Colas Bardavid

19
Applications linéaires

plan de cours et principaux résultats

I. Définitions et exemples

1) Définitions

2) Exemples

3) Premières propriétés

Proposition 19.1 Ⓣ **(Critère pour être linéaire)**

$$f \textit{ est linéaire} \iff \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \; f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

4) Application linéaire canoniquement associée $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 19.2
Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A *est*

$$\mathsf{u}_A : \begin{cases} \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \longmapsto AX. \end{cases}$$

On a $\mathsf{u}_A \in \mathrm{L}(\underline{\mathbb{K}}^p, \underline{\mathbb{K}}^n)$.

5) Classification de $\mathrm{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

6) Classification de $\mathrm{L}(\underline{\mathbb{R}}^2, \mathbb{R})$ et de $\mathrm{L}(\underline{\mathbb{R}}^2, \underline{\mathbb{R}}^2)$

a) classification de $\mathrm{L}(\underline{\mathbb{R}}^2, \mathbb{R})$
b) classification de $\mathrm{L}(\underline{\mathbb{R}}^2, \underline{\mathbb{R}}^2)$
c) généralisation

II. Opérations sur les applications linéaires

F24.14
F24.41
F24.15

1) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Fait 19.3 Ⓣ
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors,

$$\big(\mathrm{L}(E,F), +, \widetilde{0_F}, \cdot\big) \textit{ est un } \mathbb{K}\textit{-espace vectoriel.}$$

2) Composition

3) Diagrammes

4) La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathrm{L}(E)$ des endomorphismes

a) structure de $\mathbb{K}$-algèbre sur $\mathrm{L}(E)$

Théorème 19.4
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors,
$$\big(\mathrm{L}(E), +, \circ, \cdot, \widetilde{0_E}, \mathrm{Id}_E\big) \text{ est une } \mathbb{K}\text{-algèbre,}$$
non commutative en général.

b) puissances, commutation
c) polynômes d'endomorphismes

Théorème 19.5 Ⓣ
Soit $f \in \mathrm{L}(E)$ et soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors,
$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

d) formules de Newton et de Bernoulli
e) sous-espaces stables et endomorphisme induit

III. Noyau et image

F24.11
F24.19
F24.23
F24.27

1) Préliminaire

a) cadre
b) tiré-en-arrière
c) poussé-en-avant

2) Noyau d'une application linéaire

a) définition

Définition 19.6 Ⓣ
Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Le noyau *de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est le sous-espace vectoriel de E défini par*
$$\mathrm{Ker}(f) := \Big\{x \in E \;\Big|\; f(x) = 0_E\Big\}.$$

b) exemples
c) lien entre le noyau des matrices et le noyau des applications linéaires
d) noyau et injectivité

Proposition 19.7 Ⓣ
Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Alors,
$$f \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

e) liberté et injectivité

Proposition 19.8 Ⓣ
Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E et soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$ injective. Alors,
$$\big(f(x_1), \dots, f(x_p)\big) \text{ libre.}$$

Proposition 19.9 Ⓣ
Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une base de E et soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. Alors,
$$f \text{ injective} \iff \big(f(x_1), \dots, f(x_p)\big) \text{ libre.}$$

f) Cas $\underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^n$

♛ Proposition 19.10 Ⓣ
$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{L}(\underline{\mathbb{K}}^p, \underline{\mathbb{K}}^n) \\ p > n \end{array}\right\} \implies f \text{ ne peut pas être injective.}$$

3) Image d'une application linéaire

a) définition

Définition 19.11 Ⓣ
Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. L'image de f *est le sous-espace vectoriel de* F *défini par*

$$\mathrm{Im}(f) := \left\{ f(x) \ ; \ x \in E \right\}.$$

b) exemples

c) image, surjectivité et caractère générateur

Fait-Réflexe 19.12 Ⓣ
Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ *une famille génératrice dans* E *et soit* $f \in \mathrm{L}(E, F)$. *Alors,*

$$\big(f(x_1), \ldots, f(x_p)\big) \text{ est génératrice dans } \mathrm{Im}(f).$$

Fait-Réflexe 19.13 Ⓣ
Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ *base de* E *et soit* $f \in \mathrm{L}(E, F)$. *Alors,*

$$f \text{ surjective } \iff \big(f(x_1), \ldots, f(x_p)\big) \text{ est génératrice dans } F.$$

d) Cas $\mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$

♛ Proposition 19.14

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ p < n \end{array}\right\} \implies f \text{ ne peut pas être surjective.}$$

e) Composition des images

Fait-Réflexe 19.15 Ⓣ
On se place dans le diagramme d'espaces vectoriels $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. *Alors,*

1) *on a*

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = g\big(\mathrm{Im}(f)\big) \ ;$$

2) *dit autrement, on a*

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\big(g|_{\mathrm{Im}(f)}\big).$$

IV. Isomorphismes

F24.16
F24.28

1) Préliminaire

2) Définition

a) isomorphismes

b) espaces isomorphes

3) Exemples

4) Automorphismes

a) définition

b) $\mathrm{GL}(E)$

c) exemples

5) Cas $\mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$

♛ Théorème 19.16
Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est injective* ie $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$

(ii) f *est surjective* ie $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^n$

(iii) f *est un isomorphisme* ie $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$

V. Définition d'une application linéaire dans une base

1) Deux applications linéaires coïncidant sur une base sont égales

2) Définition d'une application linéaire dans une base

a) principe
b) exemple
c) l'application $\mathsf{CL}_{\mathscr{F}}$

Définition 19.17
Soit E un espace vectoriel et soit $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.
L'application linéaire $\mathsf{CL}_{\mathscr{F}} : \mathbb{K}^p \longrightarrow E$ est définie par

$$\mathsf{CL}_{\mathscr{F}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i. \end{array} \right.$$

d) propriétés de $\mathscr{F}$ détectables sur $\mathsf{CL}_{\mathscr{F}}$
e) l'application $\mathsf{Coords}_{\mathscr{B}}$
f) l'énoncé précis
g) démonstration

3) Définition d'une application linéaire sur une somme directe

a) deux applications linéaires coïncidant sur les facteurs d'une décomposition directe sont égales
b) cas de deux espaces vectoriels
c) généralisations

VI. Projecteurs et symétries

F24.29
F24.31
F24.32

1) Définition des projecteurs

Définition 19.18
Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.
Le projecteur sur F parallèlement à G *est l'endomorphisme p de E défini par*

$$p(x) = x_F$$

pour $x \in E$ s'écrivant $x = x_F + x_G$ (avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$).

2) Propriétés des projecteurs

a) réflexes
b) points fixes d'un endomorphisme
c) points fixes et noyau d'un projecteur

3) Caractérisation des projecteurs

Proposition 19.19
Soit $p \in \mathrm{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Alors,

1) *p est un projecteur ;*
2) *plus précisément :*
   a) *on a $E = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Im}(p)$;*
   b) *p est le projecteur de E sur $\mathsf{Im}(p)$ parallèlement à $\mathsf{Ker}(p)$.*

4) Symétries

a) définition
b) propriétés
c) caractérisation

VII. Formes linéaires

1) Les formes linéaires sont nulles ou surjectives

2) Hyperplans

a) définition

Définition 19.20
Soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan de E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists \varphi \in \mathrm{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \left\{0_{\mathrm{L}(E,\mathbb{K})}\right\} : \quad H = \mathsf{Ker}(\varphi).$$

b) hyperplans dans $\underline{\mathbb{K}}^n$
c) supplémentaires des hyperplans

3) Formes linéaires associées à un même hyperplan

Chapitre 19

Applications linéaires

- $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{K}$ peut être remplacer par un corps qlq K.

I. Définition et exemples

1. Définitions

Def : • Soit E, F des $\mathbb{K}$-ev

Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est une application linéaire de E dans F ($\mathbb{K}$-linéaire), qu'on notera f AL ssi :

1) $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On note $L(E, F)$ l'ensemble des AL de E dans F.

• Un endomorphisme de E est une AL de E dans E.

On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

- Forme linéaire de E est une AL $f : E \to \mathbb{K}$

On note $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaire.

2. Exemples.

- $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & tr(A) \end{array}}$ est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

car $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ et $tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$

- $(\cdot)^T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$

ie $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}}$ est AL.

car $A^T + B^T = (A+B)^T$ et $\lambda A^T = (\lambda A)^T$
C'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & a_{1,1} \end{array}}$ est une forme linéaire

Plus généralement, $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & a_{i_0,j_0} \end{array}}$
est une forme linéaire $\forall (i_0, j_0) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!]$

• Si $j_0 \in [\![1; p]\!]$

la j^{eme} colonne

$$\boxed{\begin{array}{rcl} C_j : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & C_j(A) \end{array}}$$ est une AL

en effet : $C_j(A+\lambda B) = C_j(A) + \lambda C_j(B)$

• De même pour les lignes.

• La multiplication est linéaire

T

$$A+(\lambda B + C) = \lambda AB + AC.$$

Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ocsd :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & A \cdot M \end{array}$$

On a : $\boxed{\lambda_A(B+C)} = A(B+C) = AB + AC = \boxed{\lambda_A(B) + \lambda_A(C)}.$

• $\boxed{\lambda_A(\mu M)} = A\mu M = \mu AM = \boxed{\mu \lambda_A(M)}$

Fait : $\lambda_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
est un endomorphisme

• De même : $\begin{array}{rcl} f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M \cdot A \end{array}$

est linéaire.

- C'est aussi ok avec des matrices rectangulaire.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$

⚠ $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2 \end{array}$ n'est pas linéaire

D/ A-t-on $f(\lambda M) = \lambda f(M)$?

On prend $\lambda = 2$ et $M = I_n$

On a • $f(2I_n) = (2I_n)^2 = 4I_n$

• $2f(I_n) = 2(I_n)^2 = 2I_n$ DLR ■

cf. $(M+N)^2 = M^2 + N^2$? $\to$ Non

- $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est linéaire

Ie, $(\cdot)' \in L(\mathcal{D}(I, \mathbb{R}), \mathcal{F}(I, \mathbb{R}))$

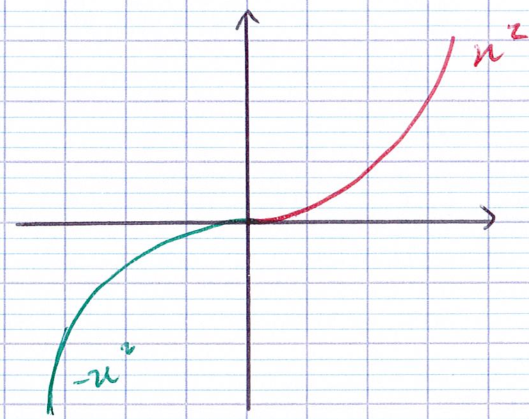
D/ ① $(f+g)' = f' + g'$ et $\lambda f' = (\lambda f)'$

- Question : Peut-t-on avoir le même espace de départ et d'arrivée ?

<u>Ex</u> : Ocsd : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

d^n/



<u>Fait</u> : 1) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) $f'(x) = 2|x|$

• Ocsd $D : \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$

$$f \longmapsto f'$$

On a D un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

$$\boxed{D \in L(\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}))}$$

<u>Rq</u> :

$$\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto f'$$

• <u>la composition</u> : Oui et non

Soit $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Osod $\Phi_{f_0} : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$f \longmapsto f\circ f_0$

$\Psi_{f_0} : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$f \longmapsto f_0\circ f$.

. ① $\Phi_{f_0}(f+g)(x) = [(f+g)\circ f_0](x)$

$$= (f+g)(f_0(x))$$

$$= f(f_0(x)) + g(f_0(x))$$

$$= (f\circ f_0)(x) + (g\circ f_0)(x)$$

$$= [\Phi_{f_0}(f) + \Phi_{f_0}(g)](x)$$

Prop : Φ_{f_0} est linéaire.

Prop : Ψ_{f_0} n'est pas linéaire

D/ Contre-exemple : $\Psi_{(\cdot)^2}$ n'est pas linéaire.

Question : $(\cdot)^2\circ(f+g) = (\cdot)^2\circ f + (\cdot)^2\circ g$?

ie $(f+g)^2 = f^2+g^2$? NON

Rq : Plus tard, on mettra en évidence une classe de fonctions f_0 telle que :

$\forall f_0 \in \mathcal{A}$, Φ_{f_0} et φ_{f_0} linéaire.

· <u>La partie réelle :</u>

Ocsd $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$
$z \longmapsto \mathrm{Re}(z)$

Alors $\boxed{\mathrm{Re}(\cdot) \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire}}$

$$\mathrm{Re}(u + \lambda w) = \mathrm{Re}(u) + \mathrm{Re}(\underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} w)$$
$$= \mathrm{Re}(u) + \lambda \mathrm{Re}(w) \quad \blacksquare$$

De même $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$
$z \longmapsto \mathrm{Im}(z)$

· <u>L'intégrale est linéaire.</u>

Ocsd $I : \mathcal{C}([a;b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt$

On a ⑦ :
$$I(f + \lambda g) = \int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,dt$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt$$
$$= I(f) + \lambda I(g)$$

Ainsi, $I : \mathcal{C}([a;b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

· L'évaluation est linéaire

Soit X un ensemble non vide. Soit $x_0 \in X$

Ocsd $\quad év_{x_0} : \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire.

D/ (T) $\quad év_{x_0}(f + \lambda g) \underset{\substack{\uparrow \\ AF}}{= \cdots =} év_{x_0}(f) + \lambda\, év_{x_0}(g)$.

• $D : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$, $P \longmapsto P'$ $\quad \in L(\mathbb{K}[X])$

• $\lambda_Q : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$, $P \longmapsto PQ$ $\quad \in L(\mathbb{K}[X])$ (endomorphisme)

⚠ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto P(x)$ n'est pas linéaire

Mais $év_\alpha : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$, $P \longmapsto P(\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

• $\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $P \longmapsto \tilde{P}$ est linéaire

• le décalage d'indice (le "shift")

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_n \longmapsto (u_{n+1})_n$ $\quad \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

- $\boxed{Id_E : E \to E}$ $\in L(E)$ (ie un endomorphisme de E)

D/ $Id_E(x+y) = x+y = I_E(x) + Id_E(y)$
$Id_E(\lambda x) = \lambda Id_E$.

- Soit E, F ev. Alors

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}}$$ est une <u>AL</u>

On la note $\tilde{0}_F$.

D/
- $\tilde{0}_F(x+\lambda y) = 0_F$
- $\tilde{0}_F(x) + \lambda \tilde{0}_F(y) = 0_F + \lambda 0_F = 0_F$

On a la notera $0_{L(E,F)}$ c'est Application nul

3 Premières propriétés des <u>AL</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Fait : Soit } f : E \longrightarrow F \ \text{AL}. \\ \text{Alors, } f(0_E) = 0_F \end{array}}$$

D/ $f(0_E) = f(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E) = 0_{\mathbb{K}} \cdot f(0_E) = 0_F$

DALC ∎

Fait_R+ : Soit $f : E \to F$ une **AL**

Alors, $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$ pour

$x_1, \dots, x_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

D/ Rec AF

Prop : Critère pour être linéaire

Soient E, F ev. Soit $f : E \to F$.

Alors,

f **AL** $\iff \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},$
$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$

D/$^{(\neq)}$ $\Rightarrow$ Osq f **AL**.

On a $f(x + \lambda y) \underset{1°)}{=} f(x) + f(\lambda y) \underset{2°)}{=} f(x) + \lambda f(y)$

$\Leftarrow$ Osq $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.

- Pour mq f additive (ie ① $f(x+y) = f(x) + f(y)$)
  On prend $\underline{\lambda = 1}$.

- Pour mq f compatible à la scalairisation
  On prend $\underline{x = 0}$

4. Application linéaire canoniquement associé à une matrice (ALCA)

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associé à A (ALCA à A), notée u_A, est l'AL de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$u_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
$$X \longmapsto AX$$

On a $u_A : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

$D/$ $^{(*)} A(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY$ ■

Exemple : On prend $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, qui est u_A.

On va avoir $u_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$$

Rq :

Matrices	AL
$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	$u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$
$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	$u_B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ (endomorphisme)

5. Classification de $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On a vu en $3^{ème}$, une AL, qui est "$y = ax$"

Prop : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ AL

Alors, $\exists ! a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$.

D/ On procède par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $a \in \mathbb{R}$, tq $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$

Pour $x = 1$, $\boxed{f(1) = a}$. Déjà, on l'unicité

Synthèse : Posons $a := f(1)$

Mq $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(x \cdot 1)$

car f linéaire $\longrightarrow$ $= x \cdot f(1)$
$= ax$

6. Classification de $L(\mathbb{R}^2 ; \mathbb{R})$ et de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

a. Classification de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On va classifier $(\mathbb{R}^2)^*$, les formes linéaires de $\mathbb{R}^2$.

(AC) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ AL Qu'est-ce que f ?

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \boxed{\cdots}$

- Déjà : l'application $P_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x$ est linéaire

En effet $P_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = P_1\begin{pmatrix} x + \lambda x' \\ y + \lambda y' \end{pmatrix}$

$= x + \lambda x'$

$= P_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda P_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

De même $P_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto y$ est linéaire

Prop Soit $f \in (\mathbb{R}^2)^*$, alors,

$\exists ! (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax + by.$

Toutes formes linéaires de $\mathbb{R}^2$ est CL des coord.

D/ Analyse - Synthèse :

Analyse : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x, y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax + by$

Idée : pour $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: On obtient $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a$

De même, $b = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$.

On a l'unicité.

Synthèse : On pose $a := f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $b := f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Soit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

On a
$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= x f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + y f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= ax + by.$$

b Classification de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = L(\mathbb{R}^2)$

Prop : Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$

Alors, il existe un unique $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tq
$$\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$$

D/ On a $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

On peut ne voir de f que sa premier coordonnée.

Ie, on écrit, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix}$

avec $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

On dit que f_1 et f_2 sont les coordonnées de f

Plus formellement, on dispose de $p_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x$$

et $p_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ appelé 1^{re} et $2^{ème}$ projection de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto y$$

On a p_1 et p_2 linéaire.

On pose $\boxed{f_1 := p_1 \circ f}$ On a f_1 linéaire.

On a $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}$

Donc, $f_1 \in L(\mathbb{R}^2 ; \mathbb{R})$ ie $f_1 \in (\mathbb{R}^2)^*$

D/ $(p_1 \circ f)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$

$= p_1\left(f\left(\begin{pmatrix} x + \lambda x' \\ y + \lambda y' \end{pmatrix}\right)\right)$

f AL $\to$ $= p_1\left(f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \lambda f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)\right)$

$$\underset{P_1\ AL}{=} P_1\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) + \lambda P_1\left(f\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$$

$$= (P_1 \circ f)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \lambda (P_1 \circ f)\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

Ie, $f_1\begin{pmatrix}x + \lambda x'\\y + \lambda y'\end{pmatrix} = f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) + \lambda f_1\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

DACQP (a) : Fixons donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq

$\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = ax + by$.

De même pour $f_2 := P_2 \circ f$.

Fixons $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = cx + dy$

- CCl : On a

$$\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \\ f_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Unicité : ok ∎

c. Généralisation

Prop : Soit $f \in (\mathbb{R}^n)^*$

Alors, $\exists ! (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Ex : L'AL :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & 5x - 2y + 4z + 50t \end{array}$$

est la forme typique d'un élément $(\mathbb{R}^4)^*$
ie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$.

Rq : • Ceci se généralise $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$
qui s'écrivent $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,p} x_p \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,p} x_p \\ \vdots \quad \ddots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,p} x_p \end{pmatrix}$

Ex : l'AL.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x + 2y + z + t \\ 3x + 5y - z + 100t \\ x + y + z + t \end{pmatrix} \end{array}$$

Ceci est la forme typique de $L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

- Rq : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qu'on écrit

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

On dispose de l'ALCA, $\boxed{U_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}}$

On a $U_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \qquad \ddots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Théorème} : \text{ Soit } f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ \text{Alors, } \exists! A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : \\ \quad \left(\forall X \in \mathbb{K}^p, \ f(X) = U_A(X)\right) \\ \qquad\qquad f = U_A \end{array}}$

D/ • **Existence** :

• Si $f \in (\mathbb{R}^p)^*$ alors :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i \quad \text{où} \quad a_i := f(\varepsilon_i^{[p]})$$

En effet, $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i \varepsilon_i^{[p]}\right)$

$$f \text{ AL} \longrightarrow \quad = \sum_{i=1}^{p} x_i \underbrace{f(\varepsilon_i^{[p]})}_{:= a_i}$$

• Si $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Ocsd $f_i := p_i^{[n]} \circ f$

où $p_i^{[n]} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & x_i \end{array} \in (\mathbb{R}^n)^*$

On a $f_i \in (\mathbb{R}^p)^*$. DLR.

Unicité : Mq $U_A = U_B \Rightarrow A = B$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ tq $U_A = U_B$

ie tq $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad AX = BX}$

Soient $i \in [\![1; p]\!]$.

On a $U_A(\mathcal{E}_i) = U_B(\mathcal{E}_i)$ ie

$$A\mathcal{E}_i = B\,\mathcal{E}_i$$

Or, $A\mathcal{E}_i = C_i(A)$ et $B\mathcal{E}_i = C_i(B)$

Donc, A et B ont les mêmes colonnes.
D'où $A = B$. ∎

II. Opération sur les applications linéaires.

1. Structures de $\mathbb{K}$-ev.

Soient E, F . $\mathbb{K}$ ev.

Si $f, g : E \to F$ des $\underline{AL}$
Si $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors, $f + \lambda g : E \to F$ est une $\underline{AL}$.

D/

$$(f+\lambda g)(x+\mu y) \underset{\substack{\text{par def} \\ f+\lambda g}}{=} f(x+\mu y) + \lambda g(x+\mu y)$$

$$\underset{f, g \ \underline{AL}}{\longrightarrow} = f(x) + \mu f(y) + \lambda g(x) + \lambda\mu g(y)$$

$$= f(x) + \lambda g(x) + \mu(f(y) + \lambda g(y))$$

$$= (f+\lambda g)(x) + \mu(f+\lambda g)(y)$$

<u>Fait</u> : • $L(E, F)$ peut être munis d'une structure de $\mathbb{K}$-ev.

• $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev

• $L(E, F)$ est sev de $\mathcal{F}(E, F)$.

<u>Rq</u> : On a ainsi le réflexe :

$$\boxed{f, g \ \underline{AL} \Rightarrow f + \lambda g \ \underline{AL}}$$

2. Composition.

Soit E, F, G ev

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$

Ie, ocsd $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

Prop :

$$f, g \text{ AL} \Rightarrow g \circ f \text{ AL}$$

D/ #

$$(g \circ f)(x + \lambda y) = g(f(x + \lambda y))$$

f AL $\longrightarrow$ $= g(f(x) + \lambda f(y))$

g AL $\longrightarrow$ $= (g \circ f)(x) + \lambda (g \circ f)(y)$ ∎

3 Diagrammes.

D'où la notion de diagramme de $\mathbb{K}$ev (respectivement de diagramme commutatif)

Ex :

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[d, "\alpha"] \\ E \arrow[r, "f"] & F \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "h"'] & H \end{tikzcd}$$

Commutative ssi : $h = \alpha \circ g$

4. $L(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

a. Structure de $\mathbb{K}$-algèbre

Sur $L(E)$, déjà, on a une structure de $\mathbb{K}$-ev.

Pour avoir une $\mathbb{K}$-algèbre, il nous manque un produit sur $L(E)$.

"Miracle", la composition est un "produit" ie $g \circ f$ est un "produit".

D/
- lci : $f, g : E \to E$ AL alors $f \circ g : E \to E$ AL
- Associativité : ok
- Neutre : ok Id_E linéaire
- Distributivité à droite : ok

$$(f + \lambda g) \circ h = f \circ h + \lambda g \circ h$$

- Distributivité à gauche :

Mq $$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$

Soient $f, g, h \in L(E)$.

Soit $x \in E$, on a : $\big(f \circ (g+h)\big)(x)$

$= f\left[(g+h)(x)\right]$

$= f\left(g(x) + h(x)\right)$

Or, f AL, d'où

$= f(g(x)) + f(h(x))$

$= (f\circ g)(x) + (f\circ h)(x)$

$= (f\circ g + f\circ h)(x)$

DLR. car ceci est $\forall x \in E$, on a

$$f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$$

De même, $f\circ(g+\lambda h) = f\circ g + \lambda f\circ h$.

$$\boxed{\text{Prop : } (L(E), +, \circ, \cdot, 0_{L(E)}, Id_E) \text{ est } \mathbb{K}\text{-algèbre}}$$

Exemple - R^x

Soit E ev. Soient $f, g, h \in L(E)$.
endo de E.

(ex : • $D : \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$: dérivation

• $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n) \mapsto (u_{n+1})_n$: Décalage suite

• $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$: Dérivation)

• Endo de $\mathbb{R}^n$: DACQP, c'est les u_A avec $A \in M_n(\mathbb{K})$

Alors, • $f^2 + 5g$ endo

• $f^2gh + 52 fg^2h^8 - 3f - 5g - 5h$ endo

⚠ c'est $f \circ f \circ g \circ h$

b Puissance et commutation.

En général : $L(E)$ n'est pas commutative.

Pour $f \in L(E)$, posons $\mathcal{C}(f) := \{g \in L(E) \mid fg = gf\}$

On a : • $\mathcal{C}(f)$ stable par produit

• $Id_E \in \mathcal{C}(f)$

• $\mathcal{C}(f)$ stable par CL

•* $\mathcal{C}(f)$ est sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $L(E)$.

• $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \in \mathcal{C}(f)$

D/(AF) ■

APPLICATION :

$$fg = gf \rightarrow f \in \mathcal{C}(g) \xrightarrow{\text{Produit}} f^k \in \mathcal{C}(g)$$

$$\Leftrightarrow g \in \mathcal{C}(f^k)$$

$$\rightarrow g^l \in \mathcal{C}(f^k)$$

Donc g^l et f^k commutent.

Rq : $f^k g^l = f f \cdots \boxed{fg} \cdots g$

$= f \cdots f g \boxed{f g} \cdots g$

$= f \cdots f g g f g \cdots g$

$= \cdots = g \cdots g f \cdots f$

c. Polynôme d'endormophisme

Soit E ev. Soit $f \in L(E)$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

On peut évaluer P en f.

C'est $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$

Si $\mathcal{A}$ $\mathbb{K}$-algèbre et si $\alpha \in \mathcal{A}$, on dispose de :

$$\begin{aligned} \text{év}_\alpha : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathcal{A} \\ P &\longmapsto P(\alpha) \end{aligned}$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.

- $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$
- $(PQ)(\alpha) = P(\alpha) \times Q(\alpha)$

"$\times$" de $\mathcal{A}$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
Alors

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

d. Formules de Newton et Bernoullie

Prop : Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tq $fg = gf$.

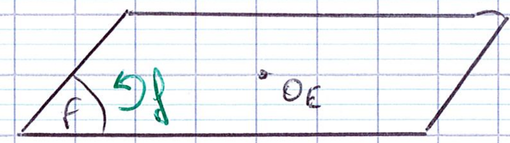
Alors : 1) $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$

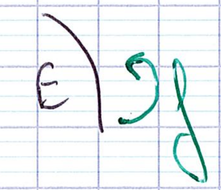
2) $f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1}$
$= \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1} (f-g)$

D/ ok

d Sous espaces-stable et endomorphisme induit.

$d^{(1)}$





Def : Soit E ev. $f \in L(E)$

Soit F sev de E.

- On dit que F est stable par f ssi

$$\boxed{\forall x_F \in F, \quad f(x_F) \in F}$$

Dans ce cas, on pose :

$$f\|_F := f|_F^F$$

C'est l'endomorphisme induit par f sur F.

$$f\|_F \in L(F)$$

III. Noyau et image

1. Préliminaire

a Cadre

Soient E, F ev et soit $f : E \to F$ AL

Soit E_0 sev E et F_0 sev F

Schématiquement, on a :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \Big|\text{sev} & & \Big|\text{sev} \\ E_0 & & F_0 \end{array}$$

b. Tirée en arrière.

Prop :

$$f^{(-1)}[F_0] \text{ sev } E$$

D/

- On a $f(0_E) = 0_F$.

De plus $0_F \in F_0$ car F_0 sev de F.

Donc, on a $\underline{f(0_E) \in F_0}$ (R) $0_E \in f^{(-1)}[F_0]$

- Soit $x, y \in f^{\langle -1 \rangle}[F_0]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

A-t-on $x + \lambda y \in f^{\langle -1 \rangle}[F_0]$?

On a $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

Or, $x \in f^{\langle -1 \rangle}[F_0]$, donc $\Downarrow$ (R^x) $f(x) \in F_0$

De même, $f(y) \in F_0$. $\hat{C}$ F_0 sev F

On a $f(x) + \lambda f(y) \in F_0$

Ie $f(x + \lambda y) \in F_0$

D'où $x + \lambda y \in f^{\langle -1 \rangle}[F_0]$.

b. Poussée en avant.

$$\boxed{\text{Prop : } \quad f[E_0] \text{ sev } F}$$

D/

- Déjà : $0_E \in E_0$, on a donc

$$f(0_E) \in f[E_0]$$

Or, $f(0_E) = 0_F$ d'où $0_F \in f[0_E]$

• Soient $x, y \in f[E_0]$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On les écrit $x = f(a)$ et $y = f(b)$ avec $a, b \in E_0$.

Mq $x + \lambda y \in f[E_0]$

On a $x + \lambda y = f(a) + \lambda f(b) = f(a + \lambda b)$

Or, $a, b \in E_0$ et E_0 sev E, on a

$a + \lambda b \in E_0$, donc $f(a + \lambda b) \in f[E_0]$

Ie $x + \lambda y \in f[E_0]$ ▪

2. Noyau d'une AL.

Déf : Soient E, F év. Soit $f : E \to F$ AL.

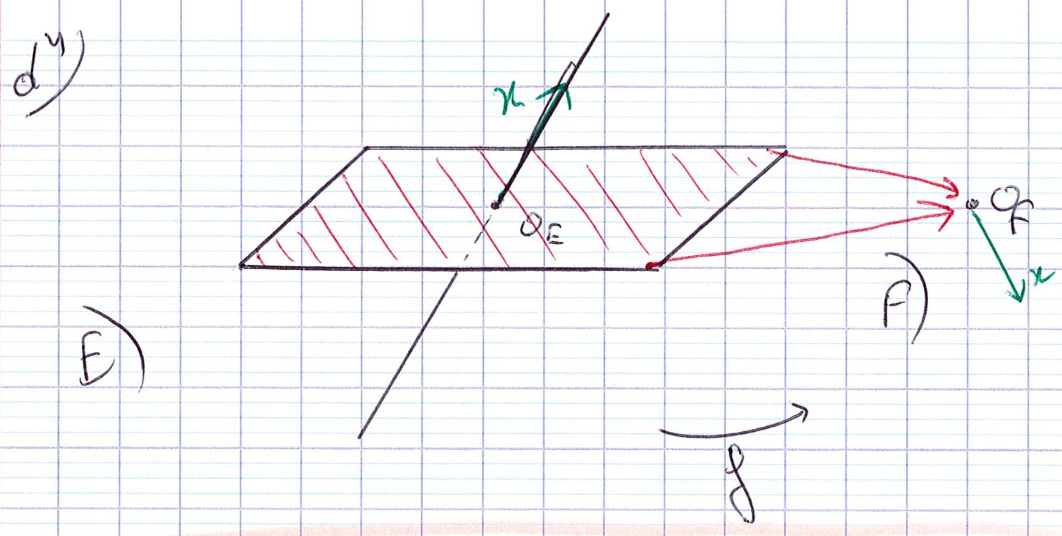
Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ est le sev E définie par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

Rq : On a bien $\mathrm{Ker}(f)$ sev E car

$\mathrm{Ker}(f) = f^{\langle -1 \rangle}[\{0_F\}]$.

d)



Fait - R^{k} : Soit $f : E \to F$ AL

Alors, f est nulle (ie $\forall x \in E, f(x) = 0_F$)
ou $f = 0_{L(E,F)}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = E$

D/ AF AC

b. Exemple.

- Csd $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $s : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$(u_n)_n \longmapsto (u_{n+1})_n$

On a $\boxed{s \in L(E)}$.
- Qui est s^2 ?

Soit $u \in E$. On a $s^2((u_n)_n) = s(s((u_n)_n))$

$= s((u_{n+1})_n) = (u_{n+2})_n$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$; on pose $P := X^2 + aX + b$

- Qui est $P(s)$?

On a $P(s) \in L(E)$

Soit $u \in E$. On a : $P(s) = s^2 + a \cdot s + b \, Id_E$

$\boxed{P = X^2 + aX + bX^0}$

$\hookrightarrow s^0 = Id_E$

On a ainsi $P(s) : E \longrightarrow E$

Soit $u \in E$.

$$P((s)(u)) = P(s^2(u) + a\,s(u) + bu$$

$$= (u_{n+2})_n + a(u_{n+1})_n + b(u_n)_n$$

$$= (u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n)_n$$

- On a $u \in \mathrm{Ker}(P(s)) \Leftrightarrow P(s)(u) = 0_E$

$(0)_n$

$\Leftrightarrow (u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n)_n = (0)_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$

les suites vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 5u_n$ forme $\operatorname{Ker}(P(S))$ avec $P = X^2 - 3X - 5$.

- Oasd $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$D : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

On a $D \in L(E)$.
Si $k \in \mathbb{N}$, on a $D^k : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f^{(k)} \end{array}$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, posons $P = X^2 + aX + b$.

Oasd $P(D)$. On a $P(D) \in L(E)$ et

$$\forall f \in E, \quad P(D)(f) = f'' + af' + bf$$

Donc $\operatorname{Ker}(P(D)) = \{ f \in E \mid f'' + af' + bf = \tilde{0} \}$

Ainsi, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un noyau.

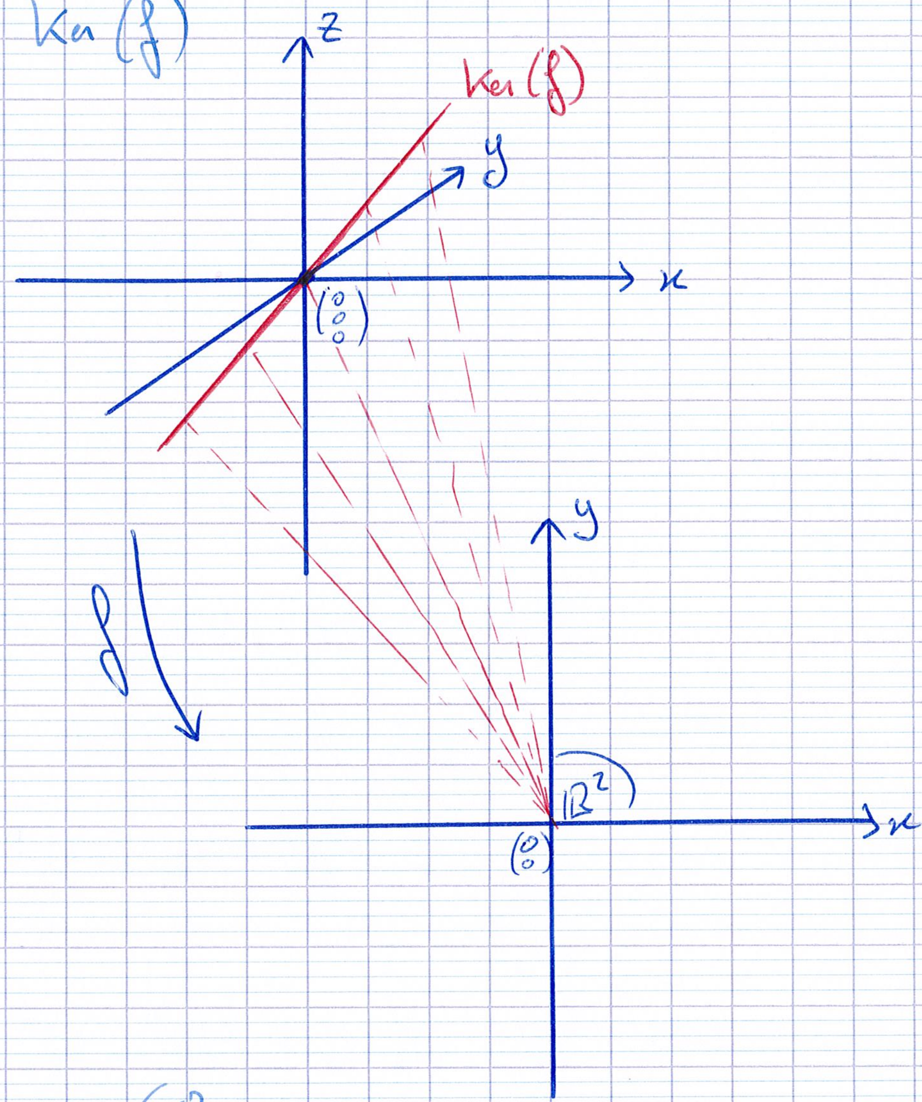
- Oasd $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ x + y + z \end{pmatrix} \end{array}$

On a $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

ex $f = \mathcal{U}_{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}}$.

Calculons $\mathrm{Ker}(f)$

d^n



Soit $(x, y, z \in \mathbb{R}$.

On a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \iff f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad\;\; y + 2z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z - 2y = -3z + 4z = z \\ y = -2z \end{cases}$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. lien entre Ker(f) et Ker(A)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On dispose de $u_A : \underbrace{\mathbb{K}^p}_{= \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})} \longrightarrow \underline{\mathbb{K}^n}$
$X \longmapsto AX$.

On a $u_A \in L(\underline{\mathbb{K}^p}, \underline{\mathbb{K}^n})$.

$\boxed{\underline{\text{Fait}} : \ \mathrm{Ker}(u_A) = \mathrm{Ker}(A)}$

D/ Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
On a $X \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow AX = 0_{n,1}$

$\Leftrightarrow u_A(X) = 0_{n,1} = 0_{\underline{\mathbb{R}^n}}$

$\Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}(u_A)$.

d. Noyau et injectivité.

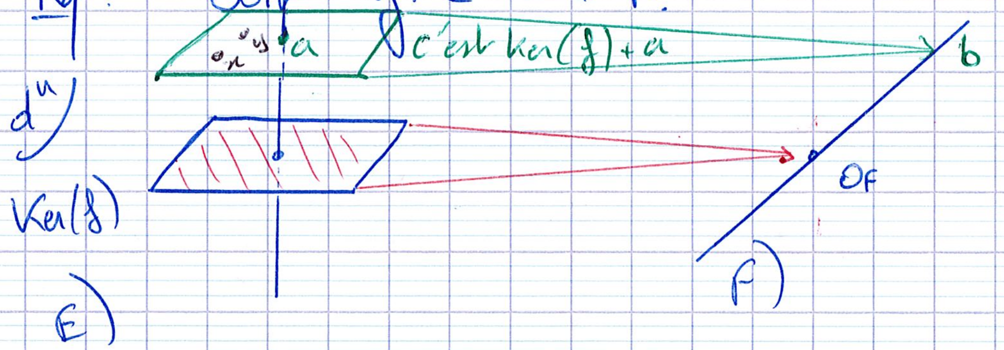
Prop - R* : Soit $f : E \to F$ AL.
Alors f injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

D/ ($\Rightarrow$). Osq f inj.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ On a $f(x) = 0_F$.
On, $f(0_E) = 0_F$, donc $f(x) = f(0_E)$
ĉ f inj donc $x = 0_E$.

($\Leftarrow$) Osq $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Mq f inj. Soit $x, y \in E$ tq $f(x) = f(y)$
On a $f(x) - f(y) = f(x-y)$
$= 0_F$

Donc $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $x - y = 0_E$
D'où $x = y$.

Rq : Soit $f : E \to F$.



Soit $a \in E$. Posons $b := f(a) \in F$

Soient $\boxed{x, y \in \mathrm{Ker}(f) + a}$ qu'on écrit

$x = x_k + a$ et $y = y_k + a$ avec $x_k, y_k \in \mathrm{Ker}(f)$

On a $f(x) = f(x_k + a) = \underbrace{f(x_k)}_{\substack{= 0_F \\ \text{car } x_k \in \mathrm{Ker}(f)}} + f(a) = b$

De même, $f(y) = b$.

e. lien entre liberté et injectivité.

Soit E, F ev. Soit $f : E \to F$ AL

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.

Prop : $\left.\begin{array}{l} f \text{ inj} \\ (x_1, \dots, x_p) \text{ libre} \end{array}\right\} \Rightarrow (f(x_1), \dots, f(x_p)) \text{ libre}$

D/ Osq f inj et $(x_1, \dots, x_p)$ libre.

Mq $f(x_1) \dots f(x_p)$ libre

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) = 0_F$

On a $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0_F$

ie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \operatorname{Ker}(f)$

Or, f inj donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$ or, $(x_1, \dots, x_p)$ libre !

donc $\forall i, \lambda_i = 0$. ∎

Prop :

Osq $(x_1, \dots, x_p)$ base de E. Alors :

f inj $\Leftrightarrow$ $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ libre.

D/ ($\Rightarrow$) Déjà fait. ∎

($\Leftarrow$) Osq $f(x_1), \dots, f(x_p)$ libre. Mq f inj.

On calcule le noyau. $(\operatorname{Ker}(f))$

Soit $x \in \ker(f)$

Comme $(x_1, \dots, x_p)$ base de E.

Fixons $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq $\boxed{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = x}$

On a $x \in \ker(f)$. Donc, on a $f(x) = 0_F$

Ie, on a $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = 0_F$

Ie $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) = 0_F$

Or, $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ libre, donc $\forall i,\ \lambda_i = 0$

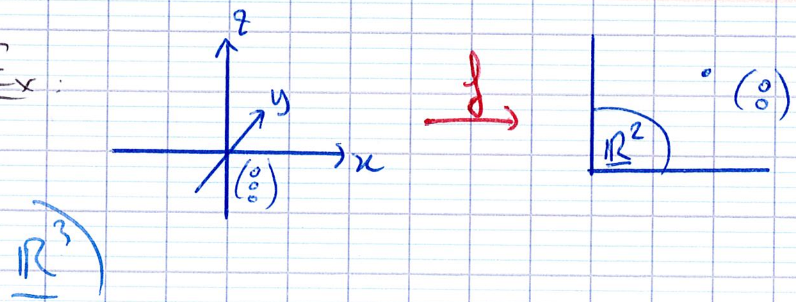
Donc $x = 0$. Donc f injective ∎

j. Cas $\mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$

Prop : $\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{AL} \\ p > n \end{array}\right\}$

$\Rightarrow f$ ne peut pas être inj.

Ex :



Si f n'est pas linéaire, c'est possible.

D/ Soit $f : \underline{\mathbb{K}^p} \to \underline{\mathbb{K}^n}$ $\underline{AL}$ inj.

Ord $(\varepsilon_1^{[p]}, \dots, \varepsilon_p^{[p]})$: c'est une famille libre de $\underline{\mathbb{K}^p}$.

Donc $\left(f(\varepsilon_1^{[p]}), \dots, f(\varepsilon_p^{[p]})\right)$ libre DACQP.

Or, on a mq (CNI), $(x_1, \dots, x_p)$ libre dans $\underline{\mathbb{K}^n}$ $\Rightarrow p \leq n$.

Donc $p \leq n$.

3. Image d'une AL.

a. Définition.

Soient E, F ev et soit $f : E \to F$ $\underline{AL}$.

Déf : L'image de f est le sev de F, notée $\mathrm{Im}(f)$, défini par
$$\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \ ; \ x \in E\}$$

Rq : On a $\mathrm{Im}(f)$ sev F car $\mathrm{Im}(f) = f[E]$.

b. Exemples.

- Cssd $\boxed{\begin{array}{rcl} \tilde{\circ} : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array}}$

On a $\tilde{\circ} \in L\left(\mathbb{R}[X], \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)$

Alors $\mathrm{Im}(\tilde{\circ})$ est l'ensemble des fonctions polynomiale.

Rq : On a $\tilde{\circ}$ inj.

(D/ Calculons $\mathrm{Ker}(\tilde{\circ})$.

Soit $P \in \mathrm{Ker}(\tilde{\circ})$. On a donc

$$\tilde{P} = \tilde{0}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$, donc P possède une infinité de racine DALC, $P = 0$.)

- Cssd $\boxed{\begin{array}{rcl} D : \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}}$

Alors, que peut dire de $\mathrm{Im}(D)$?

On a $\mathrm{Im}(D)$ sev $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$$\boxed{\textbf{Prop} : \quad \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}(D)}$$

D/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

DALC, fixons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de f.

$$\left(F(x) = \int^x f(t)\,dt \right)$$

Par définition de "primitive", on a :

1) F est $\mathcal{D}^1$

2) $F' = f$

On a donc $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $D(F) = f$

Donc, $f \in \mathrm{Im}(D)$.

• <u>Analyse - séquentielle</u>

On a :

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
f	$(u_n)_n$
f'	$(u_{n+1} - u_n)_n$
$\int_0^x f(t)\,dt$	$\sum_{k=0}^{n} u_k$
IPP	Transformation d'Abel

Ocsd $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$(u_n)_n \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_n$

(On remarque $\Delta = s - Id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

D'où (T) $\Delta^2(u) = \Delta(\Delta(u))$

$$= \Delta\left((u_{n+1} - u_n)_n\right)$$

$$= \left((u_{n+2} - u_{n+1}) - u_{n+1} + u_n\right)_n$$

$$= (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)_n$$

Comme s et $Id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ commutent, on a

$$\Delta^k(u) = \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} s^i (-1)^{k-i}\right](u)$$

$\Delta = s - Id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} u_{n+i}\right)_n$$

Exo Calculer $\mathrm{Im}(\Delta)$.

c. Image, surjectivité et caractère générateur

Soient E, F év et ocsd $f : E \to F$ AL

Fait : f surj $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.

D/ du

Fait : $f = 0_{L(E,F)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$

D/ ok.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$

$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Fait} : (x_1, \dots, x_p) \text{ génératrice } E \\ \Rightarrow \mathrm{Vect}\big(f(x_1), f(x_2) \dots f(x_p)\big) = \mathrm{Im}(f) \end{array}}$

D/ · Premièrement : On a $\forall i,\ f(x_i) \in \mathrm{Im}(f)$

Donc, automatiquement, on a

$$\forall\ \mathrm{Vect}\big(f(x_1), \dots, f(x_p)\big) \text{ sev } \mathrm{Im}(f).$$

· Réciproquement : Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.

qu'on écrit $y = f(x)$ avec $x \in E$.

$\hat{C}$ $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice de E, fixons $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

On a $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right)$.

ie $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

D'où $y \in \mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_p))$.

<u>Fait-R^k</u> : Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille génératrice de E

Soit $f : E \to F$ <u>AL</u>

Alors $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$

D/ Reformulation d'avant.

<u>Fait-R^k</u> Osq $(x_1, \dots, x_p)$ base de E.

Soit $f : E \to F$ <u>AL</u>. Alors :

f surj $\Leftrightarrow (f(x_1), \dots, f(x_p))$ génératrice de F.

D/ $\Leftarrow$ Osq $(f(x_i))_i$ génératrice de F.

On on vient de voir que $\mathrm{Vect}(f(x_1), \dots f(x_p)) = \mathrm{Im}(f)$ car $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice de E.

Donc, $\boxed{\mathrm{Im}(f) = F}$ Donc f surj

($\Rightarrow$) Osq f surj. D'où $\mathrm{Im}(f) = F$.

Comme $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice de E.

On a $\mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_p)) = \mathrm{Im}(f)$

Donc, on a bien $\mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_p)) = F$

Ie, $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ engendre F. ∎

d le cas $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$

Prop : Soit $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ AL

Alors $p < n \Rightarrow f$ ne peut pas être surjective.

D/ Mq f surj $\Rightarrow p \geqslant n$.

Osq f surj. Ocsd $(\varepsilon_1^{[p]}; \dots; \varepsilon_p^{[p]})$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Elle est génératrice de $\mathbb{K}^p$. DAQP, $(f(\varepsilon_1^{[p]}), \dots, f(\varepsilon_p^{[p]}))$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$. Or, on a montré qu'une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ possède au moins n element.

Donc $p \geqslant n$.

e. Composition des images.

Ocsd $\quad E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \quad$ AL

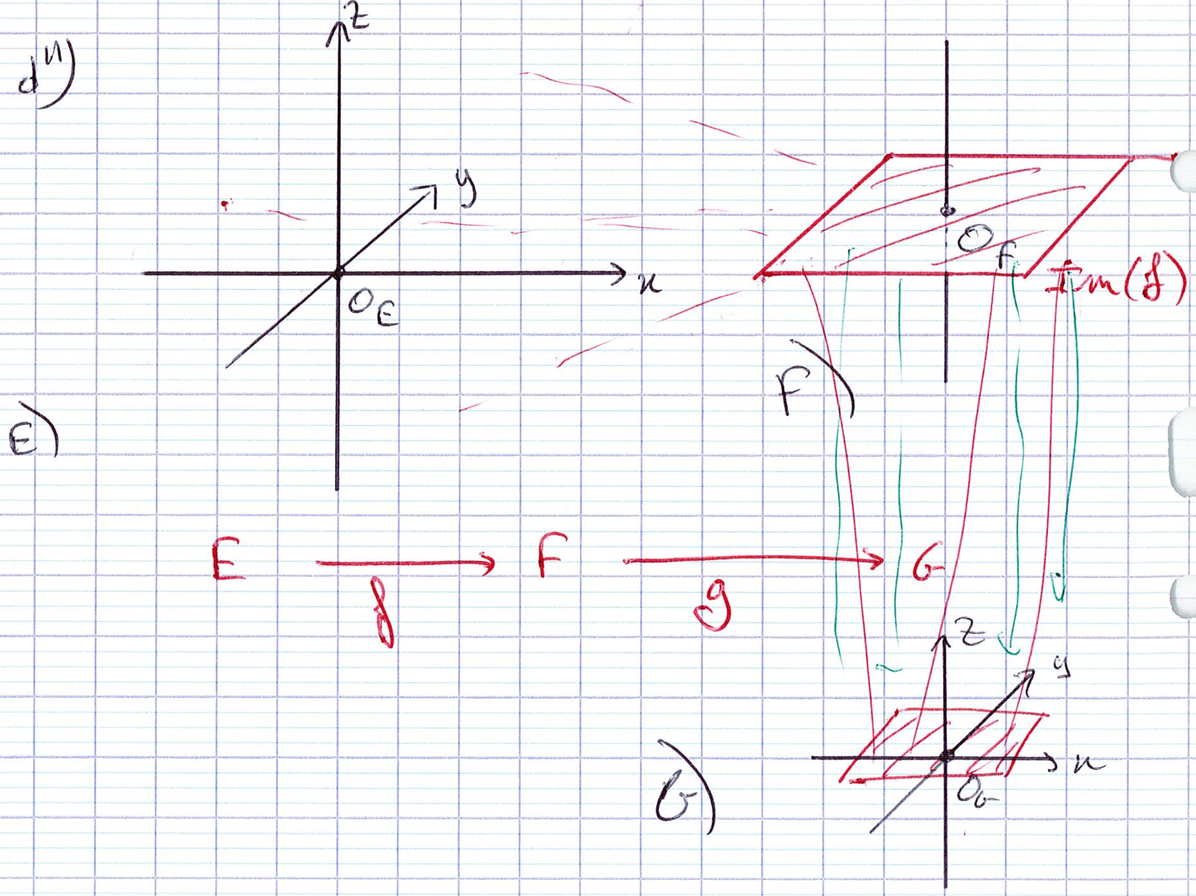
Question : $\mathrm{Im}(g\circ f)$

Fait - R^x :

1) $\mathrm{Im}(g\circ f) = g\left[\mathrm{Im}(f)\right]$

2) $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}\left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right)$

d")



D/ 1) Cela découle de propriété du poussée en avant.

On a : $\mathrm{Im}(g\circ f) = (g\circ f)[E]$

$$= g[\underbrace{f[E]}_{\mathrm{Im}(f)}] = g[\mathrm{Im}(f)].$$

2) On calcule :

Oasd $g : F \to G$ AL. On a $\mathrm{Im}(f)$ sev F

On peut restreindre g à $\mathrm{Im}(f)$.

$$g|_{\mathrm{Im}(f)} : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow G$$

On a $\mathrm{Im}\left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right) = \left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right)[\mathrm{Im}(f)]$

$$= g[\mathrm{Im}(f)]$$

$$= g[f[E]]$$

$$= (g\circ f)[E]$$

$$= \mathrm{Im}(g\circ f).$$

IV. Isomorphismes.

1. Préliminaire

Soient E, F ev

Soit $f : E \to F$ AL.

$\boxed{\text{Prop : } f \text{ bijective} \Rightarrow f^{-1} : F \to E \text{ est linéaire}}$

D/ B°

$$\underset{x,x'}{E} \xrightarrow{f} \underset{y,y'}{F}$$

Soient x $y, y' \in F$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Mq $f^{-1}(y+\lambda y') = f^{-1}(y) + \lambda f^{-1}(y')$.

Méthode notation : On pose $\begin{cases} x := f^{-1}(y) \\ x' := f^{-1}(y') \end{cases}$

Ĉ f AL, on a $f(x+\lambda x') = f(x) + \lambda f(x')$ $(*)$

Or, on a $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$

$f(x') = y'$

Donc, $(*)$ s'écrit $f(x+\lambda x') = y + \lambda y'$

On applique f^{-1} :

On obtient

$$f^{-1}\left(f(x + \lambda x')\right) = f^{-1}(y + \lambda y')$$

$$f^{-1}(y + \lambda y') = x + \lambda x'$$
$$= f^{-1}(y) + \lambda f^{-1}(y')$$

DCR.

2. Définition.

a. Isomorphisme :

Déf : Soient E, F ev, soit $f : E \to F$ AL.
On dit que f est un isomorphisme ssi :
$$\exists g : F \to E \text{ AL} : \begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$$
On note alors $E \xrightarrow[\sim]{f} F$ et on écrit f iso

Si f isomorphisme, on l'application $g \in L(F, E)$ tq $\begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$ est unique.

On la note $f^{-1} : F \to E$.
C'est l'isomorphisme réciproque à f.

Rq : L'unicité de g a été demontré dans le cadre général des monoïdes

Rq : DACOP, on a mq en 1) que

- $\left.\begin{array}{l} f \in L(E,F) \\ f \text{ bij} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ iso

- On sait que f iso $\Rightarrow f$ bij.

Prop : Ocsd $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

Alors, $\left.\begin{array}{l} f \text{ iso} \\ g \text{ iso} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f$ iso.

D/ ok composée de bij est bij.

b. Espace isomorphe.

Def : So.t E, F $\mathbb{K}$-ev

On dit que E et F sont isomorphe et on note $E \simeq F$ ssi :

$$\exists f : E \to F \text{ AL} : f \text{ iso}$$

3. Exemples :

- $\boxed{\mathbb{K}^n \text{ et } \mathbb{K}^n \text{ sont isomorphe.}}$

D/ Ocsd $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Elle est linéaire et bijective.

Prop$^{\text{d}}$:

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ isomorphe

D/

Ocsd

$$\Phi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$$

$$A \longmapsto u_A$$

- Mq Φ linéaire

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Mq $\Phi(A + \lambda B) = \Phi(A) + \lambda \Phi(B)$.

Ie, mq $u_{A+\lambda B} = u_A + \lambda u_B$ $\quad (: \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$

Soit $X \in \mathbb{K}^p$. On a :

$$U_{A+\lambda B}(X) = (A+\lambda B)X$$
$$= AX + \lambda BX$$
$$= U_A(X) + \lambda U_B(X)$$
$$= (U_A + \lambda U_B)(X)$$

D'où Φ linéaire.

· Mq Φ inj. R*. On calcule le noyau de Φ

Soit $A \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, on a $U_A = 0_{L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)}$

Mq $A = 0_{n,1}$

Ĉ $U_A = 0_{L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)}$, on a $\forall X \in \mathbb{K}^p$, $AX = 0_{n,1}$

Donc si $i \in [\![1 ; n]\!]$, on a $AE_i = 0_{n,1}$
ie $C_i(A) = 0_{n,1}$.

Donc $A = 0_{n,p}$.

Bilan : $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_{n,1}\}$; donc Φ inj

Mq Φ surj.

ie mq $\forall f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n), \exists A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : f = U_A$

On l'a déjà démontré en classifiant $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. ■

Exo : E possède une base de taille p
$\Rightarrow E \simeq \mathbb{K}^p$.

4. Automorphisme

a. Définition

Def : Soit E ev. Soit $f \in L(E)$ un automorphisme de E.

On dit que f est un automorphisme de E ssi : f iso.

On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

b. GL(E)

$GL(E)$ est le groupe linéaire de E.

Lemme : 1) $f, g \in GL(E)$
$\rightarrow g \circ f \in GL(E)$

2) $f \in GL(E) \rightarrow f^{-1} \in GL(E)$

D/ 1)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[rr, bend right, "g\circ f", "\sim"'] & E \arrow[r, "g", "\sim"'] & E \end{tikzcd}$$

2)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f", "\sim"'] & E \arrow[l, bend left, "\sim", "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

■

Prop : $(GL(E), \circ, Id_E)$ est un groupe.

c. Exemples

- $Id_E : E \to E$ est un automorphisme de E

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
(on dispose de $u_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \in L(\mathbb{K}^n)$)

Alors, on a

$$u_A \in GL(\mathbb{K}^n) \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$$

ie u_A iso $\Leftrightarrow$ A inv

Lemme : $u_{AB} = u_A \circ u_B$.

D/ Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.

On dispose de $\boxed{U_A : \underline{\mathbb{K}}^p \to \underline{\mathbb{K}}^n \quad \underline{AL}}$

$\boxed{U_B : \underline{\mathbb{K}}^q \to \underline{\mathbb{K}}^p \quad \underline{AL}}$

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbb{K}}^q \arrow[r, "U_B"] \arrow[rr, bend right, "U_A \circ U_B"'] & \underline{\mathbb{K}}^p \arrow[r, "U_A"] & \underline{\mathbb{K}}^n \end{tikzcd}$$

Mq $U_{AB} = U_A \circ U_B$

Soit $X \in \underline{\mathbb{K}}^q$, on a :

- $U_{AB}(X) = ABX$

$$= A(BX)$$
$$= A(U_B(X))$$
$$= (U_A \circ U_B)(X)$$

$\boxed{\underline{\text{Lemme}} : \quad U_{I_n} = Id_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} = Id_{\underline{\mathbb{K}}^n}}$

D/ Soit $X \in \underline{\mathbb{K}}^n$. On a

$$U_{I_n}(X) = I_n \cdot X = X$$

donc $U_{I_n} = Id_{\underline{\mathbb{K}}^n}$

Mq A inv $\Rightarrow U_A$ iso.

Osq A inv. On dispose de A^{-1}.

Posons $B := A^{-1}$.

On a $AB = I_n$. donc, on a $U_{AB} = U_{I_n} = Id_{\mathbb{K}^n}$

De plus, $U_{AB} = U_A \circ U_B$.

Ainsi, $\boxed{U_A \circ U_B = Id_{\mathbb{K}^n}}$.

De m̄, ĉ $BA = I_n$, on a $\boxed{U_B \circ U_A = Id_{\mathbb{K}^n}}$

Ainsi, U_A est inversible et on a

$U_A^{-1} = U_B$ ie $U_A^{-1} = U_{A^{-1}}$

Réciproquement, U_A inv (iso) $\Rightarrow A$ inv.

D① Contraposition.

Mq A non inv $\Rightarrow U_A$ non inv.

D'emblée, on a $\boxed{Ker(A) = Ker(U_A)}$

Osq A non inv.

Donc, d'après le CNI, $Ker(A) \neq \{0_{n,1}\}$.

Donc, $\operatorname{Ker}(U_A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$

Donc U_A n'est pas inj.

En particulier U_A n'est pas un iso.

$\Leftarrow$ Osq U_A iso. Fixons donc $g \in L(\mathbb{K}^n)$
tq $g \circ U_A = U_A \circ g = Id_{\mathbb{K}^n}$

On, $\Phi : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow L(\mathbb{K}^n)$ est surj.

$$M \longmapsto U_M$$

Fixons donc $B \in M_n(\mathbb{K})$ tq $g = U_B$

On a donc $U_A \circ U_B = Id_{\mathbb{K}^n}$

Ie $U_{AB} = U_{I_n}$

On, $\Phi : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow L(\mathbb{K}^n)$ inj

$$M \longmapsto U_M$$

Donc, $\hat{c}$ $U_{AB} = U_{I_n}$, on a $\boxed{AB = I_n}$

De même, $\boxed{BA = I_n}$.

D'où A inv.

5. Cas $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$!!

Prop :
$$\mathbb{K}^p \simeq \mathbb{K}^n \Rightarrow p = n$$

D/ Osq $\mathbb{K}^p \simeq \mathbb{K}^n$. Fixons donc $f : \mathbb{K}^p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$ iso

- $\hat{c}$ f inj, DACQP, on a $p \leq n$.
- $\hat{c}$ f surj, DACQP, $p \geq n$.

Théorème (on se place dans le cas où la dimension de l'espace de départ est la même que celle de l'espace d'arrivée)

Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ AL

les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) f est injective ie $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$

(2) f est surjective ie $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^n$

(3) f est un isomorphisme ie f bijective.

Rq : Théorème de type $-50\,\%$

D/ Ocsd la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$

DACQP, on a :

1) f inj $\Leftrightarrow (f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n))$ libre

2) f surj $\Leftrightarrow (f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n))$ génératrice de $\mathbb{K}^n$.

Or, on a mq si $(X_1, \dots, X_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$

Alors, on a :

$(X_1, \dots, X_n)$ libre $\Leftrightarrow (X_1, \dots, X_n)$ génératrice de $\mathbb{K}^n$

$\Leftrightarrow (X_1, \dots, X_n)$ base $\mathbb{K}^n$

$\Leftrightarrow (X_1 | X_2 | \dots | X_n)$ inv

On a donc f inj $\Leftrightarrow f$ surj. DLR ∎

V. Définition d'une application linéaire dans une base.

Soit E ev.
Fixons $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une base de E

1. Deux AL coïncidant sur une base sont égales.

Prop : Soient $f, g : E \to F$ AL.

Osq $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $f(x_i) = g(x_i)$

Alors $f = g$.

D/ ($\Leftarrow$)

Mq $f = g$. Soit $x \in E$.

Ĉ $(x_1, \dots, x_p)$ une base de E.

Fixons $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = x$

On a donc $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g(x_i)$

$= g\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right)$

$= g(x)$ ■

Rq Dorénavant : si je veux mq $f = g$.

Il me suffit de le faire sur une base

2. Définition d'une AL sur une base !!

a. le principe

On dispose de E, F ev.
On dispose de $(x_1, \dots, x_p)$ une base de E.

On souhaite définir $\boxed{f : E \to F}$

Alors : 1) Il suffit, pour définir f, de définir les images $y_i = f(x_i)$

2) Pour toute famille $(y_1, \dots, y_p) \in F^p$, il possède de définir f en posant "$f(x_i) = y_i$".

On dit alors :

"Définissons $f \in L(E, F)$ en imposant

$\forall i \in [\![1 ; p]\!], \quad f(x_i) = y_i$".

On dira qu'on a définit f par décret.

b. Exemple

Soit $N \in \mathbb{N}$.
Pour $i \in [\![0 ; N]\!]$, on pose $P_i := X^{2i} + 2iX^2 - 1$

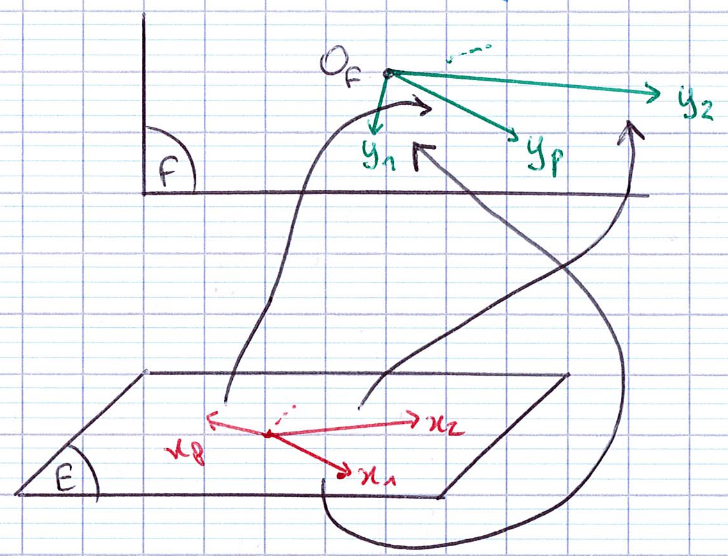
Comme $(1, X, \dots, X^N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

DAC, considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_N[X], \mathbb{R}[X])$

l'unique application linéaire vérifiant :

$$\forall i \in [\![0 ; N]\!], \quad f(X^i) = P_i$$

d^n)



Ici, on a $f(X^2 + 2X + 1)$

$$= f(X^2) + 2f(X) + f(1)$$

$$= X^4 + 4X^2 - 1 + 2(X^2 + 2X^2 - 1) + 0$$

$$= X^4 + 10X^2 - 3$$

c. L'application $CL_{\mathcal{X}}$

Def : Soit E ev

Soit $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E.

L'application linéaire $CL_{\mathcal{X}} : \mathbb{K}^p \to E$ est définie par :

$$CL_{\mathcal{X}} : \mathbb{K}^p \longrightarrow E$$
$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

D/ Mq $CL_{\mathcal{X}} : \mathbb{K}^p \to E$ est une AL.

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$

$$CL_{\mathcal{X}}\big((\lambda_1, \dots, \lambda_p) + \alpha(\mu_1, \dots, \mu_p)\big)$$

$$= CL_{\mathcal{X}}(\lambda_1 + \alpha\mu_1 + \dots \lambda_p + \alpha\mu_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \alpha\mu_i)x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \alpha \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i$$

$$= CL_{\mathcal{X}}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) + \alpha\big(CL_{\mathcal{X}}(\mu_1, \dots, \mu_p)\big)$$

d. Propriétés de $\mathcal{X}$ détectables sur $CL_{\mathcal{X}}$

Prop $\mathcal{R}$:

1) $CL_{\mathcal{X}}$ inj $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}$ libre $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(CL_{\mathcal{X}}) = \{(0,\dots,0)\}$

2) $CL_{\mathcal{X}}$ surj $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}$ génératrice de E.

3) $CL_{\mathcal{X}}$ iso $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X}$ base de E

D/ 1) On a $\mathrm{Ker}(CL_{\mathcal{X}}) = \left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \mid \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E\right\}$

AF

D/ 2) AF 3) AF

e. L'application coords_B

Def : Soit E ev. Soit $B \in E^p$ une base de E.

Alors, l'AL $\mathrm{coords}_B : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$ est définie par :

$$\mathrm{coords}_B := CL_B^{-1}$$

Rq : Concrètement : soit $x \in E$.

Écrivons $B = (x_1,\dots,x_p)$ avec $\forall i,\ x_i \in E$.

Comme B une base, fixons $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = CL_B(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$$

$CL_B^{-1}(\cdot)$

Donc $CL_B^{-1}(x) = (\lambda_1,\dots,\lambda_p)$

Ie, $\boxed{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \mathrm{coords}_{\mathcal{B}}(x)}$

Ainsi, $\mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}(x)$ est le p-uplet des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

f. Enoncé précis

Prop : Soit E ev munis d'une base $(x_1, \dots, x_p)$ $\in E^p$

$\forall (y_1, \dots, y_p) \in F^p$, $\exists ! f : E \to F$ AL : $\forall i \in [\![1;p]\!], f(x_i) = y_i$

g. Démonstrations

- Déjà : l'unicité découle de 1)
- Existence : D/

Soit $(y_1, \dots, y_p) \in F^p$. On pose tout simplement,

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i \end{array}$$ où on a écrit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

Déjà : f est AL.

Puis : On a, pour $i_0 \in [\![1;p]\!]$,

$$f(x_{i_0}) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \quad \text{où } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

i_0

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$$

D'où $\forall i$, $f(x_i) = y_i$

On a trouvé une AL correspondant à notre décrit. 1)

D/ 2) On fait la même chose en utilisant coords_B à la place de " $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ "

On pose : $f : E \xrightarrow{\text{coords}_B} \mathbb{K}^p \xrightarrow[CL_{(y_1, \dots, y_p)}]{} F$

Ie on pose $f := CL_{(y_1, \dots, y_p)} \circ \text{Coords}_B$

On a bien $f \in L(E, F)$ en tant que composé AL

Soit $i_0 \in [\![1 ; p]\!]$, on calcule :

$$f(x_{i_0}) = \left(CL_{(y_1, \dots, y_p)} \circ \text{Coords}_B\right)(x_{i_0})$$

$$= CL_{(y_1, \dots, y_p)}\left(\text{Coords}_B(x_{i_0})\right)$$

Or, $\text{coords}_B(x_{i_0}) = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i_0}}{1}, 0, \dots, 0)$
car $B = (x_1, \dots, x_p)$

Donc $CL_{(y_1, \dots, y_p)}\left(\text{Coords}_B(x_{i_0})\right)$

$$= CL_{(y_1, \dots, y_p)}\left((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\right)$$

$$= y_{i_0}.$$

Ce résultat peut s'énoncer :

Théorème : Soit E ev munis d'une base $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.

Soit F ev. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi : L(E,F) &\xrightarrow{\sim} F^p \\ f &\longmapsto (f(x_1), \dots, f(x_p)) \end{aligned}$$

est un isomophisme.

D/ • $\Phi : L(E,F) \longrightarrow F^p$ <u>AL</u> : <u>ok</u>.

• <u>Φ surj</u> : On vient de le faire.

• <u>Φ inj</u> : ok d'après 1).

3. Définition d'une AL sur une somme directe

a Deux AL coïncidant sur chacun des facteurs d'une somme directe sont égales.

Soit E, F ev. Soient $f, g : E \to F$

On écrit $E = E_1 \oplus E_2$ avec E_1, E_2 sev E

Prop

$$\left.\begin{aligned} f|_{E_1} &= g|_{E_1} \\ f|_{E_2} &= g|_{E_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = g$$

D/ $x = x_{E_1} + x_{E_2}$

donc
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_{E_1} + x_{E_2}) \\ &= f(x_{E_1}) + f(x_{E_2}) \\ &= g(x_{E_1}) + g(x_{E_2}) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

b. Cas de deux sev

Soit E, F ev. On écrit $E = E_1 \oplus E_2$ avec E_1, E_2 sev E

Prop :
$$\forall f_1 \in L(E_1, F),\ \forall f_2 \in L(E_2, F),$$
$$\exists!\, f \in L(E, F) : f|_{E_1} = f_1 \text{ et } f|_{E_2} = f_2$$

Principe : Pour définir $f : E \to F$ AL il suffit de définir " la valeur " de f sur E_1 et " la valeur " de f sur E_2.

Prop : L'AL $\psi : L(F) \longrightarrow L(E_1, F) \times L(E_2, F)$
$$f \longmapsto (f|_{E_1}, f|_{E_2})$$
est un isomorphisme

D/ Astuce : Ccsd $\varphi : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$$

- Déjà : φ est AL.
- Comme $E_1 + E_2 = E$, on a φ surj
- Comme $E_1 \oplus E_2 = E$ (Somme directe), on a φ inj.

Bilan : φ est un isomorphisme.

φ est un iso, on note $\psi := \varphi^{-1}$, $\psi(x)$ est l'unique couple $(x_{E_1}, x_{E_2}) \in E_1 \times E_2$ tq $x = x_{E_1} + x_{E_2}$. D'une certaine façon, $\psi(x)$ est le couple des coordonnées de x dans la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$

Soient $f_1 : E_1 \to F$ et $f_2 : E_2 \to F$ des AL

On pose $g : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$

$(x_1, x_2) \longmapsto f_1(x_1) + f_2(x_2)$

On a g AL.

Enfin, pose $f : E \xrightarrow{\psi} E_1 \times E_2 \xrightarrow{g} F$

Ie on pose $f := g \circ \psi$.

On a bien $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$. AF

c. Généralisations.

On a la même chose si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Exo À énoncer et à démontrer AC.

VI. Projections et symétrie !!!

1. Définition des projections

Soit E ev, qu'on décompose.

Soient F, G des sev de E tq

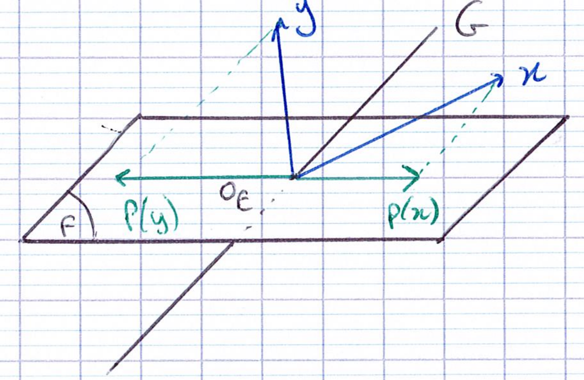
$$\boxed{E = F \oplus G}$$

Def : le projecteur sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme de E $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$p(x) = x_F$ pour $x \in E$ s'écrivant $x = x_F + x_G$.

Idée : le projecteur $p : E \to E$ sur F parallèlement à G vient sélectionner la composante de x sur F, dans la décomposition $E = F \oplus G$.

d^n)



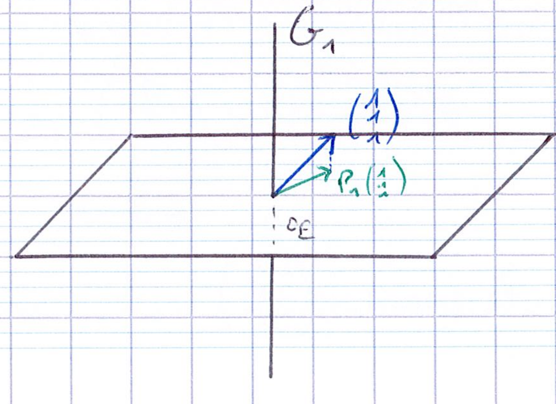
E)

Exemples :

Osd $E := \mathbb{R}^3$ et $F := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

On pose $G_1 := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $G_2 := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

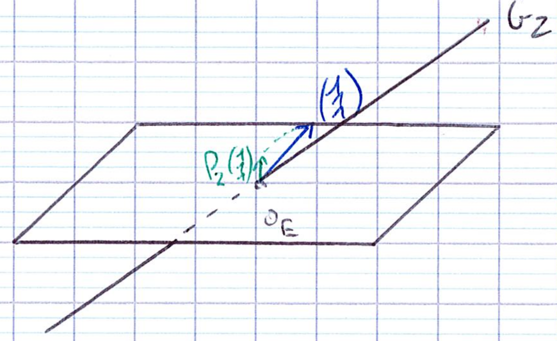
d^n)



$\mathbb{R}^3$)

d^{u})

$\mathbb{R}^3$)



• On note $P_1 : \underline{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}^3}$ le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G_1.

• On note $P_2 : \underline{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}^3}$ ______________ ______________ parallèlement à G_2.

Ocsd $x_0 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On veut calculer $P_1(x_0)$ et $P_2(x_0)$

(On admet $\underline{\mathbb{R}^3} = F \oplus G_1 = F \oplus G_2$)

<u>Que vaut $P_1(x_0)$?</u>

Il faut décomposer x_0 dans $\underline{\mathbb{R}^3} = F \oplus G_1$.

On a $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in G_1}$

Donc, $P_1(x_0) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

On a $P_2(x_0) = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in G_2}$

D'où $P_2(x_0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

2. Propriété des projecteurs.

Soit E ev. Soit F, G sev E tq $\boxed{E = F \oplus G}$.

Soit $x \in E$.

On note p : le projecteur de E sur F parallèlement à G.

a. Qlq réflexes.

Fait-R^x ① : $x \in F \Rightarrow p(x) = x$

D/ On écrit $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$

D'où $p(x) = x$.

Fait-R^x-② : $x \in G \Rightarrow p(x) = 0_E$

D/ ok

b. Points fixe d'un endomorphisme.

Soit $f \in L(E)$.

Alors, on note* ptsfixe$(f) := \{ x \in E \mid f(x) = x \}$

$$\boxed{\text{Fait-R}^x : \quad \text{Pts fixe}(f) = \text{Ker}(f - Id_E)}$$

D/ • Déjà, comme $f \in L(E)$ et $\hat{c}$ $Id_E \in L(E)$

On a bien $f - Id_E \in L(E)$.

• Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes.

$Pts\,fix(f) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0_E$

$\Leftrightarrow (f - Id_E)(x) = 0_E$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$ •

C. Points fixe et noyau d'un projecteurs.

On vient de voir que :

• $F \subset \mathrm{Ker}(f - Id_E)$

• $G \subset \mathrm{Ker}(p)$

Prop : 1) $Pts\,fixe(p) = \mathrm{Ker}(f - Id_E) = F$

2) $\mathrm{Ker}(p) = G$.

D/ Soit $x \in E$, qu'on écrit $x = x_F + x_G$ avec $\begin{cases} x_F \in F \\ x_G \in G \end{cases}$.

1) Osq $x \in pts\,fixe(p)$

Donc $x = p(x)$ Or, $\boxed{p(x) = x_F}$

$\hat{c}$ $x_F \in F$ on a $x = p(x) \in F$.

2) Osq $x \in \mathrm{Ker}(p)$, on a donc $p(x) = x_F = 0_E$

Ĉ $x = x_F + x_G$ on a $x = x_G \in G$.

D'où $x \in G$

d. Projecteurs complémentaires.

Notons q le projecteur de E sur G parallèlement à F.

$$\boxed{\text{Prop : On a } p + q = Id_E}$$

D/ Soit $x \in E$ qu'on écrit $x = x_F + x_G$ avec $\begin{cases} x_F \in F \\ x_G \in G \end{cases}$

On a $(p+q)(x) = x_F + x_G = x$

D'où $p+q = Id_E$ ■

3. Caractérisation des projecteurs.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Prop : Soit } p \text{ un projecteur.} \\ \text{Alors } p \circ p = p \end{array}}$$

Ie, on a $p^2 = p$

D/ Déjà, effectivisons le fait que p est un projecteur.

On note E l'ev "ambiant" tq $p \in \mathcal{L}(E)$

Fixons F, G sev de E tq 1) $E = F \oplus G$
2) p est le projecteur de F parallèlement à G.

Mq $p^2 = p$.
Soit $x \in E$. On a :

$p(x) \in F$. Donc $p(p(x)) = p(x)$ puisque $\text{Pts fixe}(p) = F$

Ainsi $(p \circ p)(x) = p(x)$.

Prop : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p \circ p = p$

Alors : 1) p est un projecteur
2) Plus précisément, on a :
a) $\boxed{E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)}$

b) p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Rq : Soit E ev qu'on écrit $E = F \oplus G$ avec F, G sev E.

Notons $\pi : E \to E$ le projecteur de E sur F parallèlement à G.

Prop$^{R^x}$: $F = \mathrm{Im}(\pi) = \ker(\pi - Id_E) = \mathrm{Pts\,fixe}(\pi)$

⚠ Ceci n'est pas du tout vraie en général

D/Prop · Déjà : On a clairement $\mathrm{Im}(\pi) \subset F$

· Réciproquement : Soit $x_F \in F$, on a
$\pi(x_F) = x_F$
Donc $x_F \in \mathrm{Im}(\pi)$.
d'où $F \subset \mathrm{Im}(\pi)$.

D/Prop Mq $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

· Mq $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}$. (Ie, mq $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont en somme directe.

Soit $\boxed{x \in \mathrm{Im}(p)} \cap \boxed{\ker(p)}$.

Comme $x \in \mathrm{Im}(p)$, on l'écrit $x = p(a)$ où $a \in E$.

Comme $x \in \ker(p)$, on a $p(x) = 0_E$

Or, $p \circ p = p$. Donc :

$$p(p(a)) = 0_E$$

Ie $p(a) = 0_E$; ie $x = 0_E$.

Mq $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$. (Mq la somme est pleine)

On procède par analyse synthèse

Soit $x \in E$. Mq $\exists (x_I, x_K) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$:

$$x = x_I + x_K$$

ANALYSE : $\boxed{R①}$ Soient $(x_I, x_K) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$ tq $x = x_I + x_K$

Comme $x_I \in \mathrm{Im}(p)$, fixons $a \in E$ tq $p(a) = x_I$

On a donc $\boxed{x = p(a) + x_K}$.

$\boxed{R②}$ Soit $a \in E$, soit $x_K \in \mathrm{Ker}(p)$ tq

$$\boxed{x = p(a) + x_K} \quad (*)$$

En appliquant p à $(*)$, on a :

$$p(x) = p(p(a) + x_K)$$

$$= p(a) + p(x_K)$$

$$= p(a) + 0_E$$

Donc $\boxed{p(x) = p(a)}$

Or, $p(x) = p(a) + x_K$

donc $x_K = x - p(a) = x - p(x)$

SYNTHESE : Posons $x_K := x - p(x)$

On a $\boxed{x = (x - p(x)) + p(x)}$

$= x_K + p(x)$

Mq $x_K \in \mathrm{Ker}(p)$.

On a $p(x_K) = p(x - p(x))$

$= p(x) - p(p(x))$

$= p(x) - p(x)$

$= 0_E$

Donc $x_K \in \mathrm{Ker}(p)$

Comme $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, on a bien
$x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$.

2.b

D/ Notons $F := \mathrm{Im}(p)$ et $G := \mathrm{Ker}(p)$

Soit $\pi : E \to E$ le projecteur sur F parallèlement à G.

Mq $\pi = p$.

Soit $x \in E$. R^x, on décompose x dans la somme directe $E = F \oplus G$

Ecrivons donc $x = p(a) + x_K$ avec $a \in E$ et $x_K \in \mathrm{Ker}(p)$.

Déjà, on a $\pi(x) = \pi(p(a) + x_K)$

$= \pi(p(a)) + \pi(x_K)$

$= p(a) + 0_E$

De même, $p(x) = p(p(a)) + p(x_K)$

$= p(a) + 0_E$

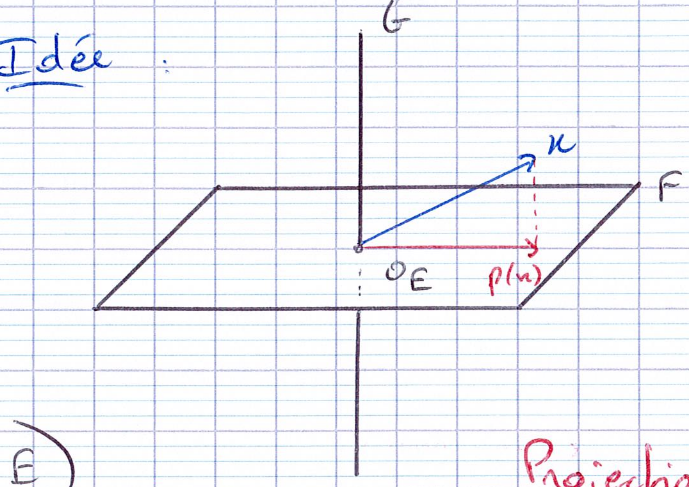
D'où $p(x) = p(a) = \pi(x)$

Donc $p = \pi$.

$\boxed{\text{Ainsi, } p \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Im}(p) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(p).}$

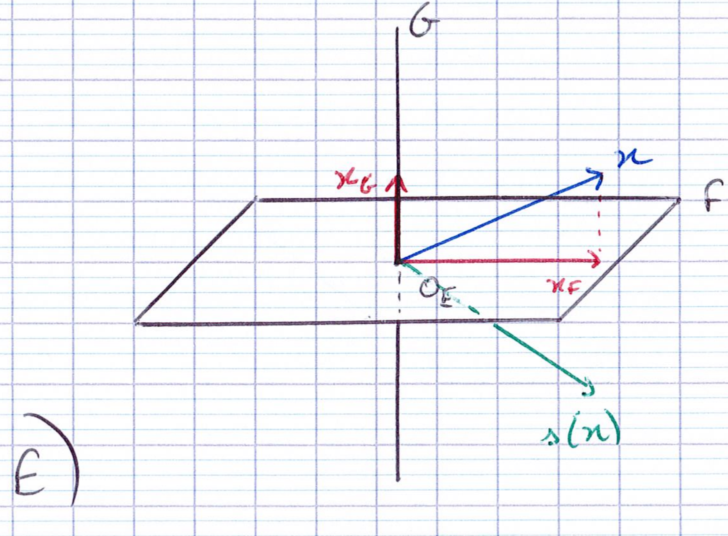
4. Symétrie.

Idée :



Projection sur F parallèlement à G

Ocsd $s : E \to F$ la symétrie de E par rapport à F, parallèlement à G. On a



a. Définition.

Soit E ev, soient F, G sev E tq $E = F \oplus G$.

Def : la symétrie de E, par rapport à F, parallèlement à G est l'endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ tq :

$$\boxed{s(x) = x_F - x_G} \quad \text{pour tout } x \in E,$$

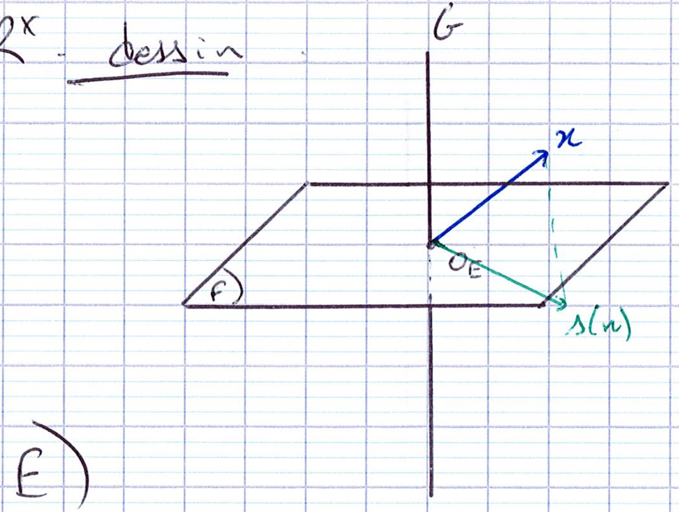
s'écrivant $x = x_F + x_G$ avec $\begin{cases} x_F \in F \\ x_G \in G \end{cases}$

b Propriétés.

Ocsd $s : E \to E$ la symétrie de E par rapport à F, parallèlement à G.

⚠ Rq : On verra que $\begin{cases} \mathrm{Ker}(s) = \{0_E\} \\ \mathrm{Im}(s) = E \end{cases}$

R^x - dessin



$$\boxed{\textbf{Prop} : \mathrm{Pts\,fixe}(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = F}$$

D/ Soit $x \in E$ qu'on écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

OALES : $x \in \text{Ptsfixe}(s)$

$\Leftrightarrow \quad s(x) = x$

$\Leftrightarrow \quad x_F - x_G = x_F + x_G$

$\Leftrightarrow \quad 2x_G = 0_E$

$\Leftrightarrow \quad x_G = 0_E \quad (\text{car } 2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow \quad x \in F$ ∎

Notons $\text{AntiPtsfixes}(f) := \{x \in E \mid f(x) = \quad \}$ si $f \in L(E)$

Fait-R* : $\text{Antiptsfixe}(f) = \ker(f + Id_E)$

Prop : $G = \text{Antiptsfixe}(s) = \ker(s + Id_E)$

D/ De même Ⓣ $x = x_F + x_G$.
OALES

$s(x) = -x$

$\Leftrightarrow \quad x_F - x_G = -x_F - x_G$

$\Leftrightarrow \quad x_F = 0_E$

$\Leftrightarrow \quad x \in G$. ■

$$\boxed{\textbf{Prop :} \quad s^2 = Id_E}$$

D/ Soit $x \in E$ qu'on écrit (1) $x = x_F + x_G$

On a $s(x) = x_F - x_G$

Donc $s(s(x)) = s(x_F - x_G)$

$= x_F - (-x_G)$

$= x_F + x_G = x$ ■

COROLLAIRE : 1) $s \in GL(E)$ et $s^{-1} = s$.

2) $Ker(s) = \{0_E\}$ et $Im(s) = E$

D/ ok

Rq : Si f inv, on a $f = f^{-1} \Leftrightarrow f^2 = Id_E$

c. Caractérisation.

Prop : Soit $s \in L(E)$ tq $s^2 = Id_E$.

1) $E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E)$

2) s est la symétrie de E par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$.

D/. Somme directe.

$x \in \ker(s - Id_E) \cap \ker(s + Id_E)$

donc $s(x) = x$ et $s(x) = -x$ ie $x = -x$

donc $2x = 0_E$ donc $x = 0_E$

Somme pleine.

Soit $x \in E$.

ANALYSE : Soient $\begin{cases} x_+ \in \ker(s - Id_E) \\ x_- \in \ker(s + Id_E) \end{cases}$,

On a $s(x_+) = x_+$
$s(x_-) = -x_-$

tels que $x = x_+ + x_-$

On $s(x) = x_+ - x_-$

Donc $x + s(x) = 2x_+$

Donc $\boxed{x_+ = \frac{x+s(x)}{2}}$

et $\boxed{x_- = \frac{x-s(x)}{2}}$

SYNTHESE : Posons $\begin{cases} x_+ := \frac{x+s(x)}{2} \\ x_- := \frac{x-s(x)}{2} \end{cases}$

On a $x = x_+ + x_-$

Et $s(x_+) = \frac{s(x) + \overbrace{s(s(x))}^{=x}}{2}$

$= x_+$ donc $x_+ \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$

De même $s(x_-) = -x_-$ ie $x_- \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$

2) Notons $F := \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$
$G := \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Osd $r : E \to E$ la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G.

Mq $s = r$.

Soit $x \in E$ qu'on écrit $x = x_F + x_G$.

- Déjà : On a $t(x) = x_F - x_G$
- Puis : On a $s(x) = \underbrace{s(x_F)}_{x_F} + \underbrace{s(x_G)}_{-x_G}$

Car $x_F \in F = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$

VII Forme linéaire et hyperplan (Soit E ev)

Rappel : f est une forme linéaire sur E
ssi : $\boxed{f : E \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{AL}}$

On pose E^* l'ensemble des formes linéaire
$E^* := L(E, \mathbb{K})$

1. Nulles ou surjectives.

Prop R* Soit $f : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire
Alors : Ou bien f nulle, ou bien f surj.

D/ Osq f non nulle. Fixons donc $x_0 \in E$
tq $f(x_0) \neq 0$

Mq f surj.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Astuce - R* $f(x_0)$ est un nombre

Etant non nul, on peut diviser par $f(x_0)$

Posons $x := \frac{\lambda}{\boxed{f(x_0)}} \cdot x_0$ $\in E$

$\in \mathbb{K}$

$\in \mathbb{K}$

On a $f(x) = f\left(\frac{\lambda}{f(x_0)} \cdot x_0\right)$

$= \frac{\lambda}{f(x_0)} \cdot f(x_0)$

$= \lambda$ ■

2. Hyperplans

Idée : Un hyperplan H de E c'est un sev de E de dimension 1 de moins que E.

a Définition.

Def : Soit H sev E. On dit que H est un hyperplan de E ssi :

$\exists \varphi \in E^* : (\varphi \text{ non nulle et } H = \operatorname{Ker}(\varphi))$

b. Hyperplans de $\mathbb{K}^n$.

Prop : Soit H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Alors, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tq

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}$$

Ex : Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Alors, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tq

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 0 \right\}$$

D/ Par définition : fixons $\varphi \in (\mathbb{K}^n)^*$ non nul

tq $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$

D'après la classification de $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$,

fixons $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tq

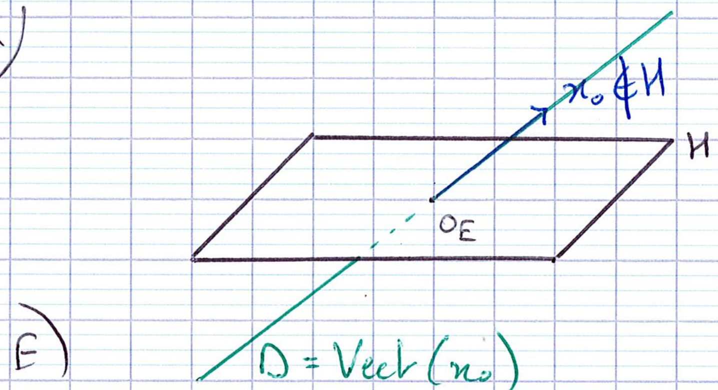
$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

Comme $\varphi \underset{L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})}{\neq} 0$, on a $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$

OCR ▪

c. Caractérisation des hyperplans

d^n)



Prop-R*: Soit H un hyperplan de E

1) Il existe $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ tq $\boxed{E = H + \mathrm{Vect}(x_0)}$
(ie H possède un supplémentaire qui est une droite)

2) $\forall x_0 \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$

$D^{2)}$ (R*), j'effectivise !

Comme H un hyperplan de E, fixons $\varphi \in E^*$ non nul tq $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$.

Soit $x_0 \in E \setminus H$. Comme $x_0 \notin H$, on a

$x_0 \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ car $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$

On a donc $\varphi(x_0) \neq 0$

- Somme directe :

Mq $H \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0_E\}$

Soit $x \in H \cap \mathrm{Vect}(x_0)$

Fixons donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $x = \lambda x_0$

Comme $x \in H$, on a $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

donc $\varphi(x) = 0$

Donc $\varphi(\lambda x_0) = 0$

ie $\lambda \varphi(x_0) = 0$

D'où $\boxed{\lambda = 0}$

D'où $x = 0$. D'où la somme directe.

- Somme pleine.

Soit $x \in E$.

ANALYSE : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $x_H \in H$ tq $x = \lambda x_0 + x_H$.

On a donc $\varphi(x) = \varphi(\lambda x_0 + x_H)$

$= \lambda \varphi(x_0)$

Donc $\boxed{\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}}$

Donc $\boxed{x_H = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0}$

SYNTHESE : On pose $\lambda := \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$

On a

$$x = \underbrace{\lambda x_0}_{\in \mathrm{Vect}(x_0)} + \underbrace{(x - \lambda x_0)}_{\in H\ ?}$$

Comme $H = \ker(\varphi)$, calculons $\varphi(x - \lambda x_0)$

On a $\varphi(x - \lambda x_0)$

$= \varphi(x) - \lambda \varphi(x_0)$

$= \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \cdot \varphi(x_0)$

$= 0$

D 1) Mq $\exists x_0 \in E \setminus \{0_E\}$: $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$

Il suffit de mq $E \neq H$

On a $E \neq H$ car φ est non nulle.
On peut donc fixer $x_0 \in E$ tq $\varphi(x_0) \neq 0$

Comme $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $x_0 \notin H$.

Prop : Soit H sev E. Soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ telle que

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$$

Alors, H est un hyperplan de E.

Lemme : L'AL $\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathrm{Vect}(x_0) \\ \lambda & \longmapsto & \lambda x_0 \end{array}$ est un isomorphisme.

D/ Lemme :
- AL : ok
- Surjectivité : par définition.
- Injectivité : $\lambda \in \ker(\theta)$

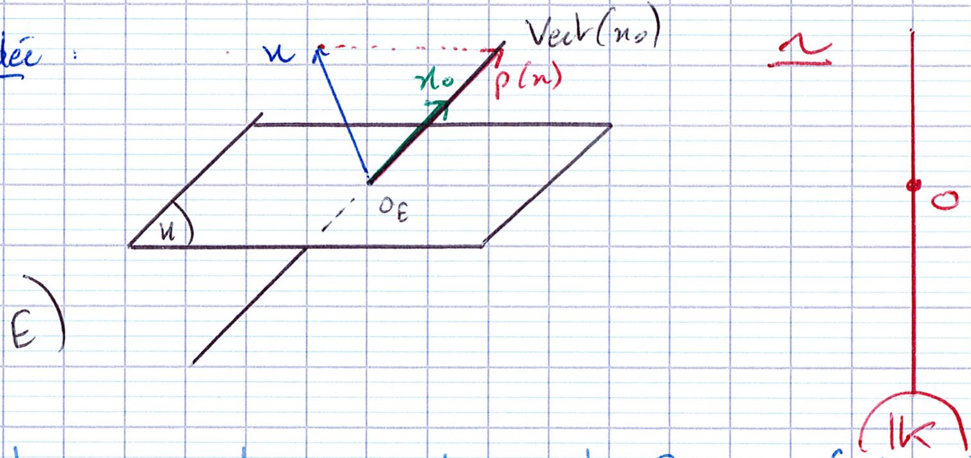
$\Leftrightarrow \theta(\lambda) = 0_E$

$\Leftrightarrow \lambda x_0 = 0_E$

$\Leftrightarrow \lambda = 0_E$ car $x_0 \neq 0_E$

D/ Prop On a $H \oplus \mathrm{Vect}(x_0) = E$.
On cherche $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tq $H = \ker(\varphi)$

Idée :



Notons p le projecteur de E sur $\mathrm{Vect}(x_0)$ parallèlement à H.

Posons $\varphi := E \xrightarrow{p|^{\mathrm{Vect}(x_0)}} \cancel{E}\ \mathrm{Vect}(x_0) \xrightarrow{\theta^{-1}} \mathbb{K}$

Plus précisément :

1) Comme $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(x_0)$
On peut considérer $p|^{\mathrm{Vect}(x_0)} : E \to \mathrm{Vect}(x_0)$

2) On pose $\varphi := \theta^{-1} \circ p|^{\mathrm{Vect}(x_0)}$

Automatiquement, on a $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Soit $x \in E$. On a $x \in \ker(\varphi)$

$$\iff \varphi(x) = 0$$

$$\iff \theta^{-1}\left(p|^{\mathrm{Vect}(x_0)}(x)\right) = 0$$

$$\iff \theta^{-1}\left(p(x)\right) = 0$$

$$\iff p(x) = 0 \quad (\text{car } \theta(0) = 0)$$

$\Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\Leftrightarrow \quad x \in H$. ■

Bilan : 1) Si H possède une droite supplementaire, c'est un hyperplan.

2) Si H un hyperplan, H possède une droite supplementaire

3) Mieux, toute droite D non incluses dans H est supplémentaire à H

3. Forme linéaire associés à un même hyperplan.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Prop. puissante : Soient } \varphi, \psi \in E^* \text{ tq} \\ \qquad \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi). \\ \text{Alors, } \exists \lambda \in \mathbb{K} : \varphi = \lambda \psi\end{array}}$$

D/

• Déjà : si φ est nulle, alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = E$

Donc $\mathrm{Ker}(\psi) = E$ donc ψ est nulle

donc $\varphi = \psi$.

<u>Osq φ non nulle.</u> donc $H := \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ est un hyperplan de E.

DACQP, fixons $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ tq

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$$

On a $x_0 \notin H$ (sinon on aurait $H \cap \mathrm{Vect}(x_0) \neq \{0_E\}$)

Donc $x_0 \notin \mathrm{Ker}(\psi)$ ie $\psi(x_0) \neq 0$

Posons $\lambda_0 := \dfrac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$. Mq $\varphi = \lambda_0 \psi$.

Soit $x \in E$ qu'on écrit $x = x_H + \mu x_0$ avec $\begin{cases} x_H \in H \\ \mu \in \mathbb{K} \end{cases}$.

Calculons $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_H + \lambda x_0) \\ &= \underbrace{\varphi(x_H)}_{\substack{=0 \\ \text{car } x_H \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H}} + \mu \varphi(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 \cdot \psi(x) &= \lambda_0 \left(\psi(x_H) + \mu \psi(x_0) \right) \\ &= \lambda_0 \mu \psi(x_0) \\ &= \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \cdot \mu \psi(x_0) \\ &= \mu \varphi(x_0) = \varphi(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$