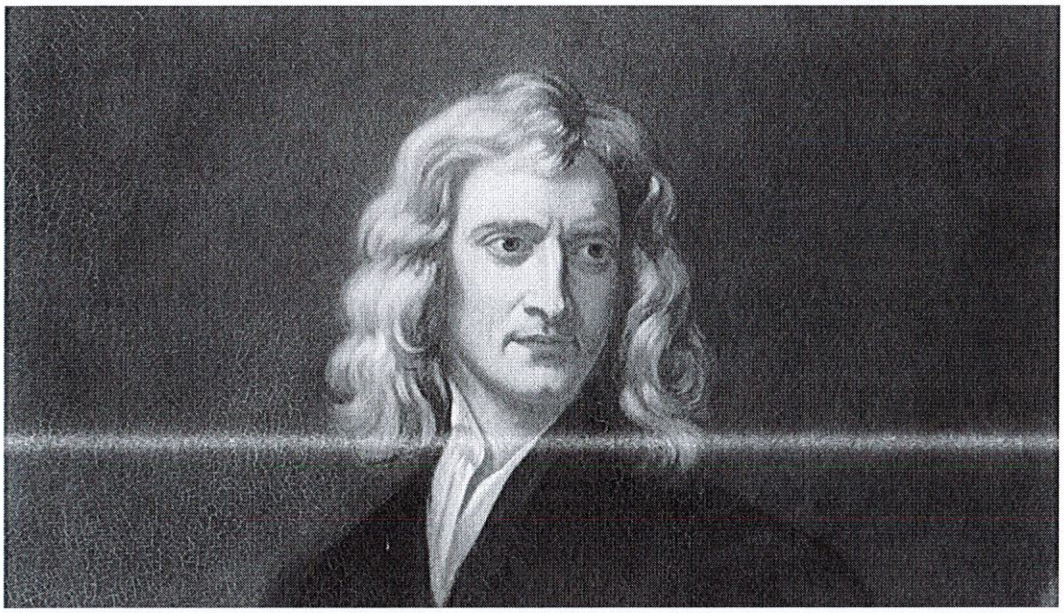
Chapitre 20

Limites et comparaisons



Isaac NEWTON
(1642 – 1727)

« Je ne sais pas ce que j'ai pu sembler être aux yeux du monde, mais à mes yeux je n'ai été qu'un enfant, jouant sur le rivage et heureux de trouver de temps à autre un galet plus lisse ou un coquillage plus beau que les autres, alors que le grand océan de la vérité s'étendait devant moi, encore inexploré. »

Isaac Newton
The Portsmouth Papers

Newton

Physicien, mathématicien, alchimiste, passionné d'astronomie, grand argentier de l'État et homme d'Église, Sir Isaac Newton fut un génie comme l'histoire en a peu connu.

Père du principe de la gravitation universelle, des lois du mouvement, du principe d'action-réaction, du télescope, du calcul différentiel... Newton a marqué l'histoire par son œuvre, impressionnante tant par sa profondeur que son étendue.

1

Mq $\frac{\exp(\sqrt{x})}{2} \gg x^{42}$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

On a $\frac{\exp(x)}{x^{84}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ par croissance comparée

Or $\sqrt{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$

Donc, par composition des limites :

$$\frac{\exp(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{84}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

ie $\frac{\exp(\sqrt{x})}{x^{42}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $\frac{\exp(\sqrt{x})}{2x^{42}} \to \infty$

et $\boxed{\frac{\exp(\sqrt{x})}{2x^{42}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty}$ (*)

ie $x^{42} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{\exp(\sqrt{x})}{2}\right)$

D'après (*), fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall x \geq x_0, \quad \frac{\exp(\sqrt{x})}{2x^{42}} \geq 2$$

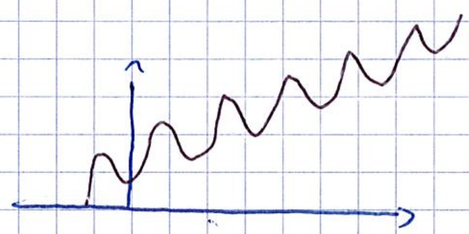
Donc $\dfrac{\exp(\sqrt{x})}{2x^{1/2}} \geq 2$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

Donc $\dfrac{\exp(\sqrt{x})}{2} > x^{1/2}$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

Rq : "Au $\mathcal{V}(+\infty)$" est la version continue de "APCR"

② $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \not\Rightarrow f \nearrow$ au $\mathcal{V}(+\infty)$ en g^al

Ctrex

1) 

2) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x + 2\sin(x)$

1°) On a $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

(R*) On a^(T) $\sin(x) \geq -1$

D'où $f(x) \geq x - 2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

2°) f n'est pas $\nearrow$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

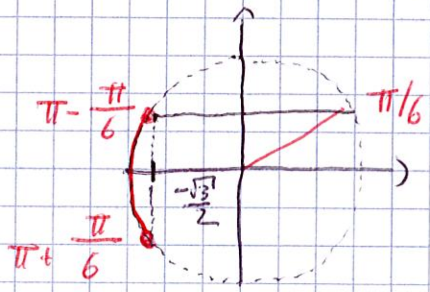
On a $f'(x) = 1 + 2\cos(x)$

Resolvons $f'(x) \leq -\frac{1}{2}$ On .

OALES

$f'(x) \leq 1-\sqrt{3} \iff 2\cos(x) \leq -\sqrt{3} \iff \cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d^n



$\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi , \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$

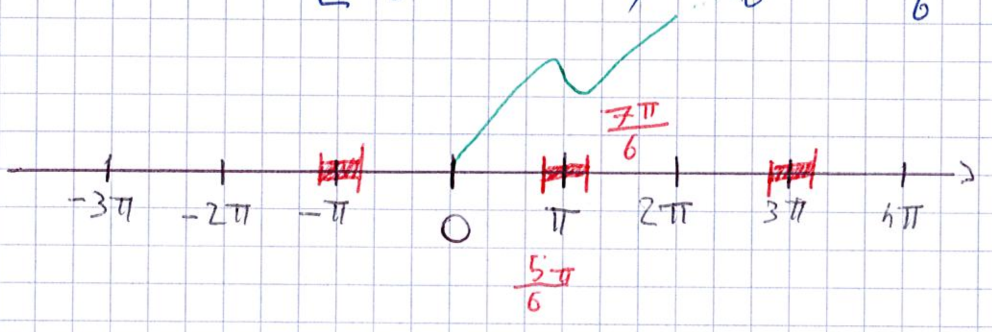
Si $k \in \mathbb{Z}$, on a donc $f'(x) \leq 1-\sqrt{3} < 0$

si $x \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi , \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$

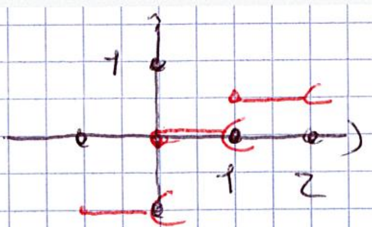
et en particulier, f est st^r^ décroissante

sur $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi , \frac{7\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right]$

d^n



③



$\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

$\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1$

D Lim.18 /

Osq $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$

1er cas : $a \in \mathbb{R}$

ĉ $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, fixons $\delta_0 > 0$ tq

$\forall x \in I \cap]a - \delta_0, a + \delta_0[, |f(x) - \ell| \leq 1$

ineg. triang. renv. $|f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell|$

D'où : $\forall x \in I \cap]a - \delta_0, a + \delta_0[, |f(x)| \leq \ell + 1$

Donc au $V(a)$, f est bornée par $|\ell| + 1$

En particulier : f est bornée au $V(a)$

2e cas : $a = +\infty$

ĉ $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$; fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ tq

$(\varepsilon = 1)$ $\forall x \in I$, $x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq 1$

Donc $\forall x \in I \cap [x_0, +\infty[, |f(x)| \leq |\ell| + 1$

Donc f est bornée au $V(+\infty)$

3^e cas $a = -\infty$: de m̄

⑤ $D^{\text{Lim } 19}$/ Ocsd $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$a \in \overline{I}$ $\quad b \in \overline{J}$ $\quad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

x $\quad X$

Osq $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ (*) $\qquad g(X) \underset{X \to b}{\longrightarrow} \ell$ (**)

Il y a 27 cas

- Osq $a = +\infty$ et $b \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Mq $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in I, \ x \geq x_0 \Rightarrow |(g \circ f)(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

D'après (**) : fixons $\delta_0 > 0$ $\forall X \in J$,

$$|X - b| \leq \delta_0 \Rightarrow |g(X) - \ell| \leq \varepsilon$$

On utilise (*) avec $\delta_0 > 0$.

(On sait que $f(x)$ est proche à δ_0 près de ℓ)

Fixons donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tq

$\forall x \in I, \ x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - b| \leq \delta_0$

Soit $x \in I$ tq $x \geq x_0$

1°/ On a $|f(x) - b| \leq \delta_0$

2°/ Notons $X := f(x)$

3°/ Ĉ $f : I \to J$, on a $X \in J$

4°/ De ④, on a $|X - b| \leq \delta_0$

Donc (AC) on a $|g(X) - \ell| \leq \varepsilon$

ie $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$

ie $|(g \circ f)(x) - \ell| \leq \varepsilon$

CCl : On a mq

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in I, \ x \geq x_0 \Rightarrow |(g \circ f)(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

(AF) $(a \in \mathbb{R} ; b = +\infty ; \ell = -\infty)$

6 !!

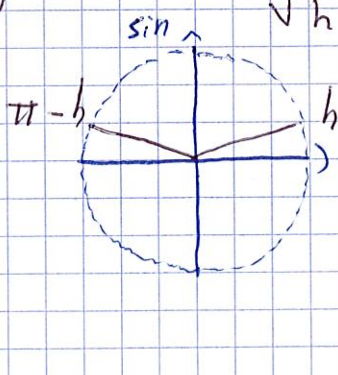
Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\pi - x}}$

On note si $h > 0$: $g(h) := \dfrac{\sin(\pi - h)}{\sqrt{\pi - (\pi - h)}}$

Rq : • on a posé "$x = \pi - h$"
• On a pris $\pi - h$ plutôt que $\pi + h$ car on regarde la limite $x \longrightarrow \pi^-$

Or $g(h) = \dfrac{\sin(\pi - h)}{\sqrt{h}} = \dfrac{\sin(h)}{\sqrt{h}} \overset{\text{OFAA}}{=} \dfrac{\sin(h)}{h} \sqrt{h}$

(dⁿ)



$\hat{c}$ $\dfrac{\sin(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$, on a $g(h) \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$

Ainsi, on a $f(\pi - h) \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$

où on a noté $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\pi - x}}$

ie $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to \pi^-]{} 0}$

$g : h \longmapsto f(\pi - h)$

Exo Calculer $\lim\limits_{x \to 2} \ln\left(\dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 + 5x + 6}\right)$

D lim. 22

Mq 2) ORPA et on fixe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tq

$$\cos(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$$

Ocsd $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ déf par

$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = 2\pi n \\ b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

On a $a_n \longrightarrow +\infty$ et $b_n \longrightarrow +\infty$

donc par comp° des limites, on a

$$\cos(a_n) \longrightarrow \ell \quad \text{et} \quad \cos(b_n) \longrightarrow \ell$$

or, $\forall n$, $\cos(a_n) = \cos(0) = 1$ et $\cos(b_n) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Donc on a $\cos(a_n) \longrightarrow 1$. Par unicité de la limite, on a $\boxed{\ell = 1}$. De $\overline{(ii)}$, on a $\boxed{\ell = 0}$ absurde

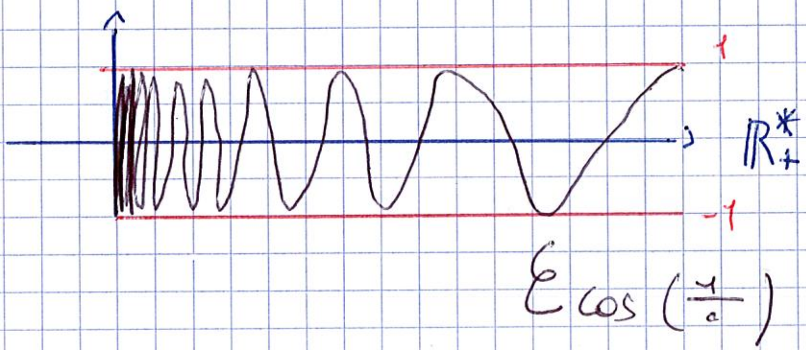
1) ORPA et on fixe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tq $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ell$

Ĉ $\frac{1}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$, par composition des limites, on a

$$\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{X}}\right) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \ell \quad \text{ie} \quad \cos(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \ell \text{ abs.}$$

Rq : Mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

d^n



(8) D/ lim 23

Il y a 3 cas ($a = \pm\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$)

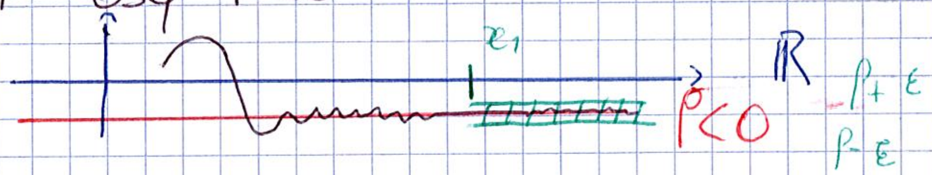
- Osq $a = +\infty$

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $\boxed{\forall x \in I,\ x \geq x_0,\ f(x) \geq 0}$

car $f \geq 0$ au $\mathcal{V}(a)$

ORPA et Osq $\ell < 0$

d^n



$\hat{C}$ $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$, fixons $x_1 \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall x \geq x_1, \quad l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$$

$$= l + \frac{|l|}{3}$$

$$= \frac{2l}{3} < 0$$

En posant $x_2 = \max(x_1, x_c)$, on a :

$$f(x_2) \geq 0$$

(en supposant $x_2 \in I$) et $f(x_2) < 0$: <u>ABSURDE</u>

9) Soit $x > 0$

On a :

$$|x \sin(\tfrac{1}{x})| \leq |x| \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} 0 \quad \text{car } |\sin| \leq 1$$

Donc $x \sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} 0$

d^n " $x \longrightarrow x \sin(\frac{1}{x})$

R^x . $\sin(\varepsilon) \sim \varepsilon$ (ie $\frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0 \\ \neq}]{} 1$)

cf trigo

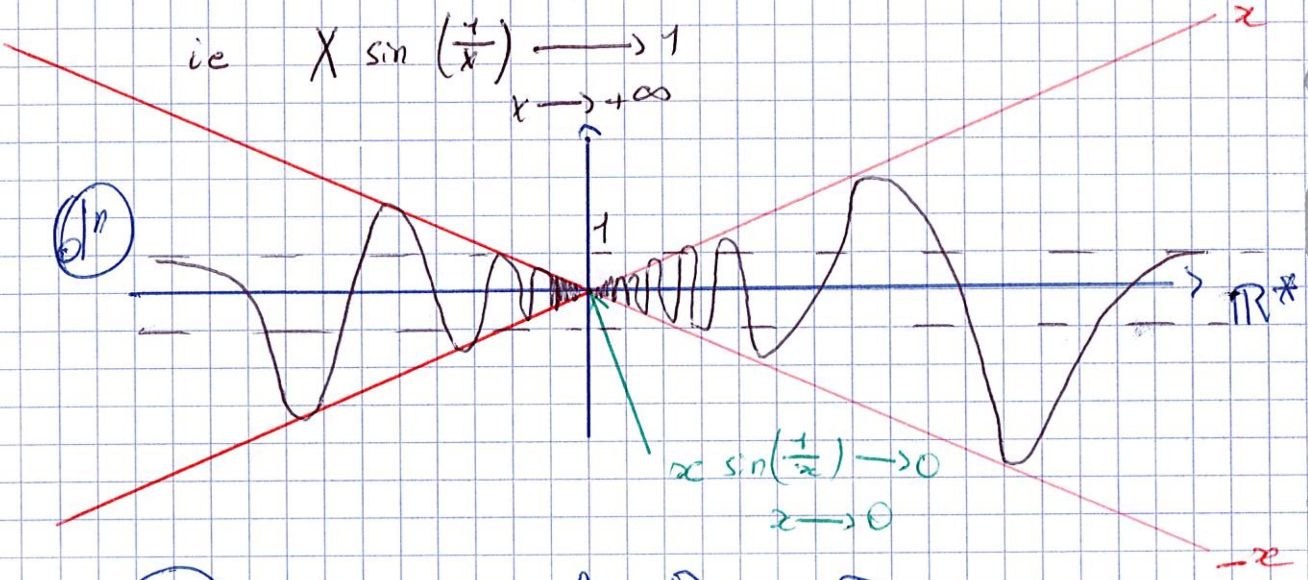
• or $\dfrac{1}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$

• Donc je peux remplacer $\varepsilon \to 0$ par $\dfrac{1}{X}$

• D'où $\sin\left(\dfrac{1}{X}\right) \underset{X \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{X}$

• <u>Ccl</u> : $X \sin\left(\dfrac{1}{X}\right) \underset{X \to +\infty}{\sim} 1$

ie $X \sin\left(\dfrac{1}{X}\right) \xrightarrow[X \to +\infty]{} 1$



(exo) On pose $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2) À-t-on f dérivable en 0 ?

1) Mq f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

(10) Théorème de la limite monotone

On sait que $\left.\begin{array}{l}(U_n)_n \nearrow \\ (U_n)_n \text{ majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow (U_n)_n \xrightarrow{CV}$

On va voir également :

Fait :

1) $\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \nearrow \\ f \text{ majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} : f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

2) $\left.\begin{array}{l} f :]-\infty, a[\to \mathbb{R} \nearrow \\ f \text{ majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} : f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

Th Lim 31

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante

1) Si $c \in]a, b[$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ >}} f(x)$ existent.

Si on les note $f(c^-)$ et $f(c^+)$ alors on a

$$f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$$

2) La limite en b existe : c'est $\lim\limits_{x \to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

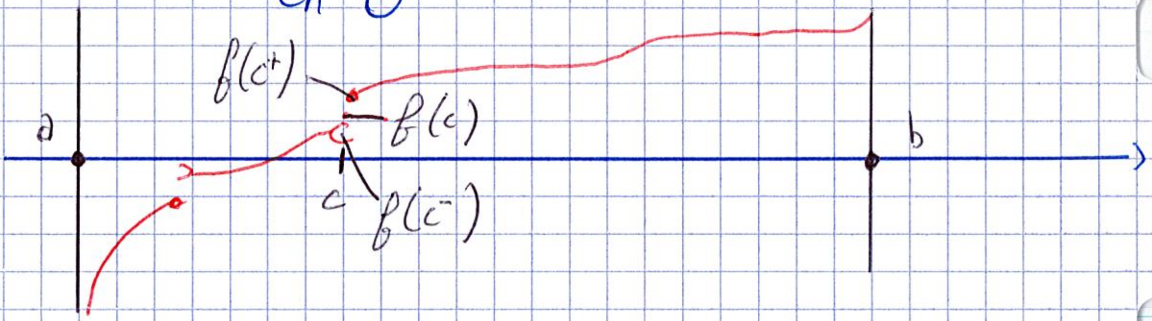
a) Si f est majorée au $\mathcal{V}(b)$, alors

$$\lim_{x \to b} f(x) \in \mathbb{R}$$

b) Sinon : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Rappel : $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0^+

d^n



Rq : • De $\overline{m}$ en a

• On a ~~…~~ ~~…~~ m un enoncé analogue si $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \nearrow$

• De $\overline{m}$ si $f \searrow$

D/ 1) Soit $c \in]a, b[$. Mq $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ >}} f(x)$ existe et est bien finie

Je pose $p := \inf\{f(x) \,;\, x > c\}$

En effet : 1°/ $\{f(x) \,;\, x > c\} \neq \emptyset$

2°/ $f(c)$ minore $\{f(x) \,;\, x > c\}$
car $f \nearrow$

Mq $f(x) \xrightarrow[x \to c, >]{} p$

Soit $\varepsilon > 0$

Par caractérisation de la borne inf "à la ε" :

fixons $x_0 > c$ tq $p \leqslant f(x_0) \leqslant p + \varepsilon$

On a alors : $\forall x \in]c; x_0]$, $|f(x) - p| \leqslant \varepsilon$

Soit $x \in]c; x_0]$. On a $c < x \leqslant x_0$.

$\hat{C}$ $f \nearrow$, on a $f(x) \leqslant f(x_0) < p + \varepsilon$

De (+) $x > c$; donc $f(x) \in \{f(t) \,;\, t > c\}$

Donc $f(x) \geqslant \min\{f(t) \,;\, t > c\} = p$

CCl : $p \leqslant f(x) < p + \varepsilon$

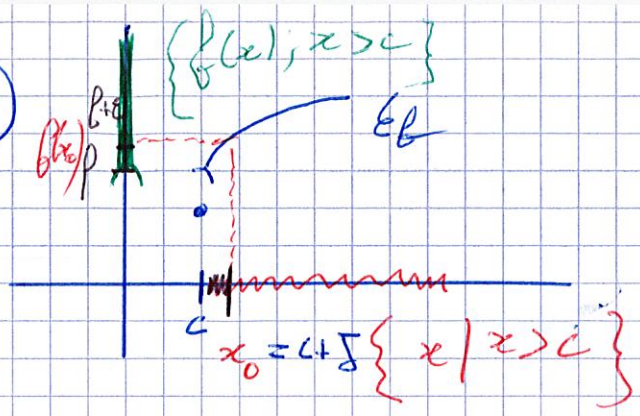
En particulier $\underline{|f(x) - p| \leqslant \varepsilon}$ ■

On pose $\delta := x_0 - c$

On a mq : $\forall x \in]a, b[$, $c < x \leqslant c + \delta$

$\Rightarrow |f(x) - p| \leqslant \varepsilon$ ie $f(x) \xrightarrow[x \to c, >]{} p$ ■

d^n



Si $x > c$, on a $f(x) \geqslant f(c)$ Donc $f(c)$

minore $\{f(x); x > c\}$

Donc $f(c) \leqslant \inf\{f(x); x > c\} = \ell$

Si on note $f(c^+) := \lim_{x \to c^+} f(x)$, on a mq

$$f(c) \leqslant f(c^+)$$

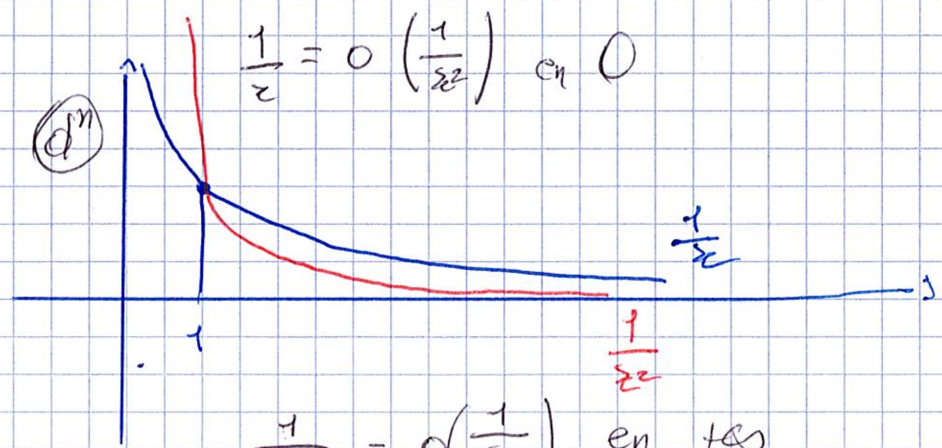
etc ■

At/exo osq f non maj au $\mathcal{V}(b)$

Mq $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$ ■

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ en } 0$$

11 d^n



$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } +\infty$$

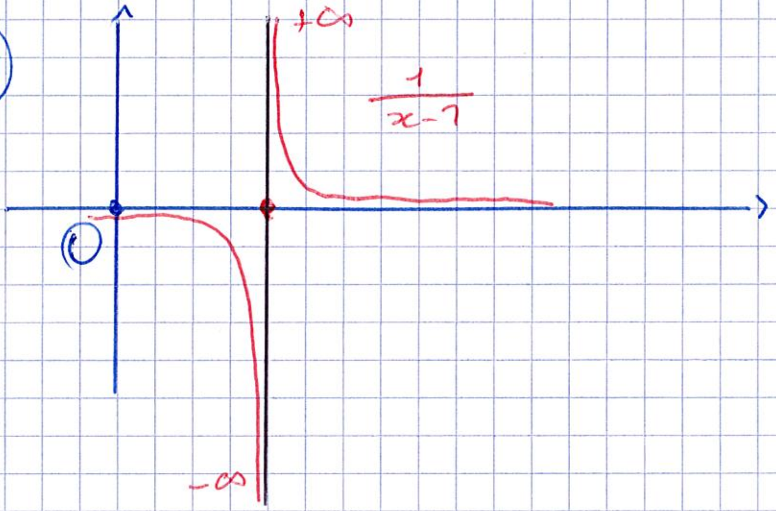
(12)

On a $\dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

Donc $\ln(x) = o(1)$ qd $x \to 1$

et donc $\ln(x) = o\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ qd $x \to 1^+$

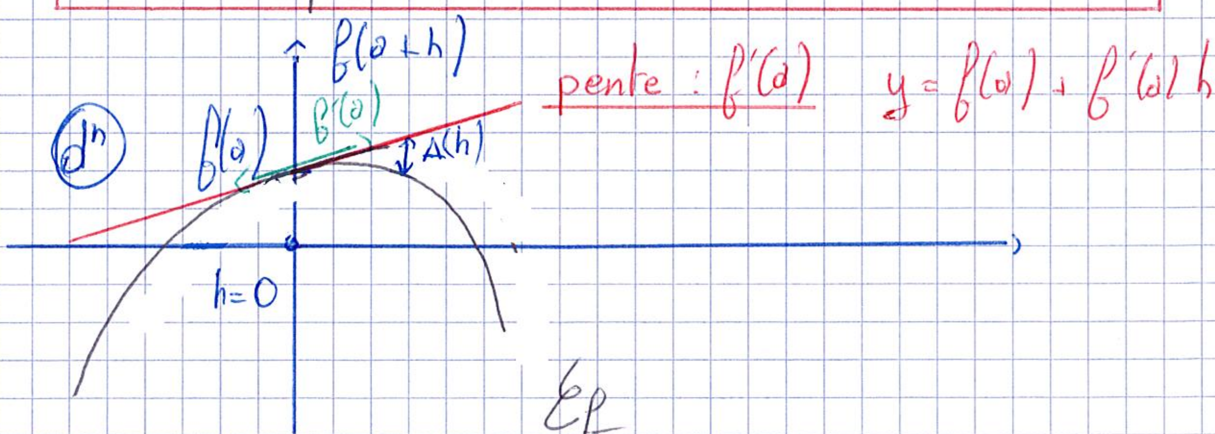
d^n



(13)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Prop : Osq } f \text{ dérivable en } a \\ \text{Alors : } f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \\ \quad \text{qd } h \to 0\end{array}}$$

d^n



$$\Delta(h) := f(a+h) - \big(f(a) + f'(a)h\big) \underset{h \to 0}{=} o(h)$$

D/ On a $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$

Donc $\dfrac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Ie $f(a+h) - f(a) - f'(a)h \underset{h\to 0}{=} o(h)$

ie $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ qd $h \to 0$ ■

Rq : "$x = a+h$" donne

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

quand $x \to a$

Th Applicat° ⓣ

On pose $f(x) = \dfrac{2e^x - \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{1+x}}{x}$

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

On utilise les DA !!

On a $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \Big(2\big(1 + x + o(x)\big) - \big(1 + \frac{x}{2} + o(x)\big)$

$- \big(1 - x + o(x)\big) \Big)$

$= \dfrac{1}{x} \left(2x - \dfrac{x}{2} + x + o(x) \right)$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{5}{2}x + o(x)\right)$$

R^{*} $$= \frac{5}{2} + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{5}{2}$$