A \cdot u_B(X) \underset{AC}{=} u_A(u_B(X)) = (u_A \circ u_B)(X)$

Ceci étant vrai pour $\forall X$, on a $u_{AB} = u_A \circ u_B$ ∎

Fait : $u_{I_n} = Id_{\mathbb{K}^n}$

D/ AF ~~Θ~~

D/ Mq A inv $\Rightarrow$ u_A inv

Osq A inv

On a $AA^{-1} = I_n$ (Or " $u_{AB} = u_A \circ u_B$ ")

Donc $u_A \circ u_{A^{-1}} = u_{I_n} = Id_{\mathbb{K}^n}$

De $\overline{m}$: $u_{A^{-1}} \circ u_A = u_{Id_{\mathbb{K}^n}}$ (AF)

ccl : u_A est inversible

et on a mq $(u_A)^{-1} = u_{A^{-1}}$ ∎ ($\Leftarrow$)

Mq u_A inv $\Rightarrow$ A inv

Osq u_A inv ie osq $u_A \in GL(\mathbb{K}^n)$

Fixons donc $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tq $\begin{cases} g \circ u_A = Id \\ u_A \circ g = Id \end{cases}$

idée

Or $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \\ M & \longmapsto & u_M \end{array}$ est surj.

Fixons donc $B \in M_n(\mathbb{K})$ tq $g = u_B$

On a ainsi $\begin{cases} u_B \circ u_A = Id \\ u_A \circ u_B = Id \end{cases}$

Ie (par "fonctorialité") on a

$$\begin{cases} u_{BA} = u_{I_n} \\ u_{AB} = u_{I_n} \end{cases}$$

Or : $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \\ M & \longmapsto & u_M \end{array}$ est inj.

Donc $AB = I_n$ et $BA = I_n$

Donc A inversible

Rq ■ : On a aussi

$$U_A \text{ inv} \Rightarrow U_A \text{ inj} \Rightarrow \ker(U_A) = \{0_{n,1}\}$$

$$\Rightarrow \ker(A) = \{0_{n,1}\} \underset{\text{CNI}}{\Longrightarrow} A \text{ inv}$$ ■

5) Cas $\underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n$

Prop ■ : $\underline{\mathbb{K}}^n \simeq \underline{\mathbb{K}}^p \Rightarrow n = p$

D/ Soit $f : \underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n$ iso

Ĉ f inj, on a $p \leq n$; Ĉ f surj, on a $p \geq n$ ■

Thm ■

Soit $f : \underline{\mathbb{K}}^n \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n$ $\underline{AL}$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f injective ie $\ker(f) = \{0_{\underline{\mathbb{K}}^n}\}$

(ii) f surjective ie $\mathrm{Im}(f) = \underline{\mathbb{K}}^n$

(iii) f bij ie $f \in GL(\underline{\mathbb{K}}^n)$

D/

D/ Considérons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$

Rappel : Soit $(X_1, \dots, X_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$ une famille "de bonne taille" qu'on note $\mathcal{F}$

On a $\mathcal{F}$ libre $\iff$ $\mathcal{F}$ génératrice dans $\mathbb{K}^n$

$\iff$ $\mathcal{F}$ base $\mathbb{K}^n$

On f inj $\iff (f(\varepsilon_i))_i$ libre

$\iff (f(\varepsilon_i))_i$ géné dans $\mathbb{K}^n$

$\iff f$ surj

Rq : Soit $f : E \longrightarrow F$ AL

On a
$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\} \iff f \text{ inj} \\ \underbrace{\mathrm{Ker}\, f}_{\text{sev } E} = E \implies f \text{ nulle} \end{cases}$$

ie $f = 0_{L(E,F)}$

Évidemment : $0_{L(E,F)} : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto 0_F \end{array}$

Et $\underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{\text{sev } F} = \{0\} \iff f$ nulle

$\mathrm{Im}(f) = F \iff f$ surjective

V Déf° d'une AL dans une base

1) Deux AL coïncidant sur une base sont égales

Soient E, F ev. On fixe $(x_1, \dots, x_p)$ base E.

<u>Prop :</u> Soient $f, g : E \longrightarrow F$ <u>AL</u>

Alors :

$$\left(\forall i \, [\![1, p]\!], \; f(x_i) = g(x_i)\right) \Rightarrow f = g$$

<u>D/</u> Osq $\forall i \in [\![1, p]\!], \; f(x_i) = g(x_i)$ Mq $f = g$

Soit $x \in E$

Rx Je décompose x dans la base $(x_1, \dots, x_p)$

en écrivant $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ avec $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{K}$

On a
$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{f(x_i)}_{= g(x_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g(x_i) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

Rq : c'est encore vrai avec une base qcq $(e_i)_{i \in I}$

2) Définition d'une AL dans une base !!$^\infty$

a) Principe

Soit E ev muni d'une base $(x_1, \dots, x_p)$

Soit F un autre ev

On veut définir $f : E \longrightarrow F$ AL

Normalement, il faudrait donner une f^{le} $f(x) = \dots$

Mais, en fait, il suffit de donner, de prescrire, les images des x_i par f.
Cela permet de définir entièrement f.

De ⊕, q^d on fait ceci, on a aucune restriction sur les images $f(x_i)$ qu'on peut choisir.

b) exemple et modèle de rédaction

On pose $E : \mathbb{R}_3[X]$ muni de la base $(1, X, X^2, X^3)$

On prend $F := \mathbb{R}[X]$

On veut construire une AL $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$

(Modèle de R°) " Considérons $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ l'unique application linéaire définie par

$$f(1) = X^5 - 8X^4 + 9$$
$$f(X) = X^{10} - X^8 + X^3 + 5$$
$$f(X^2) = 12X^{12} + 12$$
$$f(X^3) = X^{10^5} - 1$$

Ex : On a alors

$$f(5 + 8X - X^2 + 30X^3)$$
$$= 5f(1) + 8f(X) - f(X^2) + 30f(X^3)$$
$$= 5(X^5 - 8X^4 + 9) + 8(X^{10} - X^8 + X^3 + 5) - (12X^{12} + 12)$$
$$+ 30(X^{10^5} - 1)$$

D/ du fait qu'il existe une telle AL f /

On pose $f(a + bX + cX^2 + dX^3) = a(X^5 - 8X^4 + 9)$
$$= a(X^5 - 8X^4 + 9) + b(X^{10} - X^8 + X^3 + 5) + c(12X^{12} + 12)$$
$$+ d(X^{10000} - 1)$$

Puis on vérifie que f est AL ■

En g^{al}, ça marche pareil.

On souhaite construire $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, ..., $f(x_p) = y_p$

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i \end{array} \quad \text{où } x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

(les λ_i sont les coordonnées de X dans la base $(X_1, \dots, X_p)$)

C'est ok. C'est une semi-formalisation complètement acceptable.

Donnons une version plus formelle de cette définition

c) L'Application $CL_{\mathcal{F}}$

Soit E ev

Soit $\mathcal{F} \in E^p$ une famille de E à p éléments

qu'on écrit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ avec $\forall i,\ x_i \in E$

<u>Déf°</u> : On pose

$$CL_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array}$$

Fait : $CL_{\mathcal{T}_P}$ est linéaire

D/ Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p), (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$

et Soit $\theta \in \mathbb{K}$. On a

$$CL_{\mathcal{T}_P}\Big(\underbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) + \theta(\mu_1, \dots, \mu_p)}\Big)$$

$$= (\lambda_1 + \theta\mu_1, \dots, \lambda_p + \theta\mu_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \theta\mu_i)x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \theta\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i$$

$$= CL_{\mathcal{T}_P}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) + \theta\, CL(\mu_1, \dots, \mu_p)$$ ∎

Donc $CL_{\mathcal{T}_P}$: AL

d) propriétés de $\mathcal{T}_P$

⚠ $CL_{\mathcal{T}_P}(0_{\mathbb{K}^p}) = 0_E$ c'est évident et tjrs vrai

puisque $CL_{\mathcal{T}_P}$ AL

Prop : 1) $CL_{\mathcal{T}_P}$ inj $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_P$ libre

2) $CL_{\mathcal{T}_P}$ surj $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_P$ génératrice dans E

3) $CL_{\mathcal{T}_P}$ bij $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_P$ base E

D/ 9

C'est juste de la reformulation

Déjà, on a 1) et 2) $\Longrightarrow$ 3

- 1) $\Longrightarrow$ Osq $CL_{\mathcal{F}_p}$ inj mq $\mathcal{F}_p$ libre

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$

Mq $\forall i, \lambda_i = 0$

On a $CL_{\mathcal{F}_p}(\lambda_1, \dots \lambda_p) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$ $(*)$

Or $CL_{\mathcal{F}_p}$ inj. Donc $\ker(CL_{\mathcal{F}_p}) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$

Or $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \ker(CL_{\mathcal{F}_p})$ d'après $(*)$

Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0)$ ie

$\forall i, \lambda_i = 0$

Donc $\mathcal{F}_p$ libre.

$\Longleftarrow$ Osq $\mathcal{F}_p$ libre

Mq $CL_{\mathcal{F}_p}$ inj ie R Mq $\ker(CL_{\mathcal{F}_p}) = \{0_E\}$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \ker(CL_{\mathcal{F}_p})$

On a $CL_{\mathcal{F}_p}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = 0_E$

Ie, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$ Ou $(x_1, \dots, x_p)$ libre

Donc $\forall i, \lambda_i = 0$ Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = 0_{\mathbb{K}^p}$

Donc $\ker(CL_{\mathcal{T}p}) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$ Donc $CL_{\mathcal{T}p}$ inj

2) Pareil

<u>Rq:</u> Notons $e_i := (0, \dots, 0, \overset{\text{en } i\text{-ème position}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^p$

On a alors $CL_{\mathcal{T}p}(e_{i_0}) = x_{i_0}$

De ⊕, on sait q $(e_1, \dots, e_p) \in (\mathbb{K}^p)^p$

est une base de $\mathbb{K}^p$: c'est la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Or, on a vu que une AL est surj $\Leftrightarrow$ l'image d'une base est génératrice. (III. 3) c)

Ici, on a $CL_{\mathcal{T}p}$ surj $\Leftrightarrow \left(CL_{\mathcal{T}p}(e_1), \dots, CL_{\mathcal{T}p}(e_p)\right)$

génératrice dans E

$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_p)$ génératrice dans E.

■

e) L'application $\text{Coords}_{\mathcal{B}}$

<u>Déf°</u> : Soit $\mathcal{B} \in E^p$ une base de E

On sait que $CL_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^p \longrightarrow E$ est un iso

On pose $\text{Coords}_{\mathcal{B}} := CL_{\mathcal{B}}^{-1} : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$

<u>Rq</u> : Si $x \in E$ alors $\text{Coords}_{\mathcal{B}}(x)$ est la liste des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

f) L'énoncé précis (du principe de déf° des AL par prescription de l'image d'une base)

<u>Prop</u> : Soient E, F ev

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une base de E

Alors :

1) $\forall (y_1, \dots, y_p) \in F^p, \exists ! f \in \mathcal{L}(E,F) : \forall i \in [\![1,p]\!],$

$f(x_i) = y_i$

2) L'AL $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F^p \\ f & \longmapsto & (f(x_1), \dots, f(x_p)) \end{array}$ est un iso.

<u>Rq</u> : • φ est linéaire $\underline{f}$

• On a $1) \iff 2)$ $\underline{f}$

g) Demonstration

Mq 1) Soit $(y_1, \dots, y_p) \in F^p$. On note

$$\mathcal{F} := (y_1, \dots, y_p) \in F^p$$

et on note $\mathcal{B} := (x_1, \dots, x_p) \in E^p$

On a

$$CL_{\mathcal{F}} : \mathbb{K}^p \longrightarrow F$$

$$\text{Coords}_{\mathcal{B}} : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$$

On pose $f := CL_{\mathcal{F}} \circ \text{Coords}_{\mathcal{B}} : E \longrightarrow F$

Soit $i_0 \in [\![1, p]\!]$

Calculons $f(x_{i_0})$

Déjà, on a $\text{Coords}_{\mathcal{B}}(x_{i_0}) = (0, \dots, 0, \overset{\text{indice } i_0}{1}, 0, \dots, 0)$

Et
$$\begin{aligned} CL_{\mathcal{F}}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) &= 0y_1 + 0y_2 + \dots \\ &\quad + 0y_{i_0-1} + y_{i_0} + 0y_{i_0+1} \\ &\quad \dots + 0y_p \\ &= y_{i_0} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Rq : Ceci se généralise sans problème aux bases qcq.

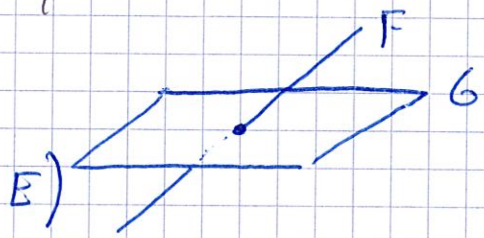
Rq : L'unicité découle de IV.1)

3) Definition d'une AL sur une somme directe.

a) Cas de 2 espaces.

Soit E ev qu'on écrit $E = F \oplus G$

d^n



Soit H un autre ev

On veut définir $f : E \longrightarrow H$

Principe : pour définir f, il suffit de | définir / imposer

sa restriction à F et sa restriction à G.

Modèle de R°

"Considérons $f : E \longrightarrow H$ l'unique application linéaire telle que : $f|_F : F \longrightarrow H$

soit ... et telle que $f|_G : G \longrightarrow H$ tq ...

b) Cas de p-espaces.

On écrit $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Pour définir $f : E \longrightarrow H$ il suffit de définir sa restriction à chacun des E_i

c) énoncés précis

Prop 1 : ⊛ $E = F \oplus G$

1) On a $\forall f \in \mathcal{L}(F,H), \forall g \in \mathcal{L}(G,H), \exists! \varphi \in \mathcal{L}(E,H)$:

$$\begin{cases} \varphi|_F = f \\ \varphi|_G = g \end{cases}$$

2) L'AL

$$\Phi : \mathcal{L}(E,H) \longrightarrow \mathcal{L}(F,H) \times \mathcal{L}(G,H)$$
$$\varphi \longmapsto (\varphi|_F, \varphi|_G)$$

est un iso.

En particulier, on a :

Prop 2 : 1) Deux AL qui coïncident sur chacun des facteurs d'une somme directe pleine sont égales.

2) Soient $f, g : E \longrightarrow H$

Alors : $\left.\begin{array}{l} f|_F = g|_F \\ f|_G = g|_G \end{array}\right\} \Rightarrow f = g$

Prop 3 !!

Soit E ev et soient F, G sev E

Considerons $\Phi : F \times G \longrightarrow E$
$(x_F, x_G) \longmapsto x_F + x_G$

1) $\mathrm{Im}(\Phi) = F + G$

2) $\mathrm{Ker}(\Phi) = F \cap G$: c'est Faux

3) Φ inj $\Leftrightarrow$ F et G sont en $\oplus$

4) Φ surj $\Leftrightarrow$ $F + G = E$

5) Φ iso $\Leftrightarrow$ $E = F \oplus G$

D/ 1) ok c'est la déf° de $F+G$.

2) Mq $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset F \cap G$

Soit $(x_F, x_G) \in \mathrm{Ker}\,\Phi$ On a x_F

3) Mq Φ inj $\Leftrightarrow$ F et G en $\oplus$

Osq φ inj mq F et G sont en $\oplus$

(R*) Je calcule $F \cap G$

Soit $x \in F \cap G$. Alors on a

$$(x, -x) \in F \times G$$ (R)

On a $\Phi(x, -x) = x + (-x) = 0_E$

Donc $\Phi(x, -x) = \Phi(0_E, 0_E)$

Or Φ inj donc $(x, -x) = (0_E, 0_E)$

Donc $x = 0_E$

Donc $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en $\oplus$

($\Leftarrow$) Osq F et G sont en $\oplus$ mq Φ inj

(R*) Calculons $\ker \Phi$

Soit $x_F, x_G \in F \times G$ tq

$\Phi(x_F, x_G) = x_F + x_G = 0_E$

Ainsi, on a $x_F = -x_G$ Donc $x_F \in G$ Donc $x_F \in F \cap G$.

Donc $x_F = 0_E$ Donc $x_G = 0_F$

Donc $(x_F, x_G) = (0_F, 0_F)$

Donc $\ker \Phi = \{0_E, 0_E\}$

Donc φ inj $\boxtimes$

4) On a $\operatorname{Im}\Phi = F + G$

C Φ surj $\Rightarrow \operatorname{Im}(\Phi) = E$, on conclut ■ 4)

5) ok ■

<u>Rq</u> : Dire $\operatorname{Ker}\Phi = F \cap G$ est F, c'est non homogène car $\operatorname{Ker}\Phi$ sev $F \times G$ et $F \cap G$ sev E

On a en fait $\operatorname{Ker}\Phi = \{(x, -x) ; x \in F \cap G\}$

On a un isomorphisme entre $F \cap G$ et $\operatorname{Ker}\Phi$; c'est

$$\psi : \begin{array}{ccc} F \cap G & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\Phi \\ x & \longmapsto & (x, -x) \end{array}$$

<u>D/</u> AF/exo

<u>Bilan</u>

$$\begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & E \\ (x_F, x_G) & \longmapsto & x_F + x_G \end{array} \text{ inj} \iff F \text{ et } G \text{ sont en } \oplus$$

$$\text{iso} \iff E = F \oplus G$$

<u>Rq*</u> : Soient $F_1, \dots, F_p$ sev E

Ocsd

$$\varphi : \begin{array}{ccc} F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots\dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + x_2 + \dots + x_p \end{array}$$

Alors 1) φ inj $\iff$ les F_i sont en $\oplus$

2) φ iso $\iff E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

D/ AF/exo ■

D/ Mq $\forall f : F \longrightarrow H$, $\forall g : G \longrightarrow H$ AL,

$\exists !\ \varphi : E \longrightarrow H$: $\varphi|_F = f$ et $\varphi|_G = g$

Soit $f : F \longrightarrow H$ et soit $g : G \longrightarrow H$ AL

Unicité $\overset{?}{\Downarrow}$ Soient $\varphi, \psi : E \longrightarrow H$ AL tq (...)

Mq $\varphi = \psi$. Soit $x \in E$ ĉ $E = F + G$, on

écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$, $x_G \in G$.

On a $\varphi(x) = \varphi(x_F) + \varphi(x_G)$

$\underset{AL}{=} \varphi|_F(x_F) + \varphi|_G(x_G)$

$= f(x_F) + g(x_G)$

$= \psi|_F(x_F) + \psi|_G(x_G) = \psi(x_F) + \psi(x_G)$

$= \psi(x_F + x_G) = \psi(x)$ unicité.

Existence : 1e version semi-formalisée

On pose $\varphi : E \longrightarrow H$

$x \longmapsto f(x_F) + g(x_G)$ où

$x = x_F + x_G$ est l'unique décomposition de x dans $F \oplus G$

2^e version ⊕ formalisée

Notons $S : E \times G \longrightarrow E$

$(x_F, x_G) \longmapsto x_F + x_G$

Ĉ $E = F \oplus G$, on sait que $S : F \times G \xrightarrow{\sim} E$

On a $E \xrightarrow{S^{-1}} F \times G$

On a aussi $F \times G \xrightarrow{t} H$

$(x_F, x_G) \longmapsto f(x_F) + g(x_G)$

AF : $t \in L(F \times G, H)$

On pose $\varphi := t \circ S^{-1} \in L(E, H)$

~~AF~~ exo mq $\varphi|_F = f$ et $\varphi|_G = g$ ∎

VI Projecteurs et symétries

1) Déf° des projecteurs.

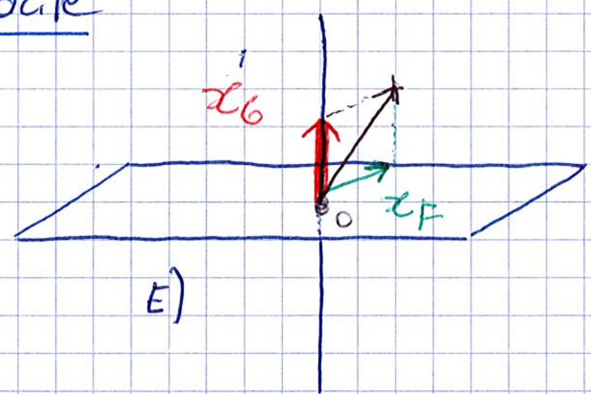
Soit E ev. Ocsd une décomposition $E = F \oplus G$ avec F, G sev E

Déf° : Le projecteur (de E) sur F parallèlement à G est l'endo p de E def par

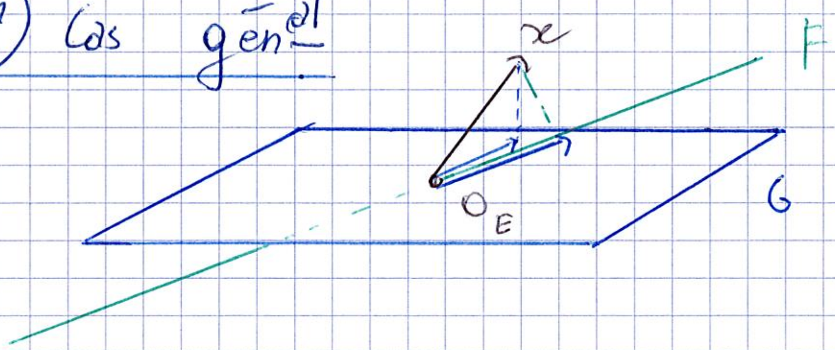
$$p : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F \end{array} \quad \text{où } x = x_F + x_G \text{ est}$$

l'unique décomp° de x dans $F \oplus G$

Dessin Cas facile



Dessin Cas génér(a)l



Rq : C'est l'unique endo $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tq

$\forall x \in F,\ \varphi(x) = x$ et $\forall x \in G,\ \varphi(x) = 0$

" $\varphi|_F = Id_F$ " $\varphi|_G = 0_{\mathcal{L}(G,E)}$

2) Propriétés des projecteurs

Cadre : $E = F \oplus G$

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur de E sur F parallèlement à G.

a) reflexes

Fait ⊕ : $x \in F \Rightarrow p(x) = x$

D/ Soit $x \in F$, la décomposition de x dans $F \oplus G$ est $x = x + 0_G$

donc $p(x) = x$ ∎

Fait ⊕ $x \in G \Rightarrow p(x) = 0_E$

D/ De m̂ ∎

b) points fixes d'un endo.

Notation : Soit $f \in L(E)$ On notera #

$$\mathrm{PtsFixes}(f) := \{x \in E \mid f(x) = x\}$$

Fait f^{al}

$$\mathrm{PtsFixes}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$$

D/ (T) $f(x) = x \iff (f - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$ ■

c) points fixe et noyau des projecteurs.

(d^n)

Déjà, le a) s'énonce : $F \subset \mathrm{PtsFixes}(p)$
$G \subset \mathrm{Ker}(p)$

Prop : On a	1)	$\mathrm{PtsFixes}(p) = F$
	2)	$\mathrm{Ker}(p) = G$

D/ 1) Mq $\subset$: Soit $x \in \mathrm{PtsFixes}(p)$.

(R^x) On écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$
$x_G \in G$

On a par déf° : $p(x) = x_F$

et $p(x) = x$

Donc $x = x_F$; donc $x \in F$ ■ 1)

2) Ⓣ Soit $x \in \ker(p)$ qu'on écrit Ⓣ $x = x_F + x_G$

On a $p(x) = x_F = 0_E$

Donc $x_F = 0_E$ et $x = x_G \in G$ ■ 2)

$\boxed{\text{Corollaire : } p \circ p = p \text{ ie } p^2 = p \quad \text{On dit q } p \text{ est idempotent.}}$

Prop (mieux) : 1) $\mathrm{PtsFixes}(p) = F = \mathrm{Im}(p)$

2) $\ker(p) = G$

D/ Mq $F \subset \mathrm{Im}(p)$: Soit $x_F \in F$. On a $p(x_F) = x_F$

Donc $x_F \in \mathrm{Im}(p)$

Rq : en g^al $\mathrm{PtsFixes}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$

Mq $\mathrm{Im}(p) \subset F$

Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$ qu'on écrit $y = p(x)$

avec $x \in E$

Si on écrit Ⓣ $x = x_F + x_G$, on a $p(x) = x_F$

Donc $y = x_F \in F$ ■

D/ Corollaire $\quad$ mq $p \circ p = p$

Soit $x \in E$ $\quad$ On a $p(x) \in Im(p)$

$\overset{\frown}{C}$ $Im(p) =$ Pts Fixes (p), on a $p(p(x)) = p(x)$

3) Caractérisation des projecteurs.

Proposition

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$

1) Alors p est un projecteur.

2) a) On a $\quad E = Im(p) \oplus Ker(p)$

b) Et : $\quad$ p est le projecteur (de E) sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$

D/ 2) a) Mq $Im(p)$ et $Ker(p)$ sont en $\oplus$

R* Soit $x \in Im(p) \cap Ker(p)$

R* Écrivons $x = p(a)$ avec $a \in E$

On a $\quad p(x) = 0_E = p(p(a)) = (p \circ p)(a)$

$= p(a) = x$ ■

Mq $E = Ker(p) + Im(p)$

B° ORPAS $\quad$ Soit $x \in E$

Soient $a \in E$ et $x_K \in Ker(p)$ tq

$x = p(a) + x_K$

$p(x) = p(p(a)) + 0_E = p(a)$

J'ai trouvé "la composante selon $\mathrm{Im}(p)$" de x.

On pose $y := p(x)$

$x_K := x - p(x)$

On a bien $x = y + x_K$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$

Mq $x_K \in \mathrm{Ker}(p)$:

pop = p

On a $p(x_K) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$

Bilan : On a bien $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$

b) Notons q le projecteur (de E) sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$ mq $p = q$

Rappel : $f, g \in L(E)$

$$\left.\begin{array}{l} E = F \oplus G \\ \begin{cases} f_{|F} = g_{|F} \\ f_{|G} = g_{|G} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow f = g$$

• Sur $\mathrm{Ker}(p)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$.

(*) On a $p(x) = 0_E$

(*) On a $\mathrm{Ker}(q)$ = l'espace $//^{\text{nt}}$ auquel on projette $\mathrm{Ker}(p)$

Donc $q(x) = 0_E$

Ainsi : p et q coïncident sur $\text{Ker}(p)$.

Sur $\text{Im}(p)$

Soit $x \in \text{Im}(p)$ que j'écris $x = p(a)$ avec $a \in E$

* On a $p(x) = p(p(a)) = p(a) = x$
* Ĉ q est le projecteur sur $\text{Im}(p)$, on a

$$\text{PtsFixes}(q) = \text{Im}(p)$$

Donc $q(x) = x$

Ainsi : p et q coïncident sur $\text{Im}(p)$ ∎

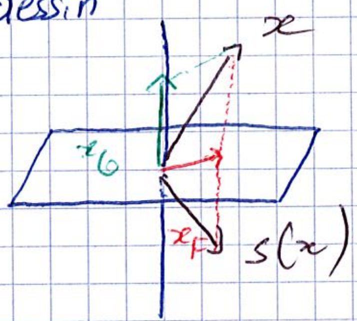
4) Symetries

$E = F \oplus G$

a) Définition

Rx On fait le dessin

dn facile



Déf° : La symétrie par rapport à F, $//^{nt}$ à G,

est l'endo $s \in L(E)$ déf par :

$$s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array}$$

où $x = x_F + x_G$ est l'unique décomp° de x dans $E = F \oplus G$

b) Propriétés

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Propriétés fondamentales :} \quad s \circ s = Id_E \\ \text{ie} \quad s \text{ est une involution} \end{array}}$

D/ ⊕ On écrit $x = x_F + x_G$

Alors $s(s(x)) = s(x_F - x_G)$

$= s(x_F + (-x_G))$

$= x_F - (-x_G) = x_F + x_G = x$ ■

Rq : • On a donc $s \in GL(E)$ et $s^{-1} = s$
• Donc (AC) $Ker(s) = \{0_E\}$
• Et (AC) $Im(s) = E$

Fait :
1) On a $F = PtsFixes(s) = Ker(s - Id_E)$
2) On a $G =$ "antiPtsFixes(s)" $= Ker(s + Id_E)$

D/ (AF)

c) Caractérisation

Prop : Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tq $s^2 = Id_E$

1) Alors : " s est une symétrie "

2) Plus précisement :

a) $E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E)$

b) : s est la symétrie (de E) p/r à $Ker(s - Id_E)$ //^{nt} à $Ker(s + Id_E)$

VII Formes linéaires

1) Définition

Déf : Soit E ev. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$

2) Exemples

On note E^* l'ens des formes linéaires sur E

- $$\begin{aligned} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(0) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \text{la somme des coeff de } P \end{aligned}$$

Rq : On a $P(1)$ = la somme des coeffs de P

- tr : $$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ M &\longmapsto tr(M) \end{aligned}$$

- Re : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-forme linéaire de $\mathbb{C}$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$: $$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_n &\longmapsto \sum_{i=1}^{10} u_i \end{aligned}$$

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{CV} \longrightarrow \mathbb{R}$

  $(u_n) \longmapsto \lim\limits_{n \to \infty} u_n$

- $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

  $f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$

- Soit E ev et soit $x_0 \in E$

  Ocsd $\text{év}_{x_0} : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$

  $\varphi \longmapsto \varphi(x_0)$

  On a $\text{év}_{x_0} \in (E^*)^*$

  De (f) : $\underline{\text{év}} : E \longrightarrow E^{**}$ est une AL

  $x_0 \longmapsto \text{év}_{x_0}$

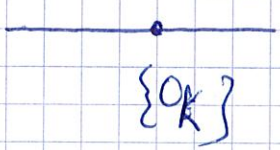
D/ AF $\overset{\oplus}{\Downarrow}$ $\ominus$

3) Les formes linéaires sont nulles ou surjectives.

Lemme : Soit V sev $\mathbb{K}$

Alors $V = \{0_\mathbb{K}\}$ ou $V = \mathbb{K}$

d^n



D/ Osq $V \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$. Soit $x_0 \in V$ tq $x_0 \neq 0_{\mathbb{K}}$

Mq $V = \mathbb{K}$. Soit $y \in \mathbb{K}$

On a $y = \frac{y}{x_0} \cdot x_0$ Notons $\lambda := \frac{y}{x_0}$

On a $y = \lambda x_0$

$\hat{C}$ $x_0 \in V$ (...) ■

<u>Rq :</u> Soit D sev E

$$\left.\begin{array}{l} D \text{ droite vectorielle} \\ V \text{ sev } D \end{array}\right\} \Rightarrow V = \{0_E\} \text{ ou } V = D$$

<u>D/</u> AF/exo ■

<u>Prop - R^x</u>

Soit $\varphi \in E^*$ Alors :

ou bien $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$

ou bien φ est sujective

<u>D/</u> En effet $\mathrm{Im} f$ sev $\mathbb{K}$

Si $\mathrm{Im} f = \{0_{\mathbb{K}}\}$, on a $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$

Si $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{K}$: φ est surj ■

4) Hyperplans

a) définition

Déf° : Soit E ev. Un hyperplan de E est un sev de E qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

ie soit H sev E. On dit que H est un hyperplan de E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\} : H = \operatorname{Ker} \varphi$$

b) hyperplans de l'espace

Soit $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire.

ie soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

D'après la classificat°, soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tq

$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

Osq $\varphi \neq 0$ Alors : $\exists i_0 : a_{i_0} \neq 0$

On a $\operatorname{Ker} \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}$

Exemples : hyperplans de $\mathbb{R}^3$

Soit H sev $\mathbb{R}^3$ un hyperplan

Fixons donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$ tq

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$$

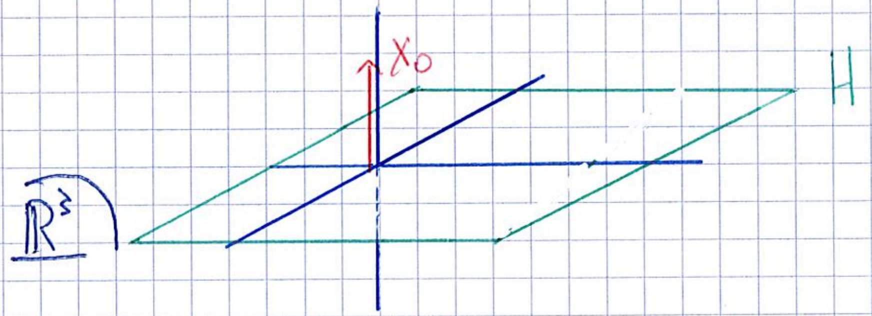
Astuce : Notons $X_0 := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

On a (T) $X_0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y + \gamma z$

produit scalaire

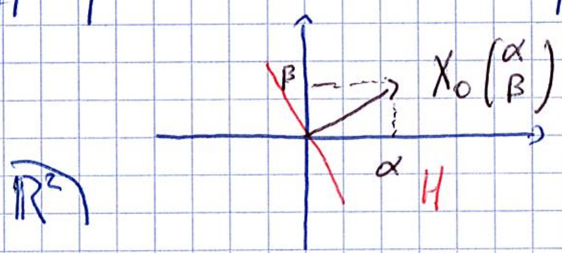
Ainsi $H = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid X \cdot X_0 = 0 \}$

d^n



Bilan : hyperplans de $\mathbb{R}^3$ = plans

Dans $\mathbb{R}^2$



c) Supplémentaire des hyperplans

Prop : Soit H un hyperplan de E

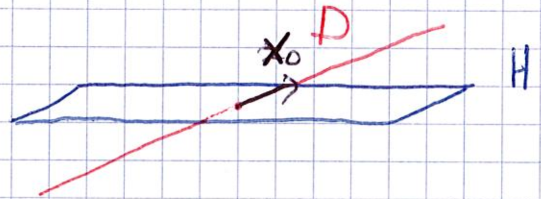
1) Soit D droite de E tq $D \not\subset H$

Alors $H \oplus D = E$

2) Soit $x_0 \notin H$

Alors $E = H \oplus \mathrm{vect}(x_0)$

d^n



D/ 2) R^* prosopagnosique

$\hat{C}$ H hyperplan : fixons $\varphi \in E^*$ non nulle

tq $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$

- Mq $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0_E\}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Vect}(x_0)$ qu'on écrit

$x = \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

On a $x_0 \notin H$ ie $x_0 \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$ ie

$\varphi(x_0) \neq 0$

Or $\varphi(x) = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{\varphi(x_0)}_{\in \mathbb{K}} = 0$ donc $\lambda = 0$

ou $x = 0_E$

• Mq $E = \operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Vect}(x_0)$

Soit $x \in E$

3° CRPAS

Analyse : Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x_K \in \operatorname{Ker} \varphi$ tq

$$x = x_K + \lambda x_0$$

Alors on a $\varphi(x) = \lambda \varphi(x_0)$

Donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$ ⚠ car $\varphi(x_0) \in \mathbb{K}$ $(\neq 0)$

On pose $\lambda := \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$ et $x_K := x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$

On a bien $x = x_K + \lambda x_0$; evidemment, ~~λx_0~~

$\lambda x_0 \in \operatorname{vect}(x_0)$

Mq $x_K \in \operatorname{Ker} \varphi$

On a
$$\begin{aligned}\varphi(x_K) &= \varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0\right) \\ &= \varphi(x) - \varphi\left(\boxed{\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}}_{\in \mathbb{K}} x_0\right) \\ &= \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \varphi(x_0) = 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

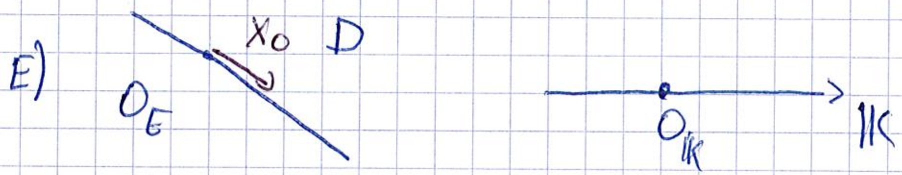
Prop : Rcp^t

Soit H sev E qui admet une droite D en tant que supplémentaire dans E

Alors H est un hyperplan

D/ n Astuce : ĉ D est une droite, D est isomorphe à $\mathbb{K}$

d^n



Fixons $x_0 \neq 0_E$ tq $D = \mathrm{vect}(x_0)$

Notons $\phi : \mathbb{K} \longrightarrow D$
$\lambda \longmapsto \lambda x_0$

ĉ $D = \mathrm{vect}(x_0)$, on a ϕ surjective.

De ⊕ si $\lambda \in \mathrm{Ker}\,\phi$, on a $\lambda x_0 = 0_E$;

ĉ $x_0 \neq 0_E$, on a $\lambda = 0$

Donc ϕ inj

Bilan ϕ iso

On a $E = H \oplus D$

On considère p le projecteur de E sur D parallèlement à H

On corestreint p à D ; si c'est $p|^D : E \longrightarrow D$

Enfin, on compose avec ϕ. On obtient

$$E \xrightarrow{p|^D} D \xrightarrow[\phi^{-1}]{\sim} \mathbb{K}$$

On pose $\varphi := \phi^{-1} \circ p|^D$

On a $\phi(1) = x_0$; donc $\phi^{-1}(x_0) = 1$

On a $p(x_0) = x_0$ car $x_0 \in D$

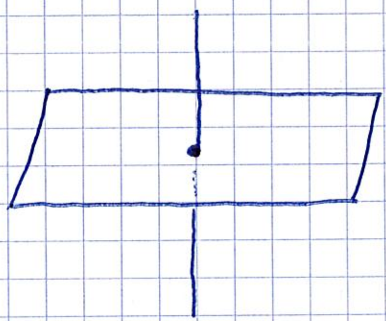
Donc $\varphi(x_0) = 1 \neq 0$ Donc φ non nulle.

Soit $x \in E$. On a $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \phi^{-1}(p|^D(x)) = 0$

$\Leftrightarrow p|^D(x) = 0_E \Leftrightarrow p(x) = 0_E$

Ainsi : $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} p = H$ ■

d^n



3) Formes linéaires associées à un hyperplan

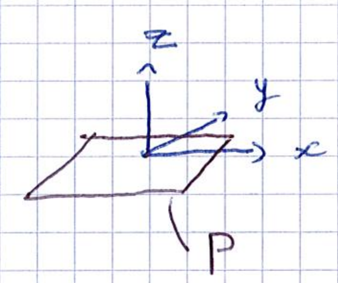
Prop : Soit H hyperplan E

Soient $\varphi, \psi \in E^*$ tq $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi = H$

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K} : \varphi = \lambda \psi$

Version $\mathbb{R}^3$: Deux eq° d'un même plan sont proportionnelles

Ex :



$\mathbb{R}^3$

Alors $P : z = 0$

mais aussi $P : 3z = 0$

D/ • Soit $x_0 \notin H$ On a $\varphi(x_0) \neq 0$ et $\psi(x_0) \neq 0$

• On a vu que $E = H \oplus \text{vect}(x_0)$

• On pose $\lambda = \dfrac{\varphi(x_0)}{\underbrace{\varphi(x)}_{\neq 0}} \in \mathbb{K}$

• Mq $\varphi = \lambda \psi$

(*) Sur H : c'est ok car "$\varphi = \psi = 0$"

(*) sur $\text{vect}(x_0)$: Soit $x \in \text{vect}(x_0)$ qu'on écrit $x = \theta x_0$ avec $\theta \in \mathbb{K}$

On a $\varphi(x) = \varphi(\theta x_0) = \theta \varphi(x_0)$

OFAA → $= \theta \dfrac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \psi(x_0) = \lambda \theta \psi(x_0) = \lambda \psi(\theta x_0)$

$= \lambda \psi(x)$ ■