Chapitre 20

limites et comparaisons

I. Adhérence, intérieur et voisinages

3. Voisinages.

Exemples

1. D/ $\frac{\exp\sqrt{x}}{2} > x^{42}$ au $\mathcal{V}(+\infty)$.

On a $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2x^{42}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^{84}}$; or $\frac{e^{y}}{y^{84}} \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$ par croissance comparée.

Comme $\sqrt{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, par composition $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2x^{42}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

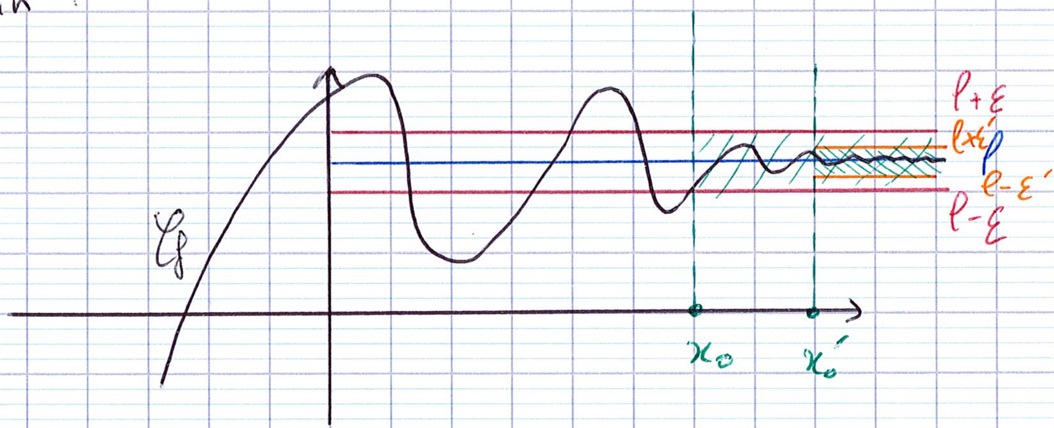
Donc $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2x^{42}} > 1$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

ie $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2} > x^{42}$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

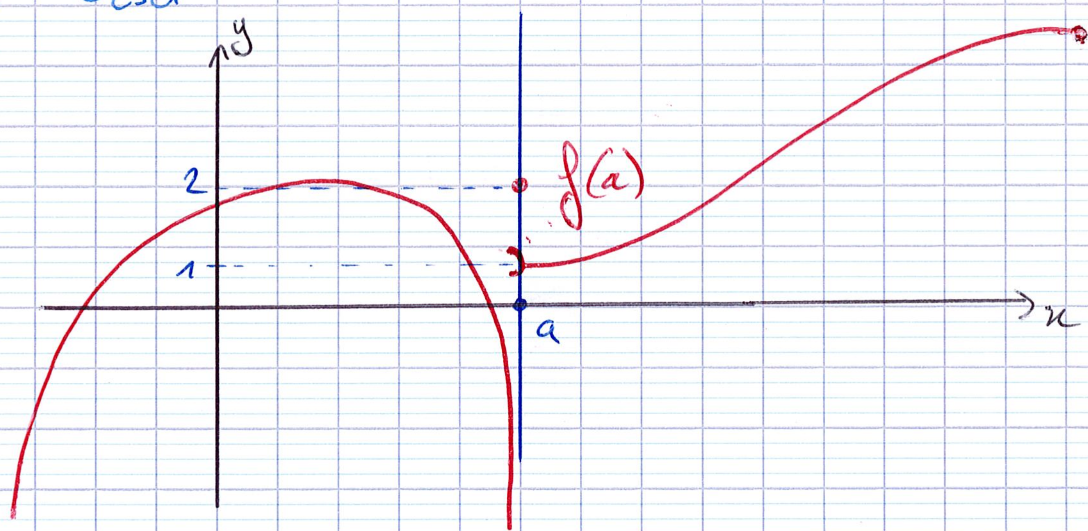
② Def 10 :

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in I,$
$x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Dessin :



③ Ocsd



On a $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} -\infty$

On a $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} 1$

④ D/ Prop 18. Osq $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

On a 3 cas à traiter :

• 1er cas : "a est fini", ie $a \in \mathbb{R}$.

En posant $\varepsilon = 1$ dans la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

On peut fixer $\delta > 0$ tq $\forall x \in I, |x-a| \leq \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| \leq 1$$

Or, (T) $$|f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell| \leq 1$$

Donc $$|f(x)| \leq 1 + |\ell|$$

Donc $f|_{I \cap]a-\delta ; a+\delta[}$ est bornée par $1+|\ell|$.

Donc $\boxed{f \text{ est bornée } \mathcal{V}(a)}$.

• 2ème cas : $a = +\infty$.

Ie, on a supposé $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

Mq f bornée au $\mathcal{V}(+\infty)$

(T) $(\varepsilon = 1) \Rightarrow$ fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ tq

$$x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq 1$$
$$\Rightarrow |f(x)| \leq 1 + |\ell|$$

Donc $f|_{I \cap [x_0 ; +\infty[}$ est bornée.

CCl : f est bornée au $\mathcal{V}(+\infty)$.

- 3ème cas : $a = -\infty$: ok.

⑤ Soient I, J des intervalles
Soient $f : \underset{x}{I} \to J_X$ et $g : \underset{X}{J} \to \mathbb{R}$
Soit $a \in \overline{I}$, soit $b \in \overline{J}$
Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors, on a $g \circ f : \underset{x}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ g(X) \xrightarrow[X \to b]{} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

D/ Pour a : 3 cas
Pour b : 3 cas
Pour ℓ : 3 cas

D'où $\underline{27 \text{ cas}}$.

- Osq $a \in \mathbb{R}$, osq $b = +\infty$, osq $\ell \in \mathbb{R}$

Ex :

Ocsd $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{x} + 42$

On pose $\boxed{a = 0.}$, on a bien $a \in \overline{(\mathbb{R}_+^*)}$

Ocsd $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \arctan(x)$

On a $\boxed{\ell = \frac{\pi}{2}}$

On a $\begin{cases} \frac{1}{x} + 42 \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty \\ \arctan(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc, par composition des limites, on a :

$$\boxed{\arctan\left(\frac{1}{x} + 42\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \frac{\pi}{2}}$$

• Mq $g \circ f(x) \xrightarrow[\underset{\text{finie}}{x \to a}]{} \ell$ — ℓ finie, donc ε

→ On cherche δ.

Soit $\varepsilon > 0$.

Ĉ $g(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \ell$. Fixons $X_0 \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall X \in J, \quad X \geq X_0 \Rightarrow |g(X) - \ell| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Or, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$

Fixons donc $\delta > 0$ tq

$$\forall x \in I, \ |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq X_0$$

Soit $x \in I$ tq $|x - a| \leq \delta$. On a $\underbrace{f(x)}_{\in J} \geq X_0$

D'après $(*)$, on a donc $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$

On a donc mq $\forall x \in I, \ |x - a| \leq \delta \Rightarrow$
$|g \circ f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Ie, on a mq $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x-a| \leq \delta$

$$\Rightarrow |(f \circ g)(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Ie, on a mq $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

!! ⑥ Calculons la limite de

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi - x}}$$

R^x Ocsd g, définie par :

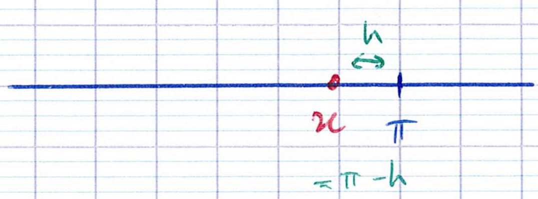
$$g(h) = \frac{\sin(\pi - h)}{\sqrt{\pi - (\pi - h)}}$$

(ie, on a posé "$x = \pi - h$")

Par composition des limites, on a :

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi - x}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sin(\pi - h)}{\sqrt{h}}$$

B° $x \to \pi^- \iff h \to 0^+$



On, $g(h) = \dfrac{\sin(\pi - h)}{\sqrt{h}}$

$= \dfrac{\sin(h)}{\sqrt{h}}$

OFAA : $\dfrac{\sin(h)}{h}$ $\rightarrow$ $= \dfrac{\sin(h)\sqrt{h}}{h}$

$= \underbrace{\dfrac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0^+]{} 1} \cdot \underbrace{\sqrt{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$

D'où $\lim\limits_{h \to 0^+} g(h) = 0$

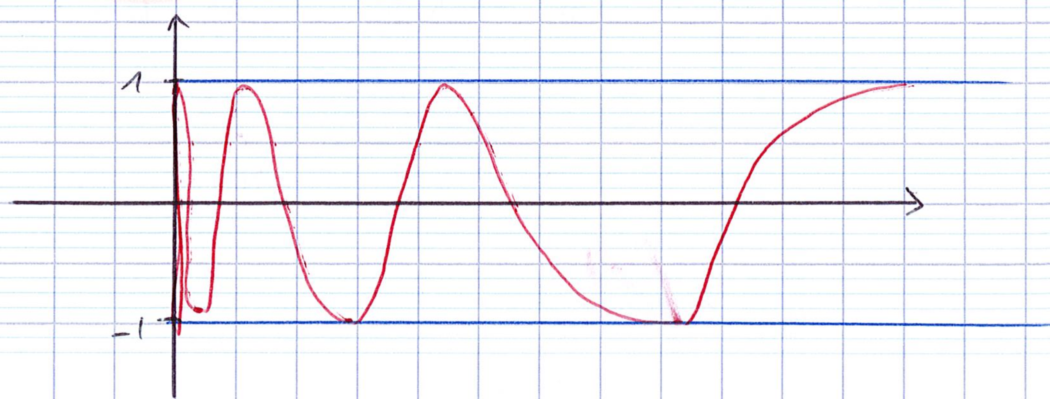
Donc $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\pi - x}} \xrightarrow[x \to \pi^-]{} 0$

7 Théorème :

1) $f : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0

2) $\cos(\cdot)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

d^n)



D) ② Mq $\cos(\cdot)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (ni finie, ni infinie).

Osst deux suites $(u_n)_n$, $(w_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 2n\pi \\ w_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi. \end{cases}$$

ORPA, osq $\boxed{\cos(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell}$ où $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Comme $u_n \to +\infty$

Par composition des limites, $\cos(u_n) \to \ell$

de même $\cos(w_n) \longrightarrow \ell$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{cases} \cos(u_n) = \cos(0) = 1 \\ \cos(w_n) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

Donc $\cos(u_n) \to 1$; donc par unicité de la limite $\boxed{\ell = 1.}$

De même avec $(w_n)_n$ on obtient $\boxed{\ell = 0}$ Abs

D/ ORPA, on fixe $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ tq $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ell$

Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$ par composition des limites

car $\forall x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, on a :

$$\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$$

Abs

car $\cos(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$

Autre démo :

Oasd $\begin{cases} \frac{1}{2n\pi} \longrightarrow 0 \\ \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \longrightarrow 0 \end{cases}$ (etc)

8 D/ Prop 23 (T)

- Trois cas : $a \in \mathbb{R}$; $a = \pm\infty$

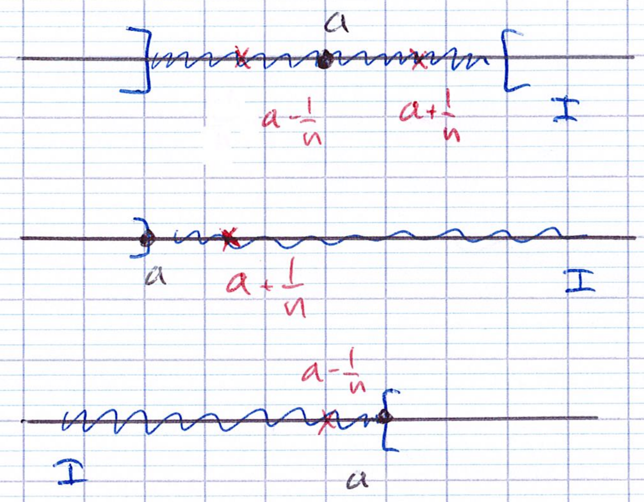
1er cas : $a \in \mathbb{R}$. Osq $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \\ f(x) \geq 0 \text{ au } \mathcal{V}(a) \end{cases}$

Astuce : On passe par les suites.

Comme $a \in \bar{I}$, on a $a + \frac{1}{n} \in I$ APCR

ou $a - \frac{1}{n} \in I$ APCR

d^n)



Osq $a + \frac{1}{n} \in I$ APCR

$$\boxed{a + \frac{1}{n} \longrightarrow a}$$

C $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

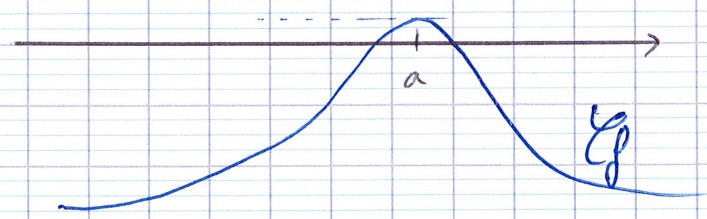
Par composition des limites, on a

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \ell$$

Ĉ $f \geqslant 0$ au $\mathcal{V}(a)$, et ĉ $a + \frac{1}{n} \to a$

On a $f\left(a + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$ APCR.

d^n)



D'après le cours, $\hat{\imath}$

$$\begin{cases} f\left(a+\frac{1}{n}\right) \geq 0 & \text{APCR} \\ f\left(a-\frac{1}{n}\right) \to l \end{cases}$$

Donc on a $l \geq 0$ ■

(9)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

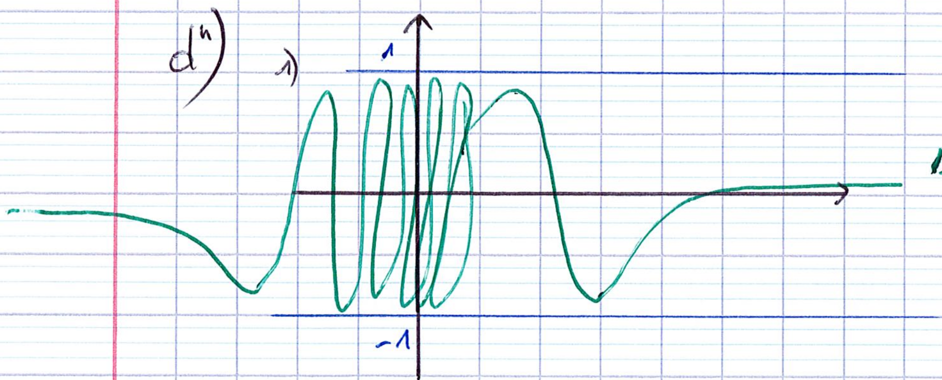
Soit $x > 0$. On a

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \underbrace{\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} 0$$

D'où $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} 0$

d'')

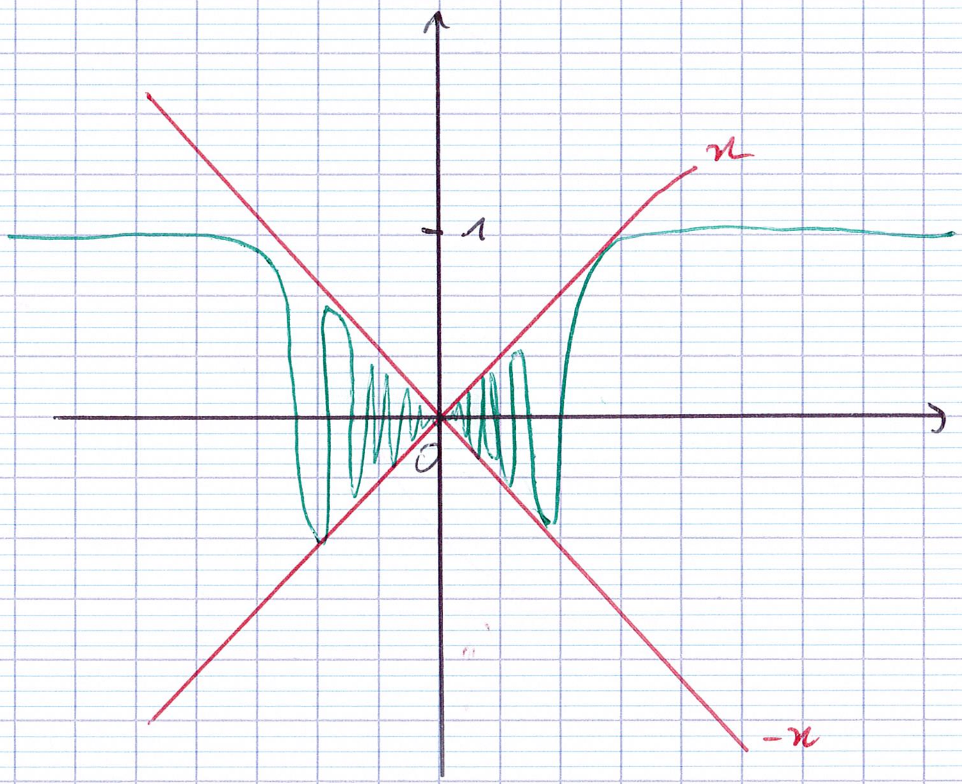
1)



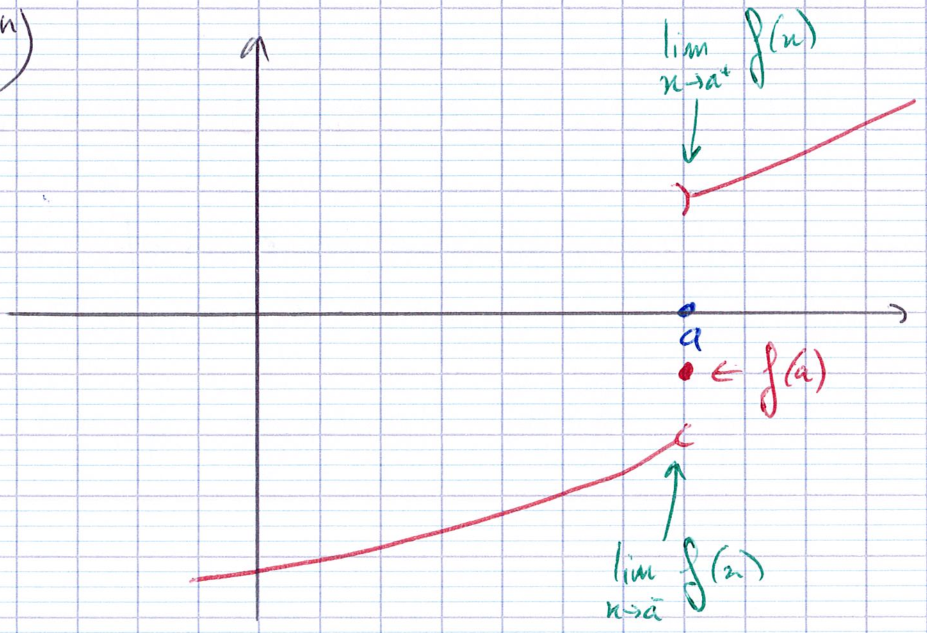
$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

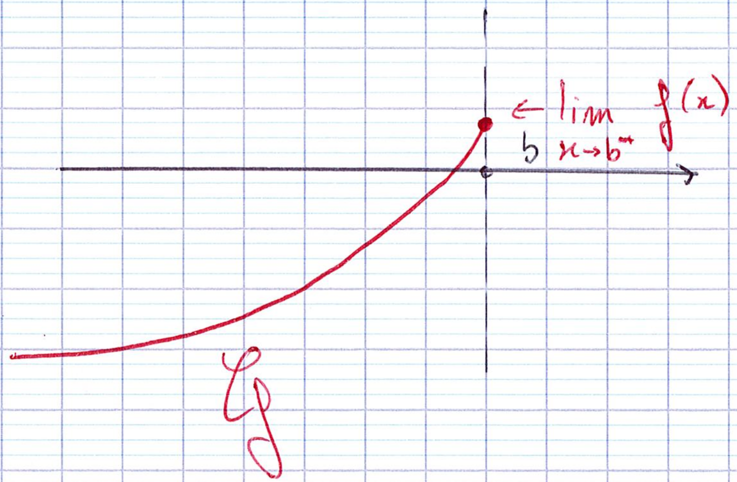
2) $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

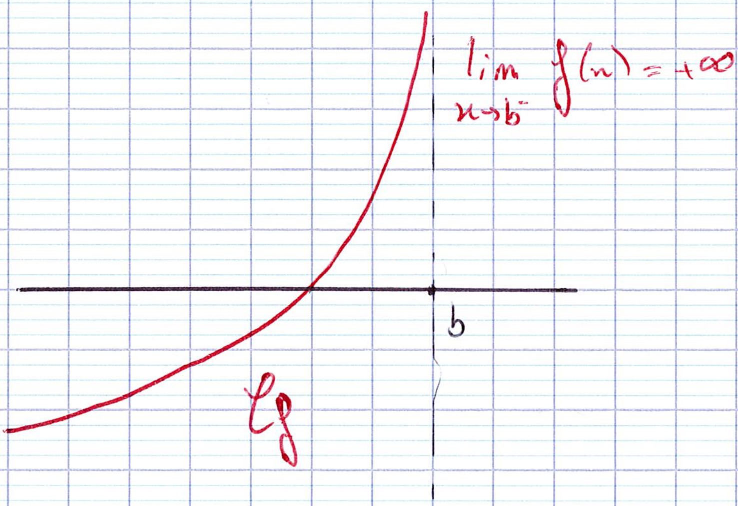
En $+\infty$: $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim x \cdot \frac{1}{x} = 1$ ie $\sin\left(\frac{1}{x}\right)x \to 1$



10 d)



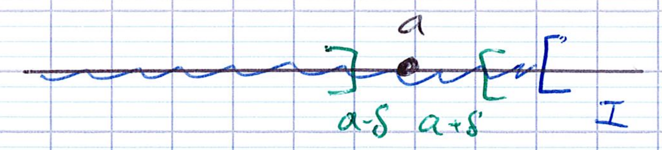




De même en borne inférieure.

D/ Osq $a \in \mathring{I}$

Fixons $\delta > 0$ tq $]a-\delta ; a+\delta[\subset I$.



• Mq $f(x)$ converge quand $x \to a^-$.

Posons $A := \left\{ f(x) \; ; \; x \in I \text{ et } \boxed{x < a} \right\}$

$$\left(= f\left(I \cap]-\infty ; a[\right) \right)$$

On a $A \neq \emptyset$ en effet $f(a-\delta) \in A$

car $a - \delta \in I$ et $a - \delta < a$.

A majorée par $f(a)$.

En effet si $x \in I$, et $x < a$, on a $f(x) \leq f(a)$
car $f \nearrow$

DALC, d'après la propriété de la borne supérieure
$\boxed{\sup(A) \text{ existe !}}$

Posons $\ell := \sup(A)$.

Mq $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell$

ie mq $\forall \varepsilon > 0, \exists d > 0 : \forall x \in]-\infty ; a[\cap I,$

$$|x - a| < d \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ie mq $\forall \varepsilon > 0, \exists d > 0 ; \forall x \in I, \; a - d \leq x < a$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$.

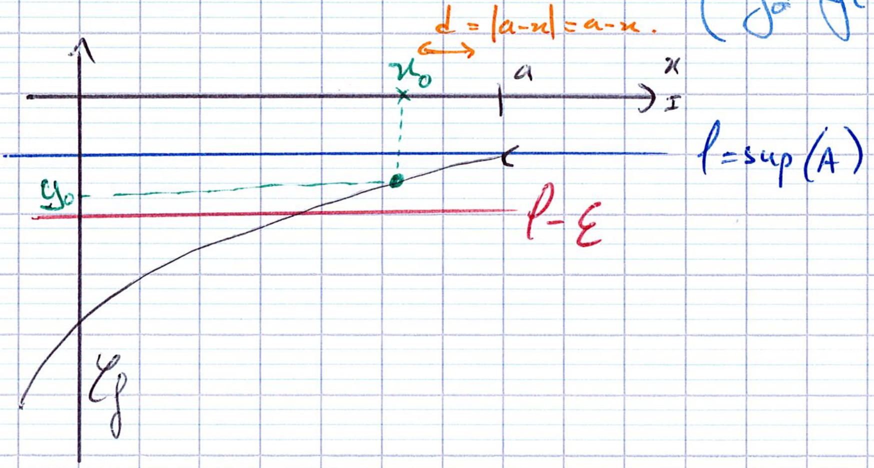
On utilise la borne sup "à la $\varepsilon > 0$".

$\hat{C}$ $\ell - \varepsilon < \ell = \sup(A)$

Fixons $y_0 \in A$ tq $\ell \geq y_0 > \ell - \varepsilon$.

$\hat{C}$ $y_0 \in A$, fixons $x_0 \in I$ tq $\begin{cases} x_0 \leq a \\ y_0 = f(x) \end{cases}$

d")



On pose $d := |x_0 - a| = a - x_0$.
On a bien $d > 0$.

Mq $\forall x \in I,\quad a-d \leq x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Soit $x \in I$ tq $a - d \leq x < a$.

On a $a - (a - x_0) = x_0 \leq x < a$

Comme $f \nearrow$, on a $f(x_0) \leq f(x) \leq f(a)$

Mieux, on a $x \in I$ et $x < a$

Donc $f(x) \leq \sup(A) = \ell$

Donc $y_0 = f(x_0) \leq f(x) \leq \ell$

D'où $\ell - \varepsilon < f(x) \leq \ell$.

Alors, à fortiori, on a $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$

ie $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

• On a $\ell = \sup(A)$.

On a mq A majoré par $f(a)$.

Donc $\ell \leq f(a)$

CCl : On a mq 1) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe

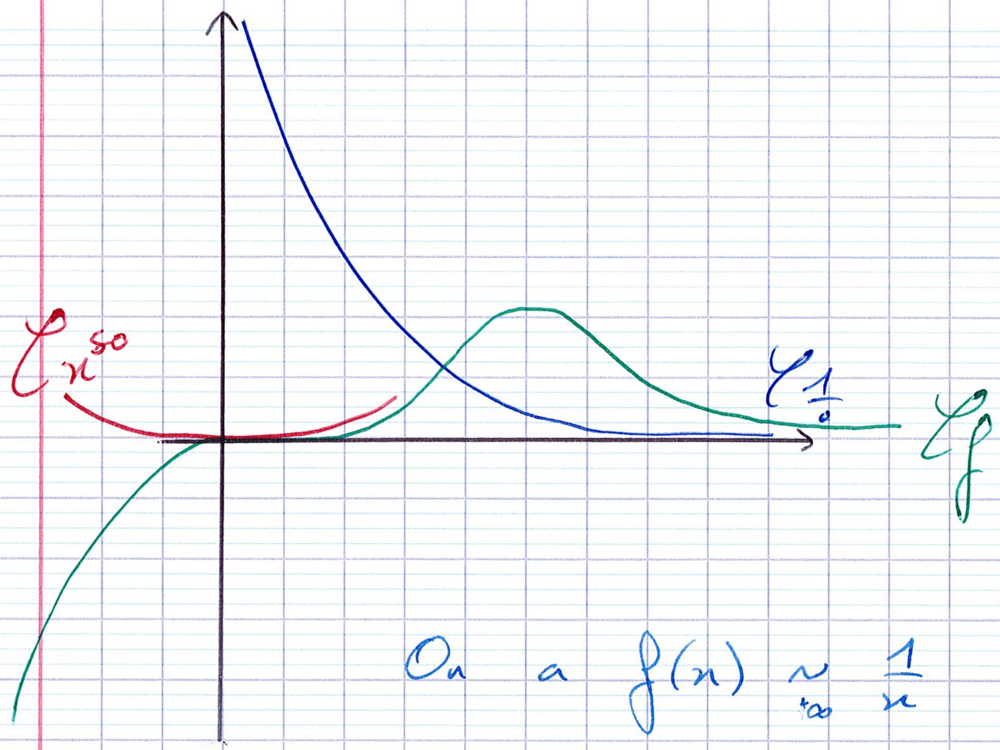
2) $\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a)$.

De même par limite par valeur supérieure.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \inf\left(\left\{ f(t) \; ; \; \begin{matrix} t \in I \\ t > a \end{matrix} \right\}\right) \geq f(a)$$

$\blacksquare$

2.a) 2.b) 2.c) : AF Exo



On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

$f(x) \underset{0}{\sim} x^{50}$

Ex : $f(x) = \frac{1}{x+1}\left[\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right]^{50}$

$= \frac{1}{x+1} \frac{x^{50}}{(x+1)^{50}}$

$= \frac{x^{50}}{(x+1)^{51}}$

(11) On a $x^2 = o(x)$ quand $x \to 0$

Donc $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to 0$

(12) Calculons $\lim_{x \to 0} \dfrac{\overbrace{2\exp(x)}^{\to 2} - \overbrace{\sqrt{1+x}}^{\to 1} - \overbrace{\dfrac{1}{1+x}}^{\to 1}}{x}$

D'où une forme indéterminée.

Idée On sait $\exp(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1$,

Mais cette information est insuffisante

Pour conclure, il faut pousser l'ordre du devellopement asymptotique à 1 de plus.

On a : $\exp(x) \sim 1$ ie $\boxed{\exp(x) = 1 + o(1)}$

$\xrightarrow{\text{Mieux}}$ $\boxed{\exp(x) = 1 + x + o(x)}$

$\sqrt{1+x} \sim 1$ $\xrightarrow{\text{Mieux}}$ $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$

$\dfrac{1}{1+x} \sim 1$ $\xrightarrow{\text{Mieux}}$ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$

(quand $x \to 0$).

On a $2\exp(x) - \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{1+x}$

$= 2 + 2x + o(x) - 1 - \dfrac{x}{2} + o(x) - 1 + x + o(x)$

$= \left(2 - \dfrac{1}{2} + 1\right)x + o(x)$

$= \dfrac{5}{2}x + o(x)$

Donc
$$\frac{2\exp(x) - \sqrt{1+x} - \frac{1}{1+x}}{x}$$
$$= \frac{\frac{5}{2}x + o(x)}{x}$$
$$= \frac{5}{2} + o(1) \quad \text{quand } x \to 0.$$

CCl : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{2\exp(x) - \sqrt{1+x} - \frac{1}{1+x}}{x} = \frac{5}{2}$.

Rq : En mode terminale :

$$\left(\frac{d}{dx}\sqrt{1+x}\right)(0)$$

$$(\ldots) = 2\,\frac{e^x - e^0}{x} - \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x}$$

$$\longrightarrow \exp'(0) = 1$$

$$\frac{\frac{-x}{1+x}}{x} = \frac{-1}{1+x} \xrightarrow[x \to 0]{} -1$$